

# ACTIVITÉS DE REPRÉSENTATION ET DE MODÉLISATION DANS UNE APPROCHE EXPLORATOIRE DE LA MATHÉMATIQUE ET DES SCIENCES<sup>1</sup>

## DEUXIÈME PARTIE

### LES ACTIVITÉS DE MODÉLISATION DANS LE CONTINU

C. BEGUIN<sup>2</sup>, J-L. GURTNER<sup>3</sup>, O. de MARCELLUS<sup>4</sup>,  
M. DENZLER<sup>2</sup>, A. TRYPHON<sup>5</sup> et B. VITALE<sup>6</sup>

#### Sommaire

Nous présentons ici les résultats d'une approche exploratoire à l'enseignement interdisciplinaire de la mathématique et des sciences. Cette approche est fondée sur une analyse détaillée des activités de représentation et de modélisation développées par les élèves - dans le contexte de l'enseignement secondaire obligatoire dans le canton de Genève - avec, à un certain point de leur travail, le recours à l'informatique.

Dans un premier article (Béguin et al, 1995), nous avons présenté les aspects généraux et le contexte pédagogique de notre projet et nous avons analysé en détail le rôle des activités de *représentation* des élèves. Dans ce deuxième article, nous discuterons en détail du rôle de leurs activités de *modélisation*. Nous nous limiterons ici aux projets qui impliquent l'analyse de *phénomènes continus*. Dans un troisième et dernier article, nous discuterons du rôle des activités de *modélisation* dans des projets qui impliquent l'analyse de *phénomènes discrets*. Nous y présenterons également nos

---

<sup>1</sup> Cette recherche a été partiellement financée par le Fonds national suisse de la recherche scientifique (FNRS), contrat de recherche n°.11-30259.90, et par l'Office suisse de l'éducation et la science (OFES) ; elle s'inscrit dans le cadre des activités de recherche du Centre de recherches psychopédagogiques (CRPP) du canton de Genève. Pour toute correspondance avec les auteurs : c/o Bruno Vitale, 27 Gares, 1201 Genève (Suisse), tél. (\*\*41 22) 733 52 11.

<sup>2</sup> Enseignants de mathématique et de science, Département de l'instruction publique (DIP), canton de Genève.

<sup>3</sup> Institut de pédagogie, Université de Fribourg.

<sup>4</sup> CRPP, DIP, Genève.

<sup>5</sup> FNRS.

<sup>6</sup> En congé de recherche de l'Institut de physique théorique, Université de Naples, au Laboratoire de didactique et d'épistémologie des sciences (LDES), Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation (FPSE), Université de Genève ; collaborateur du CRPP.

*conclusions générales* et nous y analyserons les *possibilités de généralisation* et les *implications didactiques* de notre approche<sup>1</sup>.

#### IV. L'activité de construction de modèles comme approche vers la maîtrise de l'expérience

"Le terme **modèle scientifique** permet de présenter la connaissance humaine comme une synthèse de la théorie et de l'expérience"<sup>2</sup>.

Dans notre premier article (Béguin et al, 1995) nous avons écrit : "Dans un monde envahi par l'*information*, dans une pratique scolaire souvent vécue par les élèves comme une transmission neutre de *faits*, de *données* et de *lois* (présentées à leur tour comme des *faits*), il est facile d'entendre "c'est la nature" ou "c'est logique" comme commentaire à la présentation en classe d'une série de résultats expérimentaux. Comme si l'expérimentation avait eu comme seul but d'en arriver à un tableau, à un diagramme - à un *fait* - après quoi, on peut passer à l'étude d'un autre problème. Mais, pour que l'activité expérimentale soit féconde, il faudra réussir à dépasser cette phase (du "*comment* vont les choses ?"), pour passer à celle tellement plus complexe qui essaye de répondre à la question : "*pourquoi* les choses vont comme elles vont ?" ; ou - de façon peut-être plus modeste - "*comment représenter, structurer, interpréter et maîtriser* les données que l'on observe ?" "

Nous avons déjà discuté de la façon dans laquelle les élèves<sup>3</sup> construisent et analysent leurs représentations de l'expérience. Nous avons mis en évidence la relation qu'il y a entre ces activités de *représentation* (verbale, gestuelle et graphique) et celles de *structuration* et d'*interprétation* des données empiriques. En effet, il n'y a pas de représentation "pure" ou "neutre" ; chaque acte représentatif implique, à des niveaux plus ou moins conscients, des actes de *structuration des données* (par exemple, par des activités d'interpolation) et d'*interprétation du phénomène* (par exemple, par des activités d'extrapolation et par des attentes implicites sur les comportements asymptotiques)<sup>4</sup>.

Ce deuxième article va présenter en détails quelques activités de *modélisation* des élèves, dont le but est de faire avancer chez eux l'analyse de l'expérience, en explorant les possibilités d'*interprétation des phénomènes observés* (tant en termes de relations empiriques que de mécanismes causaux) et en mettant en évidence le type de *maîtrise de l'expérience* à laquelle cette analyse peut aboutir<sup>5</sup>.

<sup>1</sup> Par ailleurs, nous sommes en train d'écrire des *Séquences didactiques pour le maître* relatives à notre projet de *modélisation des phénomènes de croissance et changement*. Les enseignants intéressés par ces textes peuvent contacter Claude Béguin, 131 Chênaie, 1293 Bellevue (Suisse), tel. (\*\*41 22) 774 24 84.

<sup>2</sup> H. Wold : Avant-propos, in Wold (1966), p. IX.

<sup>3</sup> Il s'agit d'élèves du Cycle d'orientation du canton de Genève, entre 12 et 15 ans.

<sup>4</sup> Cela est très bien dit par Larcher : "Le caractère empirique de la description, par rapport au caractère théorique d'un modèle, doit être nuancé. En effet, les phénomènes que l'on cherche à modéliser sont déjà des constructions, le résultat de conceptualisations antérieures." (Larcher et al, 1987, p.16).

<sup>5</sup> Chez les élèves les plus petits, les phases description - représentation de l'expérience, à un niveau seulement qualitatif, peuvent être très riches (voir, par exemple, Cauzinille-Marmèche et al, 1983 sur

Cela ne va pas de soi, parce que la notion de *règle* (ou de *loi de la nature*) est présente chez les élèves - au moins en grande partie - comme un artefact de la pratique scolaire (ce qui les entraîne à affirmer des conjectures telles que "la nature ne fait pas de sauts" ou "tout va à la température ambiante"). Distinguer, autant que possible, les faits constatés du cadre interprétatif qui les encadre est une démarche exigeante à tout âge. L'école, trop centrée sur l'acquisition d'un certain bagage scolaire, tend à accréditer une notion rigide et naïve des "lois de la nature", qui se constatent mais ne s'interprètent pas.

Voici, par exemple, un extrait de protocole d'élève<sup>6</sup> :

Claude (7ème) : 'une chose c'était de voir ce qu'elles ont en commun ces expérience - une autre question est - est-ce qu'on peut dire pourquoi les choses sont comme ça ? - "ça ne s'explique pas - ça peut pas s'expliquer" - 'mais dans les cours de biologie on essaye d'expliquer la nature' - "oui - la taille ça peut s'expliquer - l'amaryllis on peut aussi expliquer - mais la température on pourrait pas tellement"<sup>7</sup>.

Le passage des activités de représentation à celles de modélisation n'est certainement pas aisé et spontané chez les élèves. Il s'agit donc de construire en classe, dans une série de discussions et d'analyses communes de projets d'expérience, ces notions - encore assez fluides - de *règle*, de *causalité* et de *modèle*. Il s'agit également de vaincre les artefacts du type "lois de la nature", car ils ne peuvent que perturber la compréhension de l'aspect constructif, culturel et social des activités d'interprétation et de modélisation des phénomènes naturels. Le "fil rouge" qui parcourt tout notre projet pédagogique et qui inspire notre démarche est en effet : "Les règles, les modèles sont *construits* par nous pour comprendre, maîtriser et généraliser notre expérience, ils ne sont pas *découverts*. Ce qui par contre est découvert, c'est la possibilité de construire et d'utiliser de telles règles, de tels modèles".

#### **IV.1. Définition de la notion de modèle, dans le contexte de notre proposition pédagogique**

Le terme "modèle" est utilisé dans tellement de contextes différents que toute tentative d'en donner une définition exhaustive serait vaine<sup>8</sup>. Nous donnerons donc un cadre sémantique limité pour *notre* définition des termes "modèle" et "modélisation", en reprenant et en enrichissant la définition proposée dans notre premier article ; nous parlerons de :

---

"La combustion de la bougie" ; "La croissance des plantes" ; "Les bougies" et "Les anémones"). Il s'agit là d'expériences faites "pour voir", qui peuvent amener à la découverte des premières dépendances fonctionnelles ; au Cycle d'orientation, on peut passer à une phase plus quantitative et interprétative. Voir aussi Ackermann-Valladao (1981).

<sup>6</sup> Nous citons entre ' ... ' les interventions de l'expérimentateur ; entre " ... " celles des élèves.

<sup>7</sup> On a souvent noté (voir, par exemple, Gurtner et al, 1993a) que les élèves acceptent plus facilement de réfléchir aux règles qui peuvent décrire le comportement d'un système biologique qu'à celles qui pourraient être trouvées pour décrire celui d'un système physique. Les raisons cognitives ou affectives pour cette différence ne nous sont pas très claires.

<sup>8</sup> Voir, par exemple, "modèle" sur Encyclopedia Universalis (1988).

- *représentation* pour toute description raisonnée et pour toute tentative de structuration de l'expérience sensible ;

- *modélisation* pour toute tentative d'interprétation, de maîtrise et de généralisation de l'expérience sensible<sup>9</sup>.

Il ne s'agit pas, ici, d'"expliquer" le monde ; ni de réduire le niveau d'observation de la pratique scolaire (défini par la recherche de données de séries historiques et de résultats d'observations *macroscopiques*) à des niveaux sous-jacents *microscopiques* (cellules, molécules, atomes, nucléons, quarks, ...). En effet, la projection dogmatique d'*explications* des phénomènes observés en termes de structures sous-jacentes et de mécanismes élémentaires invisibles et non observables (*réductionnisme*) ne peut pas aider les élèves à *construire* leurs cadres interprétatifs de l'expérience naturelle en partant de leur pratique.

Les modèles auxquels nous allons nous référer ici sont donc des *modèles heuristiques*, souvent purement *empiriques* : des possibles cadres interprétatifs des données expérimentales et de leurs interpolations et extrapolations<sup>10</sup>. Sont-ils utiles ?

