LECTURE DES ENONCES MATHEMATIQUES

François BOULE, Claire VASSERER
Professeurs Ecole Normale d'Auteuil

Il n'est pas question ici d'essayer de définir le terme "**lecture**", qui est comme l'a souligné Roland Barthes, un mot saturé. On se contentera de la définition classique et vague rappelée au début des Programmes et Instructions de l'Ecole Elémentaire : "**Lire, c'est comprendre**". Il ne s'agira pas de l'acte de lire en général, mais seulement de la lecture d'un texte mathématique. Il convient donc d'abord d'examiner ce qui est spécifique d'un texte mathématique (outre son référent), puis de se demander si l'on aborde sa lecture d'une manière particulière.

CARACTERISTIQUES D'UN ENONCE MATHEMATIQUE

Certaines de ses caractéristiques sont celles du **discours scientifique** en général :

– tendance à **l'objectivation**, marquée par exemple par l'emploi de formes passives (mise en retrait du sujet) ;

– tendance à la **précision** ;

– tendance à la **concision**, conduisant à l'emploi de compléments en cascades, et de plusieurs subordonnées ;

– **monosémie** des termes employés.

Outre ces caractéristiques de tout discours scientifique, le langage **mathématique** fonctionne essentiellement par le moyen de **l'écrit**. On remarque dans le discours mathématique écrit :

– une grande importance des **noms** et des **adjectifs** ;

– la faible fréquence des verbes ;

– l'importance des **organisateurs logiques ou temporels** (par suite, donc, parce que, premièrement ...).

Mais, outre ces particularités d'ordre syntaxique, la caractéristique essentielle du texte mathématique réside sans doute dans la présence de trois codes en interaction [1]* :

- la langue naturelle ;
- le langage mathématique ;
- le symbolisme ;

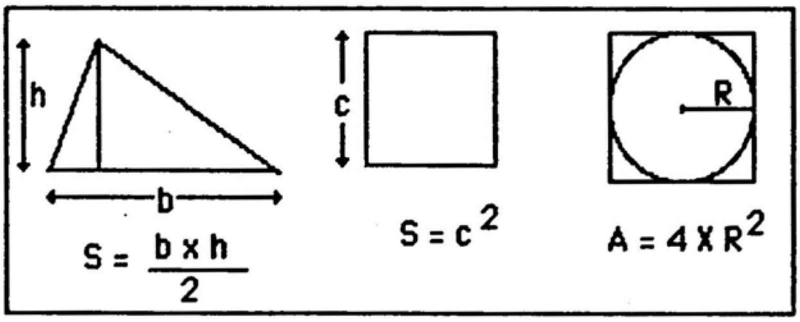
La grande majorité des textes mathématiques sont écrits en mêlant la langue courante, l'écriture symbolique et des termes ayant un sens spécifique en mathématique. Ces trois registres de code interagissent pour donner sens au texte.

Le symbolisme comprend des lettres, des chiffres et des signes divers.

(*) Ce nombre entre crochets, ainsi que les suivants dans le texte, renvoie aux références bibliographiques mises en fin d'article.

• **Les lettres** peuvent désigner des objets (une droite, un point ...), des relations (Ex. : a R b), des variables (Ex. : x, y ...) et souvent aussi des abréviations (u̲ pour le chiffre des unités, d̲ pour dizaines, c̲ pour centimes, h̲ pour heures...)

Le périmètre P du cercle s'exprime en fonction du rayon R par la formule : $P = 2 \times \pi \times R$ L'aire du disque s'exprime en fonction du rayon R par la formule : $A = \pi \times R \times R$ Voici un encadrement du nombre π $3{,}14 < \pi < 3{,}15$



• **Les chiffres**

Un même signe numérique a des significations différentes selon sa position dans l'expression écrite : comparer par exemple la signification du chiffre 2 dans les écritures suivantes :

12 25 230 10^2

• **Les signes opératoires et autres symboles**

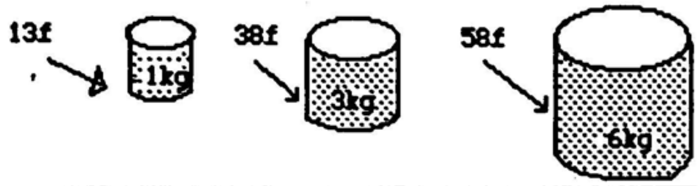
Une égalité est une relation logique et non chronologique : "a = b" équivaut exactement à "b = a". Mais l'écriture "5 = 2 + 3" suppose que l'on rencontre 5 avant 2 + 3 et l'on préfère naturellement lire dans le même ordre ; il en résulte parfois des surinterprétations d'écritures ("2 + 3 = 5" peut être perçu comme une **construction** du nombre 5, et "5 = 2 + 3" comme une **décomposition**).