Nous croyons que oui. Ils ne prétendent pas représenter "la réalité", ni anticiper nécessairement les *lois de la nature* auxquelles les élèves seront confrontés plus tard dans leur carrière scolaire. Toutefois, ils aident à rendre explicite, dans l'appropriation et la construction personnelle de la connaissance, le rôle joué (très souvent, inconsciemment) par la *pensée logico-mathématique* (le "royaume de la nécessité", en langage piagétien), en interaction dialectique avec la *pensée causale* (le "royaume de la causalité"). Formalisation, mathématisation, utilisation d'un langage formel : autant de tâches qui devraient dominer la pratique mathématique et scientifique à l'école, mais qui restent bloquées (et implicites) dans le ghetto de la mathématique. Modéliser, c'est utiliser toutes ces formes de pensée pour mettre de l'ordre dans notre expérience. Non nécessairement de façon unique et immuable ; bien au contraire, de manière souvent floue, provisoire, ouverte à la généralisation et au changement ("immersion dans le monde des possibles", pour réutiliser le langage piagétien).

Un dernier point, très brièvement. Nous avons souvent utilisée l'expression "maîtrise de l'expérience" ; ce que nous entendons par là est le suivant<sup>11</sup>.

Un phénomène isolé ne nous apporte pas grand-chose. Prenons, par exemple, les données expérimentales relatives au refroidissement d'une certaine masse d'un certain type d'huile, chauffée à une certaine température initiale et laissée refroidir spontanément jusqu'à une certaine température ambiante. Sa modélisation (voir le point

<sup>9</sup> Nous sommes donc assez proches, dans notre utilisation du terme "modèle", de la position de Casti ("Pour moi, les modèles sont des instruments pour organiser la réalité, pour ordonner notre expérience, plutôt qu'une *description* de la réalité." Casti (1992, vol. 2, p. 381). Sur les activités de modélisation dans le cadre scolaire, dans une optique semblable à la notre, voir en particulier Martinand et al (1987), Janvier et al (1991) et l'ensemble de "projets de modélisation et d'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique" dans Vitale (1990-1995), (1992), (1995).

<sup>10</sup> Nous avons décrit en détails ce que nous entendons par "cadres interprétatifs" dans deux articles adressés à des enseignants, Vitale (1991), (1994).

<sup>11</sup> Voir, pour plus de détails sur cette notion de "maîtrise de l'expérience", Gurtner et al (1991), (1993).

V.4. ci-dessous pour les détails) nous permet de prévoir le comportement de la même masse de la même huile chauffée à une température initiale différente et/ou avec une température ambiante différente. C'est un premier pas vers la maîtrise du phénomène de *refroidissement d'une certaine masse de ce type d'huile*. De plus, en modifiant la valeur de  $k$ , le modèle choisi nous permet de prévoir le refroidissement de n'importe quelle masse de ce même type d'huile, et - ce qui est encore plus intéressant - de n'importe quelle masse de n'importe quel liquide. Notre maîtrise du phénomène de *refroidissement des liquides* s'est enrichie. Enfin, on va se rendre compte qu'il n'y a pas de raison (dans le modèle) pour que la température initiale soit plus grande que celle finale ; et voici que notre modèle décrit, en général, le phénomène de *changement de température* (refroidissement et réchauffement) *des liquides*.

#### IV.2. La relation entre représentation(s) et modèle(s) d'un phénomène

Il est évident que la seule *représentation* (par exemple, graphique) d'une expérience particulière de refroidissement d'une certaine masse d'un certain type d'huile ne saurait pas nous apporter une telle maîtrise des phénomènes de changement thermique des liquides. On serait alors tenté de dire que les deux notions, "représentation" et "modèle", sont clairement différentes, qu'elles jouent un rôle différent dans l'acquisition des connaissances et qu'elles sont, d'une certaine manière, douées d'une structure hiérarchique (la représentation précédant le modèle).

En réalité, il n'en est rien. Les activités de représentation et de modélisation se chevauchent continuellement dans l'apprentissage ; les deux notions sont floues, leurs domaines sémantiques incertains, les régions de recoupement assez importantes. En plus, le *contexte* de l'analyse est essentiel pour savoir si l'on se trouve du côté de la représentation ou du modèle<sup>12</sup>. L'analyse de toute représentation (indépendamment de la modalité représentative choisie) met en évidence des formes implicites ou embryonnaires de modèles<sup>13</sup>. Dans notre premier article, nous les avons appelés "paradigmes interprétatifs" : ceux de *continuité*, de *régularité*, de *linéarité* et (avec un rôle moins clair que les autres) celui de *déterminisme*<sup>14</sup>.

Il nous semble, toutefois, qu'il y a au moins deux différences essentielles entre ces micro-modèles (ou paradigmes interprétatifs), décelables dans toute activité représentative, et les modèles dont il sera question dans ce qui suit. En quelques mots :

a. Les paradigmes interprétatifs semblent d'*application générique* et ne semblent pas dépendre du contexte. Peut-être ils ne s'appliquent pas à *toutes les formes d'expérience*<sup>15</sup>, mais ils en couvrent certainement des domaines assez larges et

<sup>12</sup> "Comme Wittgenstein l'a noté, l'image d'une personne qui monte sur une colline est identique à l'image d'une personne qui descend à marche arrière d'une colline ; et toutefois, s'il s'agissait de mon image, elle ne serait nullement ambiguë : je saurais ce qu'elle représente." Pylyshyn (1984), p.41.

<sup>13</sup> Voir, par exemple, Ackermann-Valladao (1981).

<sup>14</sup> Il y en a, probablement, beaucoup d'autres qu'il serait utile de bien définir, pour une analyse plus fine des réflexions que les élèves font sur leur expérience.

<sup>15</sup> Nous discuterons de la possible *universalité*, ou au contraire de la *régionalité*, des paradigmes interprétatifs mis en évidence dans notre premier article (tous relatifs à l'analyse des représentations de *phénomènes continus*), au cours de notre prochain article, dans lequel nous analyserons les activités de modélisation de *phénomènes discrets*.

multiformes. On les retrouve, identiques, dans l'analyse du refroidissement des liquides, de la croissance en hauteur et en poids des élèves, du développement d'une population bactérienne, etc.

Par contre, les modèles que nous avons essayé de construire avec les élèves, comme suite réflexive de leurs activités expérimentales et de représentation, sont toujours des modèles *spécifiques* et *contextuels*. Leur naissance a été toujours liée à un problème concret. Cela n'empêche pas, naturellement, qu'il soit possible de les généraliser et de les transférer (par métaphore, par analogies structurales ou fonctionnelles) vers des domaines différents que celui dans lequel ils ont été développés.

b. Les paradigmes interprétatifs semblent essentiellement *qualitatifs* ; ils ne sont pas définis par des ensembles de constantes et de paramètres, dont les valeurs numériques définissent l'état du système étudié.

Par contre, les modèles que nous avons étudiés et développés contiennent toujours un *aspect quantitatif*, à travers la présence d'un certain nombre de constantes et de paramètres (la population initiale et ses taux de naissance et de mortalité, les températures initiale et ambiante et la constante thermique d'un liquide, le nombre initiale de personnes infectées et le taux d'infection, etc.), dont les valeurs numériques définissent de manière univoque l'état du système<sup>16</sup>.

Les considérations qui précèdent sont encore assez abstraites. Nous allons maintenant les étoffer par la présentation d'un certain nombre de *récits d'expériences et d'analyses*, réalisées dans des classes du secondaire inférieur de Genève. Nous commençons, dans le point V. ci-dessous, avec l'analyse d'activités de modélisation de phénomènes qui changent en fonction d'un *paramètre d'évolution continu* (qui est en général, mais non nécessairement, le *temps*).

## V. La modélisation dans le continu

"Bien qu'un modèle mathématique ne possède pas, en général, de valeur prédictive à moyen ou à long terme, il n'en demeure pas moins que cet outil peut faire mieux comprendre les données observées et permettre d'identifier les caractéristiques de l'évolution d'une population pour ainsi aider à prévoir les effets de mesures pouvant en modifier le cours"<sup>17</sup>.

---

<sup>16</sup> De la présence de ces constantes et de ces paramètres découle la possibilité de généraliser et de transférer un modèle étudié d'un domaine à l'autre et d'en étudier aussi les limites. L'"immersion dans le monde des possible" dont nous avons déjà parlé a lieu quand le domaine de définition des constantes et des paramètres est élargi ; en particulier, quand une constante devient paramètre. Prenons, par exemple, le cas du refroidissement des liquides : dans ce modèle,  $k$  est une constante, si ce que l'on étudie est le refroidissement d'une seule masse d'un seul type d'huile - les paramètres étant dans ce cas les températures initiales et finales - alors qu'elle devient, elle aussi, un paramètre si l'on étudie tout un spectre de masses différentes, et/ou de types différents d'huile.

<sup>17</sup> Gauvin et al (1987), p.6.

Les phénomènes que nous avons analysés avec les élèves pourraient tous être considérés, au premier abord, comme du type "flux". C'est-à-dire, comme l'*écoulement dans le temps* d'une certaine variable  $V$  qui peut changer de façon continue. Une réflexion en classe sur de tels changements peut susciter des exemples pertinents : la quantité d'eau qui coule d'un robinet augmente en fonction du temps pendant lequel le robinet est ouvert, etc. Et des exemples où le paramètre d'évolution n'est pas le temps : le coût du sucre que nous achetons au supermarché augmente en fonction du nombre de kilos désirés, etc.

Le tout premier modèle empirique pour ce type de processus est celui de la *proportionnalité* entre la variable et le temps<sup>18</sup> :  $V(t) = k * t$  ( $k$  constante), ce qui implique que le *changement de la variable par unité de temps* (l'*incrément* de la variable  $V$ , ou  $DV$ ) est constant :  $DV = k$ <sup>19</sup>. Des données construites sur la base de ces "expériences mentales" amènent à des diagrammes où la dépendance de la variable en fonction du temps est représentée par un segment de droite<sup>20</sup>.

Il y a des exemples plus sophistiqués : l'argent que nous gagnons, dans une année, pour avoir confié de l'argent à la banque augmente en fonction du capital en dépôt. On est ainsi emmené vers des modèles empiriques où  $DV$  est proportionnel à la variable elle-même :  $DV = k * V$  ( $k$  constante).

Déjà dans l'extrapolation de ces modèles des doutes naissent<sup>21</sup>. Est-il possible que, en achetant 1000 kilos de sucre, on paye le même prix par kilo qu'en achetant un kilo ? Et une réflexion sur l'argent laissé à la banque peut faire passer du modèle de proportionnalité (intérêts simples, où on retire de la banque  $DV$  chaque année) à un modèle plus complexe (intérêts composés, où on ajoute  $DV$  au capital chaque année). C'est le cas, typique, de l'"explosion démographique" (dans un modèle de croissance) et de la "transformation radioactive" (dans un modèle de décroissance).

Nous verrons, dans ce qui suit, que les deux modèles empiriques esquissés ci-dessus dominent toute description et toute compréhension initiale d'un phénomène de changement dans le continu. On s'attendrait que le premier modèle, le plus simple ( $DV = k$ ), soit le plus facilement proposé et exploré ; mais nous avons noté qu'il y a, de la part des élèves, une certaine facilité à proposer (ou, au moins, à accepter) le deuxième modèle et à le relier à des mécanismes causaux<sup>22</sup>.