De la même façon la lecture littérale de "3 X 4" introduit une antériorité de l'un des facteurs (que l'on lise "trois fois quatre", ou "trois multiplié par 4", ou autrement encore) que les propriétés de la multiplication ne justifient pas.

Le tiret intervient soit pour signaler une opération (Ex. : 3 – 2) soit pour caractériser un nombre négatif (Ex. : – 3), ou bien encore l'opposé d'une quantité (Ex. : – A), ou même enfin comme barre de fraction.

La **flèche** reçoit des emplois encore plus nombreux et plus ambigus :

Pour repeindre la salle à manger, Jacques a trouvé qu'il y a 47m² à peindre. On compte généralement 1kg de peinture pour 3m². Dans un magasin Jacques a vu la publicité suivante. Que lui conseilles-tu de faire ? Combien paiera-t-il ?



Dans le département du Val de Marne, les véhicules sont numérotés ainsi :

7285 AM 94

de 0 à 9999 — numéro du département

Trois enfants, Luc, Marc et Nicole échangent des billes en respectant la règle ci-dessous :

Complète ces listes de nombres et trouve les fonctions correspondantes :

—(?)→

5,7 → 8
6,2 → .
9,3 → 11,6
. → 25

On pourrait également examiner les signes > et <, les parenthèses, le radical, etc.

Les termes mathématiques

Il peut s'agir de termes techniques spécifiques. Mais ce sont souvent des mots ayant une signification en langue naturelle. Il est alors fondamental de distinguer le sens de ces mots en mathématique et en français. Le sens du mot dans la langue courante peut parfois aider à la compréhension du sens en mathématique ; il a été choisi pour faire image. Mais même dans ce cas le sens univoque choisi en mathématique doit être précisé. Il arrive que l'usage fasse obstacle à la compréhension. Ainsi par exemple pour le terme "**volume**" [2] des élèves de CM2 répondent (par écrit et avec une orthographe "originale") :

- "Le mot volume est un peu pareil que l'aire d'un rectangle ou d'un carré et sa peut être beaucoup de bruit, du vacarme".
- "Le mot volume est un objet qui a un fond et qui peut contenir de l'eau.
- Souvent dans les livres qui ont une suite il est écrit volume 1, volume s'est le numéro du livre.
- Quand on dit monte le volume de la radio, c'est-à-dire mettre plus fort ou moins fort".
- "Exemple : le volume du coffre d'une voiture est l'intérieur. Le volume est pas exemple 400 dm³. Beaucoup d'objets dont on prend le volume pour savoir combien on peut mettre de jouets".

Il arrive encore que l'usage courant perturbe, par surcharge affective, l'emploi de certains termes. La pratique de la rééducation a conduit plusieurs fois à signaler l'importance de ce phénomène [3] :

Les mots **couple, division, pair** (homonyme de : père), **fraction** peuvent être lourds d'évocation, et favoriser des dérives fantasmatiques. Le rôle du mot "**fois**" par exemple dans "deux fois plus" n'est pas tout à fait simple. "**Déduction**", relativement peu utilisé d'ordinaire dans le sens du raisonnement déductif, est plus souvent associé à l'idée de soustraire (déduction d'impôt ...).

Précisons enfin qu'en mathématique même la référence au contexte n'est pas inutile pour lever certaines ambiguités : "**hauteur**" ou "**médiane**" peuvent désigner un segment, une droite, une longueur, une mesure de longueur. Alors que l'on distingue le contour et la surface dans l'opposition **cercle/disque**, l'opposition n'existe pas pour "**carré**" ou "**triangle**".