<sup>18</sup> Pour simplifier, on appellera dorénavant *temps* tout paramètre d'évolution pertinent.

<sup>19</sup> Il s'agit ici d'une dépendance fonctionnelle *linéaire et homogène*.

<sup>20</sup> Des expériences très simples (par exemple, en étudiant l'élongation d'un élastique en fonction de sa longueur et/ou du poids appliqué à un extrême) peuvent introduire la notion de dépendance fonctionnelle par rapport à une variable qui n'est pas le temps.

<sup>21</sup> Voir, par exemple, Luis (9ème) : "... ne sont pas toujours proportionnelles (consommation d'essence et distance parcourue) - par exemple - s'il y a beaucoup de gens dans la voiture...".

<sup>22</sup> Il est intéressant de noter qu'il s'agit-là exactement de la "loi de Weber" (E.H. Weber, 1795-1878, psychologue et physiologiste allemand) qui, dans un domaine d'intensité de stimulus limité, se présente de façon presque universelle dans la recherche en psychologie expérimentale (cas de discrimination tactile, thermique, auditive et visuelle) : si l'on définit comme  $dtjo$  la "différence tout juste observable" dans l'intensité  $S$  d'un stimulus, on a, pour valeurs modérées de  $S$  :  $dtjo = DS = k *$

## V.1. Modèles globaux et modèles locaux modèles qualitatifs et modèles quantitatifs

Avant de passer aux activités en classe (point V.4 ci-dessous), nous donnons un bref cadre interprétatif (ou *modèle* !) de nos protocoles d'expérience et de notre grille d'analyse.

Une fois réalisée une représentation graphique des données, et après la réflexion sur les diagrammes décrite au point II.3 du premier article, on voit naître de tous premiers *jugements* sur le phénomène étudié. Au premier abord, il s'agit de ce que nous nommons un *modèle global qualitatif*, c'est-à-dire, une *description raisonnée d'un aspect global, saillant et généralisable* de la dynamique du phénomène : "ça monte tout le temps", "ça descend tout le temps", "ça monte jusqu'à un point et ça devient plat", etc. On peut alors noter des premières tentatives d'explication causale ; voici un extrait de protocole d'élève :

Brigitte (7ème ; refroidissement de l'eau avec un revêtement cutané) : "plus le revêtement garde la température - moins la température diminue"

L'analyse et la description deviennent, assez rapidement, plus fines ; les élèves commencent à se rendre compte (si nécessaire, avec l'aide prudente de l'enseignant) que cet aspect global est, en réalité, *structuré*. Cela implique que la description de la dynamique peut changer d'une région à l'autre et que l'on peut confronter les différentes régions du diagramme. Cette constatation amène à ce que nous nommons un *modèle local qualitatif*, c'est-à-dire, à une description raisonnée de la *différence* qu'il y a entre la dynamique du phénomène dans des régions différentes<sup>23</sup>.

Dans la construction de ces modèles, certains aspects semblent dominer. A juger cas par cas : quel est le rôle joué par l'anticipation de *points d'équilibre* (attracteurs statiques), tels que la température ambiante, la taille des adultes ou d'une plante complètement développée, la densité maximale d'une population qu'un certain territoire peut accepter, etc. ? Et celui joué par l'anticipation de *dynamiques d'équilibre* (attracteurs dynamiques), telles que les oscillations entre prédateurs et proies, entre lapins et herbe, etc. ?

C'est à ce moment que l'introduction d'une analyse plus directement liée à la mathématique scolaire suggère et permet le passage de cette première phase de *modélisation qualitative* à une deuxième phase, celle de la *modélisation quantitative*.

S (k constante). En d'autres mots : "Le changement demandé pour observer une différence à peine observable dans l'intensité du stimulus est proportionnelle à l'intensité du stimulus"

<sup>23</sup> Le diagramme est souvent partagé mentalement, pendant l'analyse, dans un nombre très restreint de régions (par exemple, trois : le début, la partie intermédiaire, la fin de l'observation ou la partie asymptotique). On devrait donc parler de *modèles régionaux*, et non *locaux*. Si nous utilisons ce terme, c'est parce que, en allant vers des incréments toujours plus petits, ces modèles vont évoluer vers les classiques modèles locaux du calcul différentiel.



## V.2. Les activités de modélisation locale quantitative

Il s'agit donc maintenant de *traduire* le modèle local dans un formalisme adéquat (*formalisation du problème*), en isolant et en nommant les variables, les constantes éventuelles et le paramètre d'évolution qui entrent dans le modèle<sup>24</sup> ; et il s'agit ensuite de *représenter formellement* en utilisant les notations algébriques familières aux élèves.

*Ces deux activités forcent le passage du qualitatif au quantitatif dans l'analyse des données et permettent une intégration non artificielle de la mathématique dans l'éducation scientifique*<sup>25</sup>. Nous avons parlé ci-dessus de la difficulté à déceler des "règles" dans la dynamique des phénomènes observés, et du manque d'aide dans leur pratique scolaire. Nous avons aussi noté la difficulté des élèves à accepter qu'il y a des règles à chercher, un ordre à donner à l'expérience. La construction d'un tout premier *modèle local quantitatif* pour décrire un diagramme ou un ensemble de données donne par contre un exemple efficace de telles règles et de la façon de les construire<sup>26</sup>.

## V.3. L'intégration numérique d'un modèle local quantitatif vers un modèle global quantitatif, en programmant un algorithme et en utilisant un ordinateur

Nous aimerons commencer ce paragraphe par une citation qui résume très clairement notre position sur l'intérêt d'une *intégration intelligente de l'informatique à la pratique pédagogique* (voir, pour beaucoup plus de détails, Vitale, 1990-1995, 1992, 1995).

"Avec un tel programme (la simulation d'une situation de trafic routier), nos lycéens ne s'attendaient à rien d'extraordinaire ; mais en le faisant tourner, ils ont obtenu un embouteillage très réaliste. ... C'est parce qu'ils avaient écrit eux-mêmes le petit programme qui le créait, que nos lycéens se sont rendu compte que l'embouteillage s'auto-organisait. S'ils avaient utilisé une simulation toute faite, ils n'auraient disposé d'aucun moyen pour apprécier l'élégante simplicité du programme sous-jacent"<sup>27</sup>.

L'utilisation de l'ordinateur dans l'intégration numérique des modèles locaux quantitatifs définis ci-dessus nous semble essentielle. Il est évident que les élèves du Cycle considéré n'ont pas accès à des instruments tels que l'intégration de l'équation

<sup>24</sup> Voir, sur l'approche de détermination et définition d'un système et des variables et paramètres qui en permettent la formalisation, Arcà et al (1987) et Janvier et al (1991).

<sup>25</sup> Sur ce deuxième point, nous renvoyons les enseignants intéressés à la série de livres sur la modélisation dans l'enseignement de la mathématique "dans un contexte réel", livres issus chacun d'un congrès (ICTMA : International conferences on the teaching of mathematics through applications) : en particulier, voir Blum et al (1989) et de Lange et al (1993) ; voir aussi Blum et al (1991).

<sup>26</sup> Il y a un problème qui reste ouvert : comment choisir l'intervalle temporel  $\Delta t$ , à partir duquel construire le modèle local en partant de la définition de DV ? La dynamique d'un système discret (c'est-à-dire, avec un  $\Delta t$  non infinitésimal) peut bien être *qualitativement différente* de celui du modèle différentiel correspondant ; par exemple, des orbites fermées dans le cas différentiel ne le seront pas dans le cas discret. Faut-il expérimenter avec des  $\Delta t$  différents ? Faut-il rendre les élèves attentifs aux changements qualitatifs de dynamiques liés à des changements dans le choix de  $\Delta t$  ?

<sup>27</sup> Papert (1994), p.196.

différentielle<sup>28</sup> qui décrit, dans le calcul infinitésimal, un modèle local. Devraient-ils alors renoncer à continuer leur investigation, à poursuivre l'exploration des conséquences *globales* de leurs hypothèses *locales et quantitatives* ?

Les tout premiers pas de cette intégration peuvent être réalisés mentalement, ou avec papier-crayon, dans un tableau ou graphiquement, pas par pas (Dt par Dt). Il est certainement intéressant que des résultats qualitatifs très simples peuvent être obtenus déjà par ces moyens élémentaires, et on ne devrait pas s'en priver. Par exemple, on voit rapidement qu'un modèle local du type  $DV = k * V$  ( $k$  constante) porte nécessairement à une croissance toujours plus rapide ("accélérée", disent souvent les élèves) de la variable  $V$  ; mais comment estimer le rôle de  $k$  ? comment en déterminer avec une certaine précision la valeur numérique ?<sup>29</sup>

A la fin d'un cycle complet d'expérimentation et d'analyse, où nous sommes partis de la description raisonnée d'un diagramme et de la proposition d'un modèle global *qualitatif*, nous voici donc revenus à un modèle global du phénomène étudié mais, cette fois, à un modèle *quantitatif*, dépendant de la valeur numérique d'une ou de plusieurs paramètres. Nous allons maintenant décrire, cas par cas, ces cycles d'expérimentation et d'analyse, de passage global-local-global, pour en mettre en évidence les composantes communes et les caractéristiques spécifiques.

#### V.4. Les activités en classe

Nous décrirons ici certaines seulement des expériences qui ont été réalisées dans des classes de 7ème et de 9ème. Il y a eu d'autres expériences utiles, mais qui n'ont apporté rien de nouveau à l'analyse ; il y a eu également plusieurs tentatives d'expériences qui se sont révélées peu utiles, ou même non réalisables dans le contexte scolaire ; et d'autres qui ont donné des résultats difficilement reproductibles.

Il y a, évidemment, un large spectre d'expériences possibles et souhaitables pour affronter le problème de la modélisation. Nous ne voudrions pas que celles qui seront décrites en détail dans ce qui suit soient considérées comme *exemplaires et nécessaires* dans un curriculum sur la modélisation. Elles ne constituent que des exemples de ce qui est possible et de ce qui a, plus ou moins, *réussi*. C'est aux enseignants d'en inventer et d'en essayer de nouvelles et de créer les conditions nécessaires pour qu'elles soient utiles.

*L'ordre dans lequel nous allons présenter, dans ce qui suit, certaines des expériences les plus significatives de notre projet ne se veut pas non plus une suggestion aux enseignants.* Chaque enseignant doit trouver dans sa pratique, en prenant en compte le contexte spécifique de sa classe, du cours dans lequel les activités de modélisation auront lieu, des aspects du curriculum qu'il faudra nécessairement traiter, etc., le type d'expérience avec laquelle initier ces activités et l'ordre dans lequel d'autres expériences peuvent suivre.

---

<sup>28</sup> Ou le système d'équations différentielles, comme c'est le cas pour les projets liés à la pensée écologique.

<sup>29</sup> Tous les élèves de 7ème du Cycle d'orientation du canton de Genève suivent un cours obligatoire d'"initiation à l'informatique", qui - entre autres - leur donne une première familiarité avec la programmation en LOGOwriter.

### V.4.1. La croissance en taille et en poids des élèves

Les écoles genevoises gardent trace des mesures de taille et de poids des élèves ; souvent, ces "séries historiques" peuvent être complétées (vers le bas) par des mesures gardées par les parents. On peut ainsi demander aux élèves de préparer des tableaux avec leurs données personnelles, et ensuite de les transformer (avec papier-crayon, ou en programmant la saisie des données sur l'ordinateur) en diagrammes, *en évitant de rejoindre les points par une ligne continue*.

Nous avons déjà présenté, dans le premier article, les activités de *représentation* associées à ce projet. Le passage à une possible *modélisation* du processus de croissance n'est pas facile. La phase de *modélisation globale qualitative* est dominée par la présence d'un *attracteur* : l'âge adulte. L'extrapolation des données par une (presque) droite donnerait des taille et des poids insensés pour des adultes ; il *faut* donc qu'un processus (modèle local) freine à un certain moment la croissance ; mais lequel ? Voici un extrait de protocole d'élève :

Claude (7ème) : 'mais dans la vie - qu'est ce qui se passe avec les gens quand ils sont adultes ?' - "ils poussent - après ils arrêtent et puis il rapetissent quand ils sont vieux" - 'quand ils poussent et puis ils arrêtent - est-ce que c'est comme une voiture...' - "non - parce que vers 12 ans à 20 ans ils poussent vite puis après ça continue mais moins fréquemment - moins..." - 'moins rapidement' - "oui - moins rapidement - et vers 30 ans on arrête mais pas d'un coup sec - on a toujours la même taille jusqu'à 60-70 ans et puis là on rapetisse mais doucement"

Nous ne croyons pas que cette difficulté à proposer un modèle doit faire abandonner l'exploration de ces processus ; au contraire, pour ne pas créer l'attente - toute scolaire ! - que tous les problèmes proposés à l'école ont une solution, il nous semble important que certains processus observables indiquent aux élèves que la *complexité des phénomènes peut éventuellement permettre de formaliser un problème, mais non nécessairement de le mathématiser* (c'est-à-dire, de donner un algorithme explicite)<sup>30</sup>.

Ce projet présente l'intérêt - à part son utilisation pour des activités de représentation - de faire entrer, de façon qualitative, la problématique de la modélisation dans la classe en utilisant un phénomène qui intéresse de façon surprenante les élèves. Il ne s'agit pas encore de *construire* un modèle, mais de poser pour la première fois le problème : "est-il possible d'un construire un ? si oui, lequel ? si non, pourquoi ?" Il permet aussi d'introduire un nouveau projet, celui de l'étude de la *croissance différentielle*, sur lequel nous reviendrons au point V.4.4. ci-dessous.

---

<sup>30</sup> Voir, par exemple, le très beau projet décrit dans Horn (1993), sur la distribution du nombre de plantes différentes en fonction de la surface explorée ; le diagramme est très régulier, mais il ne semble pas possible de proposer un mécanisme, un algorithme pour le processus qui règle la distribution. Voir aussi la passionnante expérimentation / modélisation de l'exploitation des ressources chez les fourmis, dans Deneubourg et al (1988).

### V.4.2. L'épidémie de SIDA

Voici un autre thème qui intéresse beaucoup les élèves et à partir duquel on peut introduire de façon simple et efficace la problématique de la formalisation. Dans ce cas, avec un certain succès.

Les élèves demandent aux organes sanitaires compétents les données statistiques sur le nombre de "cas déclarés de SIDA" (S) et de "décès dus aux SIDA" (D) dans la population suisse (P) à partir du 1983. Ces données sont mises au jour tous les mois et permettent de connaître le nombre de "malades de SIDA" ( $M = S - D$ ) et leur incréments mensuels, DM. Les élèves en préparent des tableaux que, ensuite, ils transforment en diagrammes (figure 8.a).

Le modèle global qualitatif pour l'évolution de M est assez évident : la courbe monte toujours plus raide, au moins jusqu'aux années les plus récentes ; l'épidémie est "explosive". Peut-on imaginer un *mécanisme* social, humain qui explique ce comportement ? Peut-on transformer ce mécanisme hypothétique en *algorithme* ? Peut-on *vérifier cette hypothèse*, en intégrant le modèle local ? Quels, et combien, seront les paramètres en jeu et quelle sera leur signification ? Et ensuite, si les données *actuelles* sont bien décrites par le modèle par un choix adéquat des valeurs numériques des paramètres, qu'est-ce que l'on peut *prévoir* sur le comportement futur de l'épidémie ?

#### V.4.2.1. Le modèle local quantitatif

Autant de questions auxquelles on peut assez facilement répondre. Un premier modèle local quantitatif très élémentaire naît sans trop de difficulté d'une discussion en classe : à chaque mois, le nombre de personnes nouvellement malades, DM, pourrait être *proportionnel* au nombre de malades, M. C'est-à-dire,  $DM = k * M$  ( $k$  constante  $> 0$ )<sup>31</sup>. La dynamique de l'épidémie est donc du type "explosive" et dépend d'une seule constante (le nombre de malade à  $t = 0$  :  $M^0$ ) et d'un seul paramètre ( $k$ ).

#### V.4.2.2. L'intégration numérique du modèle local

En figure 8.b, les résultats de l'intégration de ce modèle local avec  $Dt = 0.01$ ,  $M^0 = 17$  et  $k = 0.055$  ( $t = 0$  correspond à 1983).

---

<sup>31</sup> Nous n'affirmons pas ici que la notion *explicite* (algébrique) de proportionnalité soit claire aux élèves. Au contraire, le passage à la formulation algébrique pose souvent beaucoup de problèmes, alors que la formulation purement verbale, discursive de la dépendance fonctionnelle prévue peut naître sans grandes difficultés.

SIDA : □ MALADES EN SUISSE

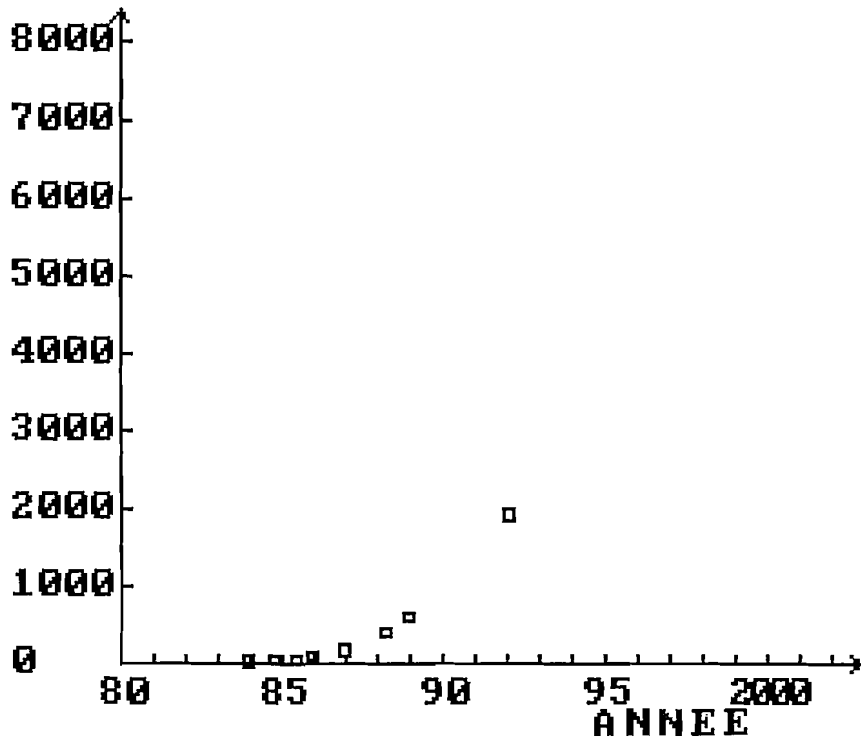


figure 8.a

SIDA : □ MALADES EN SUISSE

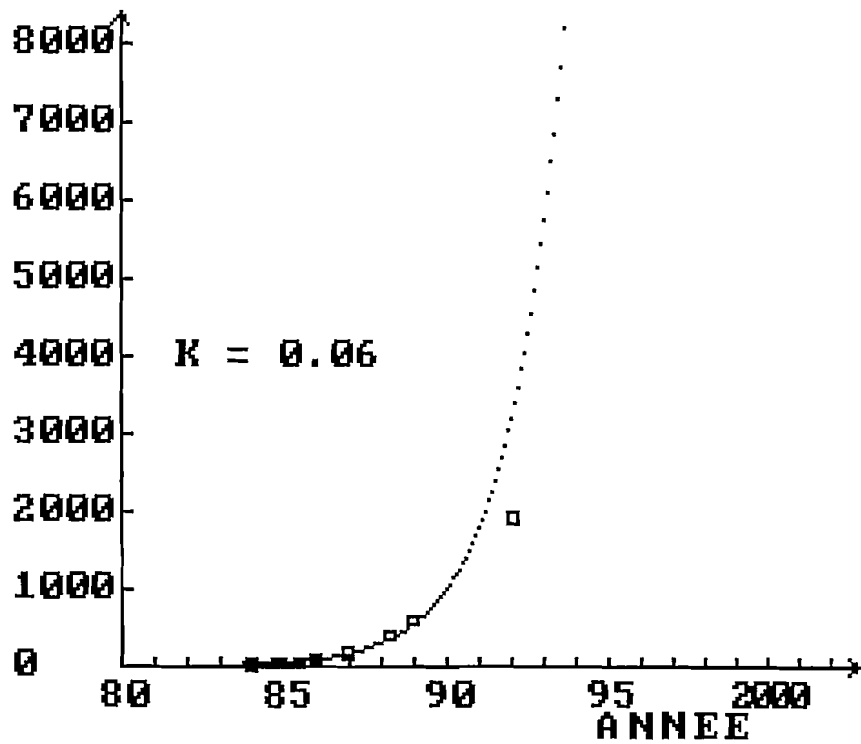


figure 8.b

Il est clair que le modèle est excessivement simplifié et que la croissance "explosive" prévue n'a pas lieu, au moins en Suisse. Mais la plupart des simplifications faites peuvent être discutées avec les élèves et porter éventuellement à un enrichissement du modèle ; par exemple, ne serait-il pas plus raisonnable d'écrire :

$$DM = k * M * (P - M)$$

(c'est-à-dire, que les personnes malades ne peuvent plus être infectées) ?<sup>32</sup>. Cela amènerait vers des *modèles non-linéaires*.