FORMULATION ECRITE / FORMULATION ORALE

Il est temps de rappeler ici que le langage mathématique fonctionne généralement dans l'écrit. La lecture d'un texte mathématique n'est pas la simple transcription orale de ce qui est écrit. La lecture des nombres peut en convaincre. Le nombre qui s'écrit **97** se prononce "quatre vingt dix sept" alors que ni quatre, ni vingt, ni dix, ni sept ne sont apparents dans son écriture [4].

L'imbrication, déjà signalée, d'écritures symboliques dans un texte en langue naturelle conduit **à lire** ces écritures de façons dépendant du contexte. Les expressions :

$a > 2$ (a est supérieur à 2), ou $A \in D$ (A appartient à D)

intervenant dans une phrase :

on suppose $a > 2$ ou **Soit un point $A \in D$**

deviennent :

"on suppose [a supérieur à 2] " ou : "soit un point [A appartenant à D]".

De même la double égalité $a = b = c$ est la contraction de deux phrases et se prononce : "a, b, et c sont égaux". La lecture d'une double inégalité paraît encore plus délicate : $3 < P < 4$ doit être entendue ainsi "P est compris entre 3 et 4". C'est ici l'ordre habituel de la lecture qui est bousculé ; l'écriture symbolique convoque un schéma particulier de prise d'information.

Voici un autre exemple, emprunté à un domaine de formalisation dépassant largement l'école élémentaire [5] :

$\forall\ n \in N,\ \exists\, p,\ p \in N\ /\ p > n$

"un entier étant donné, on peut toujours en trouver un plus grand"

Se contenter d'une lecture "pas à pas", transcrivant l'écrit, plutôt que de saisir le sens et de reformuler oralement entraîne un risque majeur d'incompréhension ; ce risque est encore peu sensible à l'école élémentaire, à cause de la grande habitude d'emploi des symboles utilisés, mais les occasions deviennent ensuite plus nombreuses et plus importantes.

Pour pouvoir produire, à partir du texte écrit, un texte parlé, il faut avoir enregistré les "formes" qui en portent le sens et savoir les transcrire dans la langue naturelle. S'assure-t-on toujours, dans notre enseignement, de développer cette compétence indispensable à la compréhension du texte mathématique ?

QUAND ET POURQUOI UN ELEVE LIT-IL UN TEXTE MATHEMATIQUE ?

Si le langage mathématique est, comme on l'a mentionné, un langage écrit, sa fonction n'est pas, dans l'usage qui en est fait, une fonction d'apprentissage. En effet, l'enseignement mathématique passe surtout par une communication orale. L'écrit n'est généralement pas une source d'information **nouvelle**, et ce peut être une lacune de notre enseignement, ainsi que le signale Irène Rasolofoniaina [6]. Les exemples sont rares qui témoignent du contraire ; c'est pourquoi il convient de signaler "**La fête des petits matheux**" [7], qui se propose précisément de rendre les mathématiques accessibles directement aux jeunes élèves (C.M., 6ème) à travers un langage peu formalisé, anecdotique et agréable.

Alors pourquoi et quand lit-ont des mathématiques à l'école ?

Pour **revoir**, **étudier** des notions déjà abordées en classe, en complétant éventuellement l'information donnée par le maître ou en la retrouvant sous une forme voisine. Il convient ici de distinguer des énoncés de statut différent.

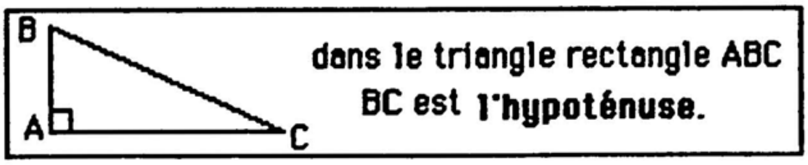
• Les **définitions** ne sont pas annoncées en tant que telles à l'école élémentaire. Elles sont signalées :