(Ici, une petite note sur un fait important sur lequel on devrait s'arrêter davantage : les formules, ainsi que les données expérimentales, sont des *objets de connaissance*. Pourquoi a-t-on une telle réticence, dans la pratique scolaire, à insister sur ce point ? La formule  $DM = k * M * (P - M)$ , par exemple, n'est pas seulement un modèle local d'un phénomène social important ; elle est également un petit laboratoire de réflexion formelle. Le nombre de nouveaux malades augmente avec M, c'est vrai ; mais seulement au début, quand M est beaucoup plus petit que P. Et ensuite ? Quand M devient de l'ordre de P,  $(P - M)$  tend à 0, tout comme DM. Quand toute la population est malade, il n'y a plus de nouveaux malades...)

### V.4.3. Le refroidissement des liquides

Nous avons décrit cette expérience dans l'annexe 2 du premier article. Les élèves ont construit des diagrammes semblables à celui donné en figure 9.a, et cela pour des températures initiales différentes et pour des liquides différents (dans notre cas, eau et huile). Il s'agit maintenant de réfléchir sur ces diagrammes, pour les décrire dans un possible modèle global qualitatif commun et, ensuite, pour construire et intégrer un modèle local adéquat.

Le modèle global est assez rapidement ébauché : indépendamment de la température initiale et du liquide choisi, la température baisse toujours avec le temps ; elle ne remonte jamais, elle ne fait jamais de vagues. A ce niveau d'analyse, il est difficile d'en dire davantage ; il est pratiquement impossible de confronter le comportement de liquides différents. En poussant l'analyse plus loin, en la dirigeant vers une éventuelle structure du comportement observé, on peut arriver à un premier modèle local qualitatif : la température baisse plus rapidement au début, moins dans la partie intermédiaire, presque pas vers la fin de l'expérience<sup>33</sup>. Comment formaliser, comment mathématiser cette observation ?

---

<sup>32</sup> Il y a évidemment confusion, dans la construction du modèle, entre personnes séropositives et personnes malades ; mais les données statistiques sur les personnes séropositives manquent. Des modèles bien plus complets pour l'épidémiologie du SIDA ont été mis au point par des chercheurs ; ces modèles prennent en compte les effets présumés des mesures prophylactiques et le "phénomène social de clustering" qui rend non homogènes les échanges dans une population. Voir en particulier Chin et al (1990) ; Colgate et al (1989).

<sup>33</sup> Les expressions utilisées par les élèves, qui ne discriminent pas encore entre chaleur et température, sont plutôt du type : "ça perd plus de chaleur au début... ; ça perd presque pas de chaleur à la fin...". L'enseignant évite soigneusement de se lancer, et de lancer ici ses élèves, dans un débat sur chaleur vs température.

### V.4.3.1. Le modèle local quantitatif

Pourrait-on appliquer au refroidissement des liquides un modèle local quantitatif analogue à celui déjà évoqué dans le cas du SIDA ? C'est-à-dire, peut on faire l'hypothèse que  $DT = k * T$  ( $k$  constante  $< 0$ ) ?

Ce modèle satisfait le comportement observé :  $DT$  est plus grand (en valeur absolue) à hautes températures, moins grand à basses températures. Si la conséquence formelle du modèle - c'est-à-dire, le fait qu'il prévoit une température asymptotique égale à 0, alors que l'expérience semble indiquer une valeur constante et positive - n'est pas évidente pour les élèves, pourquoi ne pas passer à l'ordinateur et le programmer ?

Le fait que l'on devrait arriver à une température asymptotique - et que le modèle devrait en rendre compte - est assez évident pour certains élèves, mais les données ne sont pas suffisamment contraignantes à ce sujet<sup>34</sup>. L'*attracteur* "température ambiante" est souvent cité comme cible nécessaire de la baisse de température ; mais il s'agit là, probablement, d'un artefact scolaire<sup>35</sup>. Voici un extrait de protocole d'élèves :

Frédérique - Odile (7ème) : O. (montre du doigt le diagramme ; il y a le trou de la pause) "celle-là (la partie avant la pause) - ça va - elle est encore assez droite - mais celle-là (la partie après la pause) ..." - F. "mais là (partie finale) c'est parce que ça se rétablit vers la température ambiante" - 'ça (partie initiale) pourrait donner une droite tout le temps - tout le temps ?' - F. "non - justement - après un moment elle s'arrête (geste du bras décrivant un arrondi) - par exemple quand vous avez la température ambiante"

Il faudra pas mal de doigté à l'enseignant pour faire naître dans la discussion de classe, ou pour suggérer prudemment, qu'un modèle local plus adéquat pourrait bien être le suivant :

$$DT = k * (T - T^a) \quad (k \text{ constante } < 0)$$

qui également décrit le comportement déjà cité mais qui, en plus, nous permet de prévoir que la température  $T$  va s'approcher asymptotiquement à la température  $T^a$ . Ce modèle est très raisonnable, mais il présente quelque problème sémantique, que nous reprendrons dans le troisième article : si  $T^a$  est *seulement* une "température asymptotique expérimentale" (sans aucune relation, à ce point de l'analyse, avec la "température ambiante") comment se fait-il que le liquide la *connaît* dès le début du refroidissement ? et si au contraire  $T^a$  est la température ambiante, que le liquide peut *connaître* (ou *sentir*) à tout moment à travers les parois du récipient, pourquoi elle

34 En effet, au moment d'abandonner le laboratoire après presque deux heures de travail, la température du liquide est encore assez lointaine de celle ambiante ; il faudrait qu'un groupe d'élèves retourne au laboratoire quelques heures plus tard pour constater que la température est devenue constante.

35 Voici comment cette attente a été exprimée par un élève de 11ème de Pampelune : 'y pararse - pararse - cuando se para ?' - "pues - cuando ya llegue a la temperatura a que estf anterior - o a la temperatura ambiente". Le doute, c'est dans l'interprétation de ce "o" ; s'agit-il d'un "o" exclusif ("ou la température antérieure du liquide ou celle ambiante", en imaginant qu'elles étaient différentes), ou d'un "o" qui précise seulement ce que l'élève veut dire ("la température antérieure du liquide, c'est-à-dire, la température ambiante") ?

domine la dynamique du refroidissement ? A ce niveau de réflexion, aucune réponse ne peut être donnée à ces questions, qui resteront - très utilement - ouvertes pour une discussion future en physique<sup>36</sup>.

#### V.4.3.2. L'intégration numérique du modèle local

L'intégration du modèle local donne un très bon accord avec l'expérience (figure 9.b). On constate que la même valeur numérique de  $k$  permet de décrire correctement le refroidissement d'un liquide donné, *chauffé à des températures initiales différentes* ; et que, *pour des liquides différents*, on peut toujours trouver une valeur de  $k$  qui décrit correctement les données expérimentales. De plus, on peut explorer maintenant le *réchauffement spontané d'un liquide* (une situation, c'est-à-dire, dans laquelle  $T^0 < T^a$ ) pour voir que le même modèle, et avec le même  $k$ , marche encore très bien. Voici un exemple d'utilisation très riche d'un modèle local : on découvre qu'il *peut être généralisé* et qu'il *permet des prévisions*.

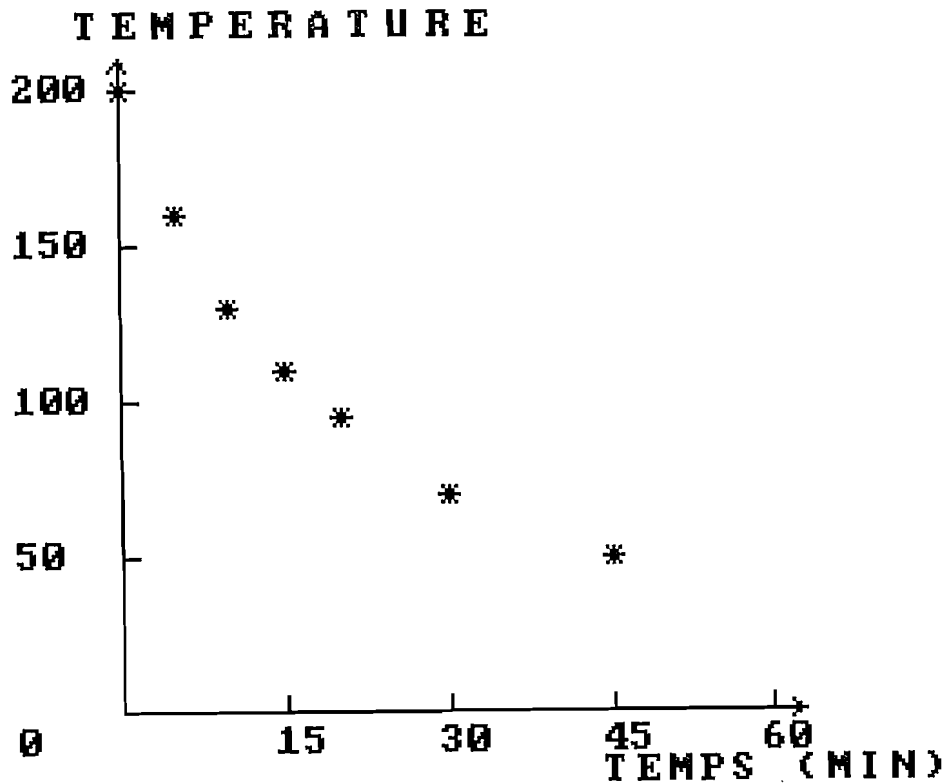


figure 9.a

<sup>36</sup> On pourrait reprendre ici la discussion sur des possibles modèles pour la croissance des élèves (point V.4.1.). Un modèle local identique à celui proposé ici pour le refroidissement des liquides (mais avec  $k$  constante  $> 0$ ) pourrait décrire assez bien les données expérimentales, en donnant à  $T$  la signification de "taille" et à  $T^a$  celle de "taille d'un adulte". Mais comment l'organisme pourrait-il connaître pendant son développement sa taille adulte finale ?



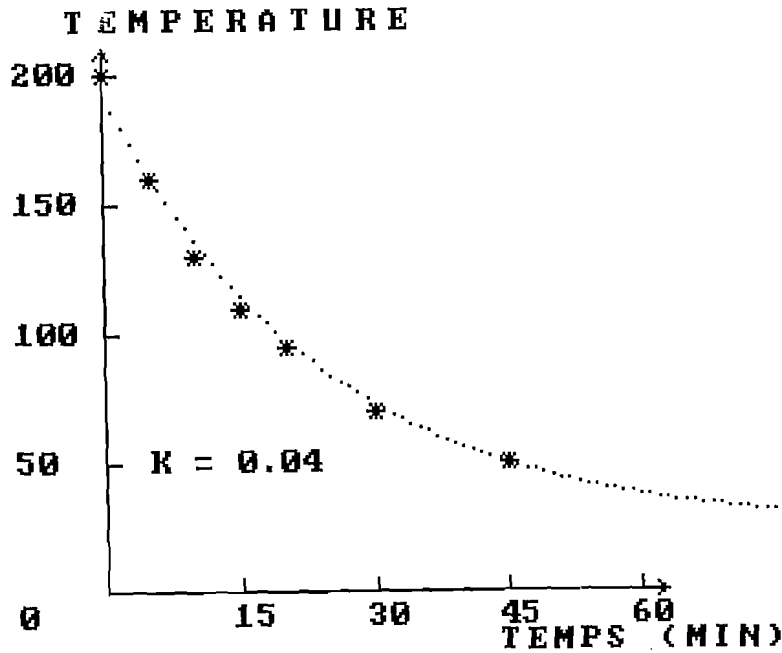


figure 9.b

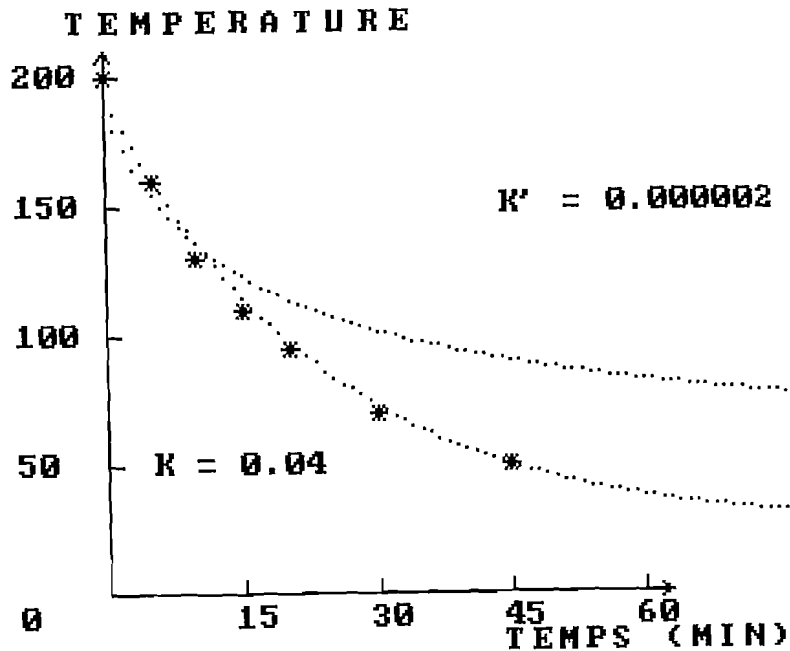


figure 9.c

(Ici, une petite note sur le fait qu'alors qu'un modèle avec  $(T - T^a)^2$  ne donnerait pas un bon modèle - parce qu'il prévoit que la température baisse toujours, même quand  $T^o < T^a$  - un modèle avec  $(T - T^a)^3$  ne présente par contre pas cette difficulté. Il pourrait être intéressant de discuter et d'intégrer ce modèle aussi, parallèlement à l'autre, et de voir qu'il donne des chutes initiales de température trop rapides pour bien

décrire les données expérimentales, figure 9.c. Nous l'avons fait une seule fois, dans une 8ème, et nous n'avons pas assez d'expérience sur ce point pour affirmer que les élèves pourraient suivre utilement cet enrichissement de l'activité de modélisation.)

#### V.4.4. La croissance de la hampe florale de l'amaryllis

Nous avons décrit cette expérience dans l'annexe 3 du premier article. C'est une expérience qui a débuté comme une mesure de la *croissance globale* de la hampe florale de l'amaryllis (en général, de la première hampe qui pousse avant l'émergence des feuilles) et qui s'est ensuite ouverte vers l'étude de sa *croissance différentielle* (c'est-à-dire, de la différence entre les taux de croissance de parties différentes de la hampe à des âges différents)<sup>37</sup>. C'est cet aspect qui nous a permis ensuite de relier cette activité à celle de la détermination de la croissance différentielle des élèves, dont nous parlerons brièvement ci-dessous.

Les premières discussions en classe ont mis en évidence les attentes des élèves sur des phénomènes de croissance chez les plantes<sup>38</sup>. Pour exemplifier les différentes hypothèses exprimées, voici des extraits de protocoles d'élèves<sup>39</sup> :

'si on met un trait ici (l'expérimentateur dessine schématiquement une hampe florale et met un trait vers le milieu) - et on revient plus tard quand la plante a poussé - le trait il serait où ?'

##### a. croissance par une seule extrémité de la hampe

a.1. par le haut : Sébastien (7ème) : "il serait toujours au même endroit (dessine le trait en bas)" - 'tu peux me dire pourquoi ?' - "parce que c'est à partir de ça (la partie haute de la tige) que ça grandit - la partie qui est en bas elle reste en bas - elle va pas monter" - 'et si on revient plus tard - quand la plante est arrivée à maturité - le trait il serait toujours en bas ?' - "oui"

a.2. par le bas : Ana (7ème) : 'quand tu regardes ça - il y a cette partie au dessus du trait et la partie au dessous du trait - est-ce que tu penses que les deux parties poussent différemment ?' - "je pense qu'elles poussent différemment" - 'tu peux m'expliquer pourquoi ?' - "la tige elle pousse d'ici (montre le bas du pot) - depuis la racine et puis la fleur elle se développe"

##### b. croissance homogène le long de la hampe :

Juan (7ème) : "un peu plus haut - un peu au milieu" - 'pourquoi elle (la ligne) serait là ?' - "parce que le reste de la tige ça a aussi poussé" - 'les parties au dessus et au dessous - elles poussent de la même manière ?' - "à peu près oui"

L'amaryllis représente un "système biologique" idéal pour l'étude de la croissance : la hampe est parfaitement verticale, sort de terre avant la naissance des feuilles, gagne sa hauteur maximale tout juste avant la floraison. Par contre, l'observation

<sup>37</sup> En parlant de la hampe florale, nous utiliserons le terme "grandeur" pour indiquer la longueur de la seule hampe florale, sans le bouton floral qu'elle porte à sa sommité ; et cela, parce qu'on a noté que la dimension du bouton reste pratiquement constante tout le long de la période de croissance.

<sup>38</sup> Pour des expériences semblables sur le développement végétal, voir aussi Tierney et al, 1992, 1992a et Gelman, 1993 ; pour une présentation assez complète des mécanismes de croissance chez les végétaux, voir Roland et al, 1992.

<sup>39</sup> Il y a naturellement des élèves qui hésitent entre des hypothèses différentes.

expérimentale en classe de la croissance n'est pas facile. D'une part, la période qui va de la mise en terre de l'oignon jusqu'à la floraison est assez longue (20 à 30 jours), ce qui demande une certaine continuité d'intérêt et d'activité pratique pour les élèves<sup>40</sup> ; d'autre part, chaque classe doit élaborer une bonne méthode de *marquage sur la hampe* (technique de marquage, intervalle temporel entre deux marques) et de *mesure des positions des marques* à partir du niveau de la terre dans le pot. Il y a une difficulté additionnelle : à moins que le problème éventuel de la croissance différentielle ne soit abordé par l'enseignant déjà au début de l'expérience et puisse ainsi influencer le choix du type de marquage à effectuer régulièrement, les marques réalisées dans l'objectif d'une étude sur la croissance globale sont ensuite difficilement utilisables pour une étude de la croissance différentielle<sup>41</sup>.

C'est à partir des données expérimentales ainsi recueillies et des tableaux et diagrammes construits par les élèves - voir, par exemple, la figure 10.a - que se développe la discussion sur un possible modèle global qualitatif ("la hampe croît tout le temps", "la hampe ne devient jamais plus petite"<sup>42</sup>, etc.), pour passer aux aspects locaux de la croissance et enfin à la formulation de modèles locaux quantitatifs tant de la croissance globale que de celle différentielle.

#### V.4.4.1. Les modèles locaux quantitatifs pour la croissance globale

On peut poser ici la même question que l'on a posé à propos du refroidissement des liquides : pourrait-on appliquer à la croissance globale de la hampe un modèle local quantitatif analogue à celui déjà évoqué dans le cas du SIDA ? C'est-à-dire, peut on faire l'hypothèse que  $DH = k * H$  ( $k$  constante  $> 0$ ) ?

On pourrait proposer un *mécanisme* pour justifier ce modèle, ce qui n'est pas le cas pour la température : si les élèves ont déjà été introduits aux concepts de "cellule", "structure en cellule d'un organisme" et "division cellulaire", on peut bien imaginer que le phénomène de croissance de la hampe se traduit dans un phénomène de multiplication de ses cellules ; dont la proportionnalité entre  $DH$  et  $H$ . Mais on a déjà vu que ce modèle donne lieu à une croissance "explosive" (elle va "de plus en plus vite") ; ce n'est évidemment pas le cas de l'amaryllis. Comment le modifier ?

Il y a au moins deux voies, dont la première est la plus simple (du point de vue de l'algorithme) ; elle présente toutefois la *difficulté sémantique* déjà citée à propos du refroidissement des liquides (voir point V.4.3.1. ci-dessus) :

<sup>40</sup> L'expérience a été réalisée dans des 7èmes (cours d'observation scientifique) et dans des 9èmes (cours de biologie).

<sup>41</sup> Le choix des routines et des techniques de marquage est évidemment le point le plus délicat de cette expérience. Une fois que la plante a commencé son développement, on ne peut plus retourner en arrière et refaire des mesures dont on comprend seulement trop tard l'importance. Cette phase doit être donc très soigneusement programmée ; les raisons et les conséquences du choix doivent être clairement expliquées.

<sup>42</sup> Un élève a noté qu'elle ne peut pas "perdre de matière".

a. modèle à incrément linéaire non homogène

On évite la croissance explosive en introduisant *a priori* la grandeur finale de la hampe,  $H^f$ , dans le modèle :

$$DH = k * (H - H^f) \quad (k \text{ constante} < 0)$$

L'avantage est d'avoir un modèle linéaire, qui fait penser encore au modèle un peu naïf engendré par la multiplication des cellules, mais qui a comme conséquence le fait que DH devient de plus en plus petit (croissance de moins en moins rapide) au fur et à mesure que H s'approche de  $H^f$ , ce qui semble en accord avec les données expérimentales<sup>43</sup>. Le désavantage est dans la difficulté d'imaginer un mécanisme par lequel la hampe peut *connaître* - pendant tout son développement - celle qui va être sa grandeur finale !

b. modèle à incrément quadratique

On évitera également la croissance explosive en introduisant un terme *quadratique* dans le modèle :

$$DH = H * (k - j * H) \quad (k, j \text{ constantes} > 0)$$

Il est évident que  $DH = 0$  si  $H = H^f = k/j$  ; la croissance part assez rapidement quand H est petit, mais elle est de plus en plus freinée par le terme négatif  $j * H$ . A la fin, H se stabilise sur la hauteur asymptotique  $H^f$ <sup>44</sup>.