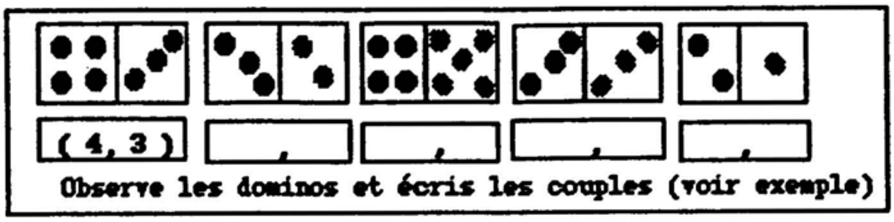
– soit par des "avertisseurs de désignation" (suivant l'expression de J. Kuntzmann) tels que : "se nomme", "se note", "est appelé" ; les verbes les plus fréquemment utilisés sont : désigner, noter, écrire, appeler, nommer, dire.

> Si un triangle a deux côtés de même longueur, on dit qu'il est **isocèle**. Si un triangle a un angle droit, on dit qu'il est **rectangle**
> Si un triangle a ses côtés de longueurs différentes, et s'il n'a pas d'angle droit, on dit qu'il est **quelconque**.

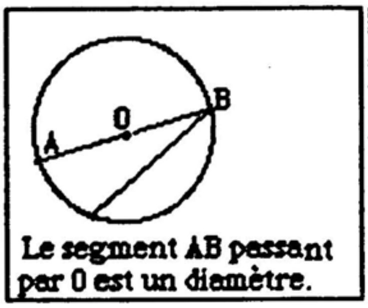
> Trouve tous les diviseurs de 12, de 15, de 18, de 28.
> Trouve maintenant tous les diviseurs de 11, de 13, de 17, de 19.
> On appelle **nombre premier** tout nombre naturel qui a deux diviseurs: le nombre lui-même et un.

– soit de façon implicite, (elle est alors donnée sans avertisseur) et l'on n'aperçoit pas aisément s'il s'agit d'une définition ou d'une propriété. Cet implicite dissimule également la qualité d'extension de la définition : s'agit-il d'une désignation universelle, ou propre au contexte particulier ?





Dire que : 1cm sur le plan représente 2m en réalité équivaut à dire: 1cm sur le plan représente 200cm en réalité.
La fraction 1/200 indique l'échelle du plan



Un triangle dont les trois côtés ont la même longueur est appelé équilatéral

Dans le premier exemple, c'est à l'élève de remarquer qu'il s'agit du côté opposé à l'angle droit. L'objet défini est montré sans explication. On parle quelquefois de "définition ostensive" [1]. Pourrait-on définir plutôt l'hypoténuse comme "le plus grand" des trois côtés d'un triangle rectangle ? Il s'agirait bien du même objet mathématique. Mais les informations données sont-elles les mêmes ?

Le second exemple (le terme "couple" est évoqué à cet instant pour la première fois) propose une définition "en acte" : on exhibe une construction d'un couple particulier, et l'on demande de transférer cette mise en œuvre. On pourrait également parler de "définition inductive".

Il convient également de distinguer nettement la **définition**, dont l'objet est de créer, à partir d'une description, un nouvel "objet générique" mathématique, de la **désignation** qui consiste à baptiser, pour la durée d'un exposé ou d'une activité, un objet singulier déjà connu ("on appelle C le centre du cercle, etc...").

De nombreux concepts géométriques sont définis ainsi : rayon d'un cercle, diamètre (exemples 4 et 5).

- La lecture des **énoncés d'exercices et de problèmes**

L'énoncé d'un problème est généralement un texte écrit. On y retrouve donc les caractéristiques, évoquées précédemment, de tout texte mathématique. Comme pour tout texte, il convient d'en connaître le vocabulaire (français et mathématique), de comprendre le symbolisme utilisé, d'en saisir l'organisation. Jusqu'à la fin du Collège au moins, et si l'on excepte les situations de recherche ou "situations-problèmes", **comprendre** l'énoncé, c'est presque déjà savoir résoudre le problème.

Qu'entend-on alors par **comprendre** un énoncé de problème ?