L'avantage est d'avoir un modèle exemplaire, utilisé depuis des décennies dans une multitude de contextes différents<sup>45</sup>. Le désavantage est dans la difficulté de motiver, de justifier la présence du terme quadratique. Dans certains cas (croissance d'une population, voir le point V.4.5. ci-dessous) il peut être lié à un phénomène de *gêne* parmi les membres d'une population ; mais ici, dans le cas de la croissance de la hampe florale d'une plante ?

Les deux modèles permettent des prévisions globales qualitatives qui semblent en accord avec l'expérience. Il s'agit maintenant de voir si l'intégration de ces deux modèles permet d'un choisir un comme le plus adéquat<sup>46</sup>.

<sup>43</sup> Encore une fois, nous aimerons insister sur l'avantage - pour une bonne intégration de l'apprentissage de l'algèbre à la pratique pédagogique - de discuter des aspects *formels* d'un tel modèle ; c'est-à-dire, qu'il permet de prévoir  $DH = 0$  si  $H = H^f$  (la croissance s'arrête quand la hampe a gagné son hauteur maximale).

<sup>44</sup> Un modèle plus complexe devrait tenir compte d'une éventuelle poussée bulbaire, qui ajouterait un terme constante à DH.

<sup>45</sup> Il s'agit du *modèle logistique*, utilisé intensément en particulier dans la modélisation des phénomènes écologiques. Voir, pour plus de détails, Vitale (1990-1995), cahiers 3 et 5.

<sup>46</sup> Un modèle plus réaliste, tant dans le cas à incrément linéaire que dans le cas à incrément quadratique, devrait tenir compte également d'une éventuelle *poussée* à partir de l'oignon, c'est-à-dire, d'une contribution constante à DH (voir ci-dessus). Nous avons exploré cette possibilité dans les deux cas, mais non dans un contexte de classe ; il vaudrait la peine de le faire, si l'on en a le temps, mais cette tentative ne semble pas apporter des modifications significatives à la description des résultats.

#### V.4.4.2. L'intégration numérique des modèles locaux pour la croissance globale

La figure 10.b donne les comportements globaux prévus par les deux modèles, avec le meilleur choix possible pour  $k$  et pour une valeur expérimentale donnée de  $H^f$  (avec  $j = k/H^f$  dans le deuxième modèle).

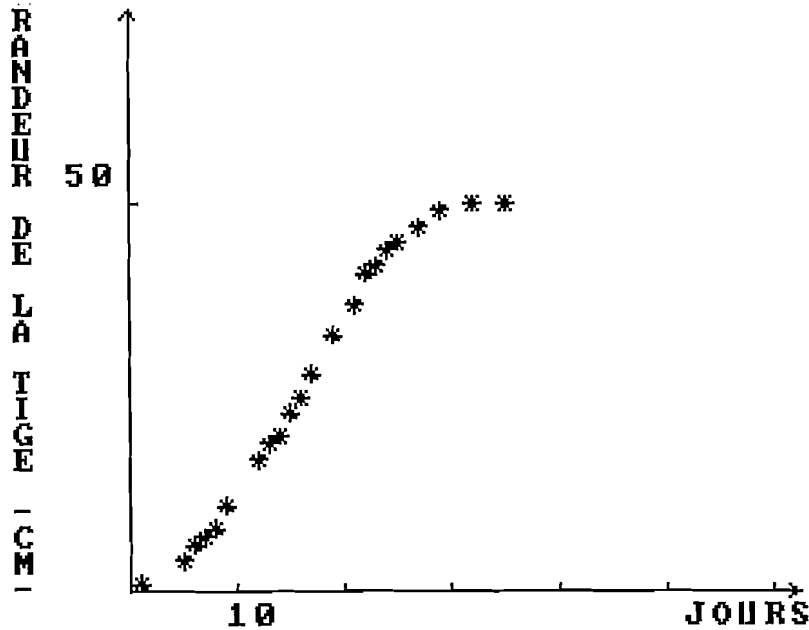


figure 10.a

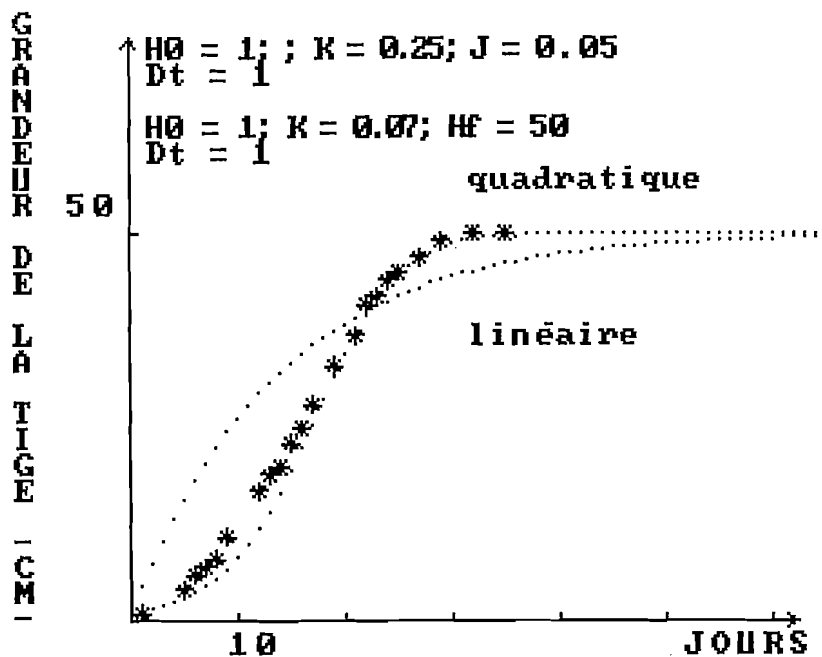


figure 10.b

On voit qu'il est assez facile de discriminer entre les deux modèles ; on peut affirmer que le deuxième donne un accord bien meilleur (courbe à S ou "sigmoïde") que le premier. Par conséquent, *le modèle quadratique (logistique) est nettement à*

*préférer*. L'étude de la croissance globale de la hampe permet ainsi d'insister sur un élément important de l'activité de modélisation : la présence assez fréquente d'une multiplicité de modèles locaux, tous également plausibles, et la possibilité de pouvoir souvent discriminer entre eux par intégration numérique (on avait déjà vu un cas semblable dans le cas du refroidissement des liquides, voir le point V.4.3.2. ci-dessus).

### V.4.4.3. La croissance différentielle et son modèle

Nous verrons maintenant que ce même modèle (quadratique) peut être utilisé pour la modélisation locale de la croissance *différentielle*. Mais il faut d'abord qu'une certaine curiosité naisse chez les élèves sur la manière dans laquelle la hampe se développe. On en a noté des germes chez les élèves ; voici un extrait de protocole :

Parnell (9ème) : "Il faut mesurer toute la plante (depuis la terre du pot) pour avoir la hauteur officielle - puis on peut regarder les traits quand même pour voir où ça grandit"

C'est ce "où", ou toute autre expression équivalente, qui permet à l'enseignant de proposer des routines de marquage et de mesure qui ne se limitent pas seulement à permettre de reconstruire, dans le temps, la croissance globale mais également la croissance (par *élongation*, par *dilatation*, par *étirement* ?) de certains segments privilégiés le long de la hampe. La croissance globale englobe trop de mécanismes différents (poussée bulbaire, élongation de la hampe déjà formée, éventuelle croissance apicale vers le bouton floral, etc.<sup>47</sup>) pour que son observation permette seule de répondre aux curiosités sur le *où* et le *comment* la croissance a lieu. Il faut envisager alors des techniques propres à l'observation de la croissance différentielle<sup>48</sup>. On pourra ainsi explorer les différents modèles locaux quantitatifs qui peuvent décrire les données expérimentales.

Avant tout, est-ce qu'il y a une *croissance bulbaire* (une *poussée* de la part de l'oignon), qui détermine la croissance dans la partie discale de la hampe ? Voici une série de mesures (figure 11.a) et leur interprétation par un modèle très simple :  $DH(\text{bulbaire}) = k^b$  (figure 11.b)<sup>49</sup>. Il n'y pas de doutes possibles : la croissance bulbaire existe et elle est pratiquement uniforme (vitesse constante) au moins dans la phase initiale de développement de la hampe ; toutefois, *à elle seule, elle ne permet pas de justifier la croissance globale de la hampe*. Il est vrai que la région discale de la

<sup>47</sup> Une simple observation en classe permet déjà de se rendre compte qu'il y a au moins *deux* mécanismes différents de croissance en jeu : "(On a observé que) l'augmentation de la longueur totale de la tige est plus grande que la longueur du segment formé à sa base (près du bulbe). Il y a donc deux mécanismes de croissance de la hampe florale d'amaryllis : a. une croissance responsable de l'apparition de segments nouveaux à la base de la hampe (croissance 'bulbaire' car 'près du bulbe') ; b. un allongement des segments préalablement formés." (d'un "rapport de leçon" d'un enseignant).

<sup>48</sup> Un seul trait - fait à la base de la hampe quand celle-ci a seulement quelques millimètres de hauteur - peut être utile, mais après quelques jours il se sera déplacé vers le haut dans une région où une éventuelle dilatation dans le temps peut se superposer à la poussée bulbaire. Les points importants sont : 1. comment séparer la poussée bulbaire d'une dilatation le long de la hampe ? ; 2. comment mesurer au mieux cette éventuelle dilatation ? ; 3. comment modéliser, de façon locale et quantitative, ce double mécanisme de croissance ?

<sup>49</sup> Les segments étudiés dans ce cas étaient définis par des marques tracées de temps en temps sur la hampe, ras la terre du pot, et suivies depuis pendant un intervalle temporel variable. On voit que la hauteurs des marques croît linéairement avec l'intervalle temporel (vitesse de croissance constante).

hampe pourrait avoir subi, en même temps, les effets d'une dilatation ; mais les données sur les segments supérieurs semblent exclure que cette dilatation soit significative dans cette région.