Il s'agit d'abord de repérer les informations qui sont fournies (hypothèses) et celles que l'on cherche à obtenir (conclusions), puis de trouver un "chemin" (une démarche) conduisant de celles-là à celles-ci. C'est ici qu'intervient **l'intuition de la situation de référence**, notamment à travers des **reformulations**. Reformuler un énoncé de problème, ou des énoncés associés aux informations relatives à ce problème, c'est essentiellement manier des **synonymies**. La synonymie est à la langue naturelle ce que l'égalité est à l'écriture symbolique [8]. On sait à tout moment pouvoir remplacer le nombre 12 par 3 x 4, ou bien par 10 +2 ; ou bien remplacer l'évocation d'un parallélogramme par l'un des ensembles de propriétés qui le caractérise etc... La compréhension d'un problème (c'est-à-dire sa "lecture") dépendrait donc, non seulement de capacités à opérer et à déduire, mais d'abord de la possibilité de mettre en œuvre ces capacités. C'est le rôle du langage qui est ici souligné, et cette maîtrise du langage qui consiste à pouvoir se **décentrer** par rapport à une formulation donnée.

Bien entendu, les reformulations, ou les synonymies ne sont pas entre elles exactement équivalentes ; et il existe d'autres représentations que langagières.

Les reformulations visent à dépouiller le texte initial afin de conserver les informations susceptibles d'un traitement algorithmique. Plutôt que choisir des indices, il s'agit de tester leur **résistance** par rapport à la nature du problème. On peut le faire en essayant de "raconter" le problème à quelqu'un, ou d'inventer un nouveau problème par substitution de données, ou de se référer à des situations déjà traitées, ou de trouver une manière de représenter (dessin, schéma) la situation proposée ...

Trop souvent ces activités de reformulation sont négligées et l'élève passe directement d'un déchiffrage à une résolution par automatismes ; ceux-ci sont déclenchés notamment par certaines expressions :

"combien reste-t-il", "que manque-t-il" déclenche le plus souvent une soustraction; le mot "total" déclenche une addition.

Pendant les vacances, Pierre a utilisé 4 films de dix-huit poses chacun Rentré à la maison, il colle 5 photographies sur chaque feuille d'un album. Trouve : Le nombre total de photographies, Le nombre de feuilles entièrement remplies, Le nombre de photos qui restent.

Une fermière a ramassé 55 oeufs. Elle les met dans des boites pouvant contenir chacune 6 oeufs. Cherche le nombre de boites qu'elle peut remplir complètement, et le nombre d'oeufs qui restent.

On arrive jusqu'à des situations extrêmes où, même en l'absence de déclencheurs d'opération, l'élève prélève des données numériques en nombre suffisant pour effectuer une opération, mais hors de toute signification. L'exemple le plus connu a donné lieu à l'article intitulé

"Quel est l'âge du capitaine ? " [2] :

"Il y a 7 rangées de 4 tables dans la classe. Quel est l'âge de la maîtresse ?"

"Dans une bergerie, il y a 125 moutons et 5 chiens. Quel est l'âge du berger ?"

Les résultats font apparaître que les trois quarts des enfants de CE, et environ un tiers des enfants de CM ont trouvé "l'âge du capitaine". Mais on ne peut conclure trop vite que les enfants ne font que prélever les nombres. L'opération choisie est généralement celle qui conduit à un résultat plausible. Ce qui donne à penser que si les enfants ne se font guère de représentation de ces situations incongrues, par contre ils en ont une assez claire de ce qu'un problème est censé être : un problème comporte des données et une question ; cette question **peut** recevoir une réponse (et une seule) à partir d'une combinaison des données (toutes, si possible). Il en résulte une lecture **minimale** des indices suffisants à produire une réponse, de préférence plausible. Ces indices sont d'abord les indications numériques (surtout si elles figurent en chiffres) et les déclencheurs d'opérations, tout cela saisi dans l'ordre de succession ordinaire.

Mais reformuler ce n'est pas seulement le faire dans la langue ordinaire, c'est aussi faire appel à d'autres types de représentations. Celles-ci peuvent être de différents ordres :

– un **dessin** (figuratif) associé à la situation de départ peut conduire à s'interroger sur la signification de certains indices.

– certaines représentations constituent des techniques de résolution (tableaux à double entrée, ou combinaison d' "opérateurs").

– plus généralement, la **lecture** d'un problème devrait conduire à l'identification, ou à l'hypothèse d'un **schéma**. Un schéma constitue un **relais** entre la diversité des situations réelles et le petit nombre de modèles (abstraits) permettant d'en traiter les informations. L'une des difficultés à résoudre des problèmes est la "saturation de l'espace de travail" : on ne peut garder à l'esprit (ou dans la mémoire) qu'un petit nombre d'informations "libres", c'est-à-dire non fédérées par une signification globale. Le schéma a une existence autonome et se prête à des opérations intrinsèques (manipulations ou raisonnements) [10]. Il peut donner lieu à des représentations des données ou de procédures de traitement : opérateurs en chaîne, tableaux, arbres, graphiques, organigrammes. Lire en mathématiques, c'est aussi savoir interpréter ces représentations, y recourir, éventuellement passer d'une à l'autre. Il est probable que la collection des schémas utiles, pour les problèmes envisagés à l'école (et peut-être même au collège) est très réduite. Mais il y aurait, à systématiser leur apprentissage exclusif, le même risque qu'avec les "déclencheurs d'opérations". Ils deviendraient de nouveaux stéréotypes, comme les "problèmes à forme fixe" de jadis. Dès lors que l'on est assuré de trouver dans l'énoncé des données en petit nombre, celles qui sont utiles à la résolution et rien qu'elles, le repérage du schéma s'automatise. C'est pourquoi, à côté des **exercices** visant au renforcement des schémas et des techniques de résolution, il est utile de proposer des **situations-problèmes** dans lesquelles l'enfant doit prospecter, sélectionner et organiser les informations, sans que tel ou tel indice l'oriente d'emblée vers telle ou telle résolution.

Exemples :

Les grands-parents de Sophie lui donnent 20 F pour qu'elle achète un cadeau qui lui plaise. Elle choisit parmi ces objets :

Un livre 18 F – Une poupée 25 F – Une balle 6 F – Un jeu de cartes 12 F

Le commerçant lui accorde une réduction de 4 F pour un montant dont le total s'élève à 20 F au moins et de 2 F pour un achat de plus de 10 F et de moins de 20 F. Que peut acheter Sophie ?

Deux récipients A et B l'un à moitié vide, l'autre à moitié plein contiennent chacun 50 litres d'eau. On dispose de deux seaux vides, l'un de 3 litres, l'autre de 7 litres. Comment transvaser un litre d'eau de A dans B?

Dans un petit village de France, les enfants de CM2 ont fait une enquête et ont collecté les renseignements suivants :

1) Une personne sur six a plus de soixante-cinq ans.
2) Une personne sur cinq a moins de quinze ans.
3) Une personne sur trois a moins de trente ans.
4) Au-delà de 65 ans, il y a en moyenne trois femmes pour deux hommes.
5) Au-delà de 90 ans, il n'y a plus qu'un homme pour trois femmes.

Dans une autre ville, où ces 5 renseignements sont aussi valables, il y a 640 personnes de moins de 15 ans. Que peut-on trouver d'autre ?

Références bibliographiques

[1] : Colette LABORDE, Langue naturelle et écriture symbolique, thèse de didactique des mathématiques, Grenoble 1982

[2] : Revue Grand IN, n° 30, C.R.D.P. de Grenoble

[3] : Lusiane WEYL-KAILEY, Victoire sur les Maths, Ed. Robert Laffont, 1985

[4] : Lucien BRUNELLE et Dominique BARATAUD, De l'erreur à la réussite en mathématiques, Ed. F. Nathan, 1985

[5] : François BOULE, Mathématique, langue, langage, E.N. Auteuil, 1980

[6] : Irène RASOLOFIONIAINA, in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 5-1, 1984

[7] : Philippe BOULANGER, La fête des petits matheux, Vol. 1 et 2, Ed. Belin, 1984

[8] : Francis REYNES, Langage, synonymie et démonstration, in Bulletin APMEP, n° 331, déc. 1981

[9] : Equipe "Elémentaire" de l'IREM de Grenoble, Quel est l'âge du capitaine ? in : Revue Grand IN n° 19, C.R.D.P. de Grenoble et Bulletin APMEP n° 323, avril 1980

[10] : W. SERVAIS, in : L'enseignement des mathématiques, Ed. Delachaux-Niestlé, 1965