(Il s'agit de segments différents, tous suivis à partir de leur naissance à la base)

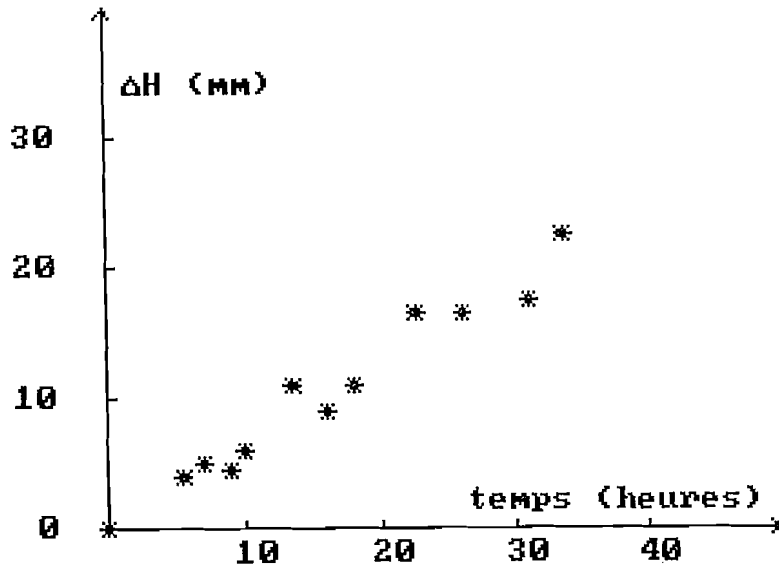


figure 11.a

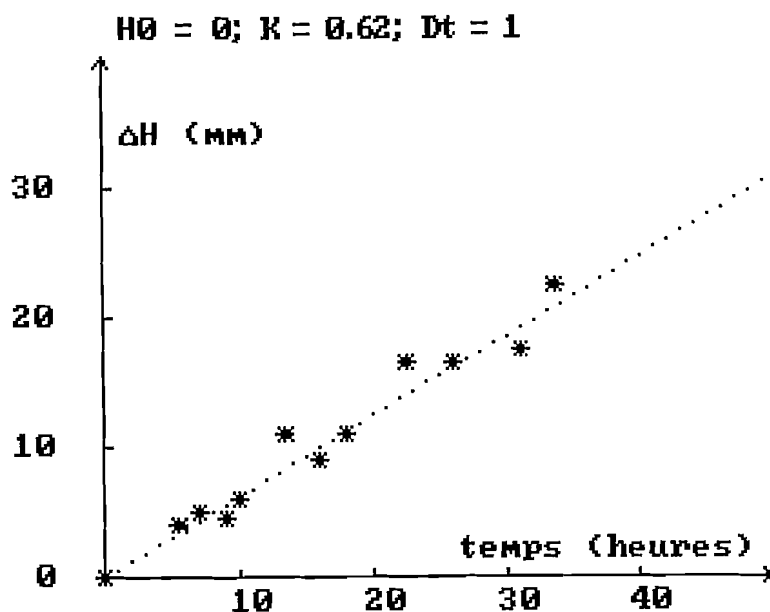


figure 11.b

Est-ce qu'il y a une *dilatation* de la hampe ? Dans une des expériences, nous avons choisi un segment particulier (celui inclus entre la 4ème marque faite sur la hampe et la 5ème), dont nous avons suivi la dilatation dans le temps. Voici les données numériques (figure 12.a).

La forme suggérée par l'ensemble de points expérimentaux est, encore une fois, celle de la "sigmoïde" déjà observée lors de l'étude de la croissance globale de la hampe. Une possible description locale est donc possible, en utilisant le modèle à incrément quadratique  $DL = L * (k - j * L)$  ( $k, j$  constantes  $> 0$ ) et en cherchant les valeurs numériques adéquates pour  $k$  et  $j$  (figure 12.b).

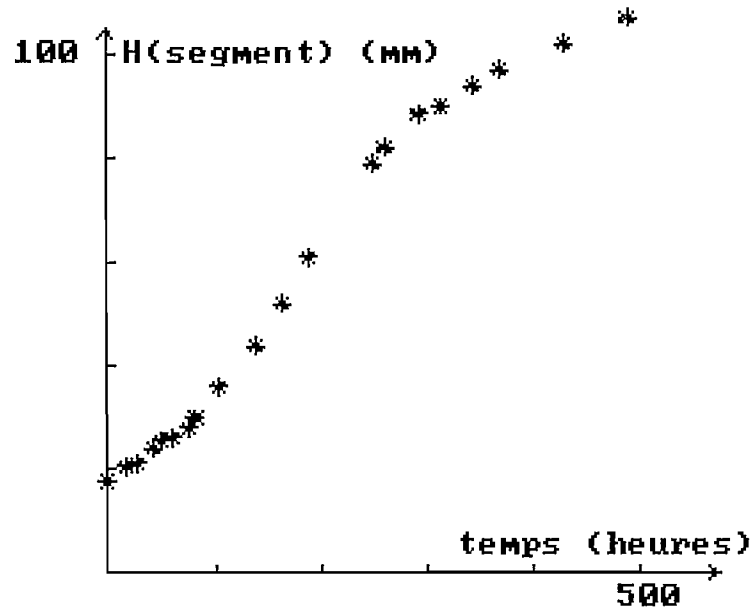


figure 12.a

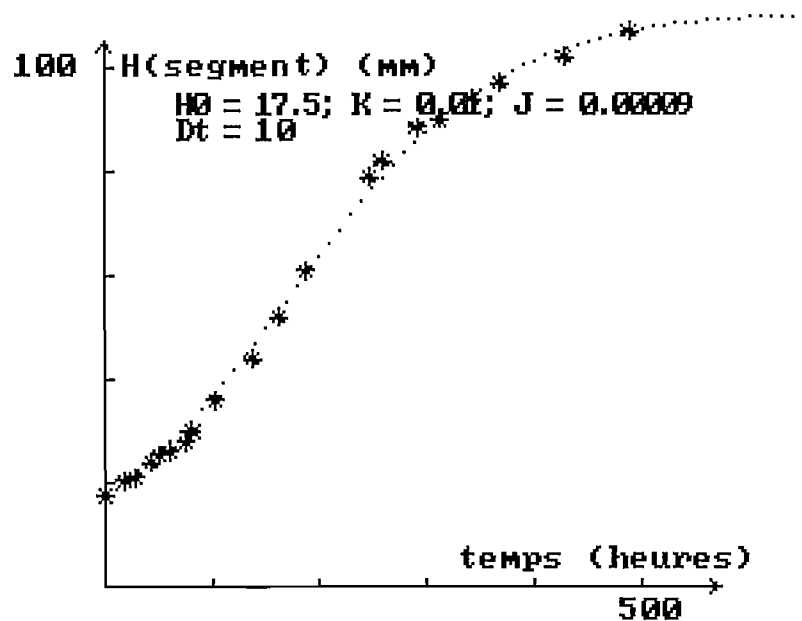


figure 12.b



L'accord est très bon (dans ce cas aussi, le modèle à incrément linéaire donnerait un accord beaucoup moins bon). Reste, encore une fois, à justifier le terme quadratique ; nous avons déjà noté que la tâche n'est pas facile<sup>50</sup>. On ne voudrait pas le projeter sur (et dans) la tête des élèves ; et, d'autre part, les justifications en termes de mécanismes (par exemple, la division cellulaire) sont très probablement erronées ou au moins fortement insuffisantes. Le problème reste donc ouvert ; mais il suggère une série d'expériences intéressantes, c'est-à-dire l'étude au microscope de sections et de fragments de l'épiderme de la hampe, pour suivre le développement, la multiplication et la différenciation des cellules au fur et à mesure que la hampe s'allonge.

La constatation de l'existence d'une croissance différentielle dans la hampe de l'amaryllis nous a amené à prolonger, dans certains cas, l'expérience en demandant aux élèves d'apporter en classe des anciennes photos de famille, à partir desquelles (ou d'un petit nombre desquelles, vue la difficulté d'en trouver avec des images qui se prêtent à la mesure) analyser l'éventuelle *croissance différentielle de leur corps*. C'est-à-dire, la variation avec l'âge des rapports (grandeurs du visage, du tronc et des jambes / grandeur du corps). Voici le résultat obtenu dans une classe de 7ème :

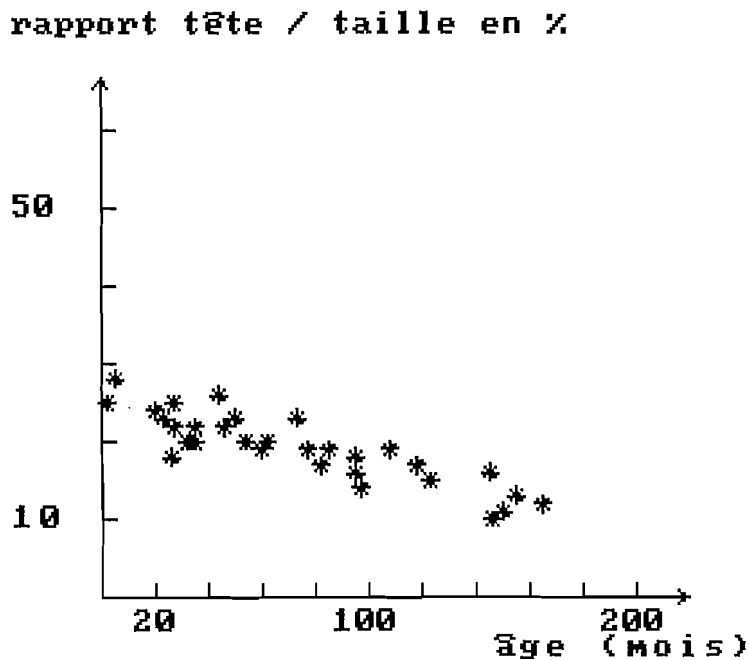


figure 13

#### V.4.5. La croissance d'une population bactérienne

Des expérimentations en classe avec des populations bactériennes ont été réalisées depuis longtemps ; certaines des techniques ont été standardisées et rendues facilement reproductibles (voir par exemple Westphal, 1988). Nous avons reprise une de ces

<sup>50</sup> Naturellement, à un niveau scolaire bien plus élevé, on dirait : "Nous avons pris le premier terme d'une expansion en série de puissance de  $DH(H)$  ; ça ne marchait pas ; alors nous avons essayé aussi avec le deuxième terme, ..." Mais, au niveau du Cycle d'orientation, aucune explication formelle n'est valable. Ou on cherche un mécanisme sous-jacent, qui suggère un modèle local, ou on expérimente avec des modèles locaux purement heuristiques.

expériences, celle de la multiplication dans une culture liquide d'*Escherichia coli* <sup>51</sup>, pour essayer d'en modéliser les résultats et de relier le modèle ainsi construit à d'autres, relatifs à des phénomènes de croissance et de changement déjà observés<sup>52</sup>.

Les aspects techniques de la préparation de cette expérience sont donnés dans l'annexe 4. L'expérience est délicate (risques de contamination de la culture, précautions pour maintenir constantes les conditions ambiantes de la culture, etc.) ; elle est toutefois parfaitement réalisable dans un laboratoire scolaire et elle nous a donné des résultats fiables et assez facilement modélisables.

Avant d'affronter cette expérience, nous avons préféré introduire, dans une discussion assez longue et animée en classe, le problème plus général de la multiplication d'une population : les attentes des élèves, les mécanismes proposés, les difficultés envisagées, ... Cette discussion, centrée sur l'hypothèse d'un couple de lapins laissés sur une île déserte (de lapins) et sur les prévisions des élèves à propos de leur éventuelle multiplication, sera présentée en détail dans notre dernier article, dans le cadre de la modélisation des *phénomènes discrets* (l'aspect *discret* étant ici lié à l'existence de *générations*, chacune desquelles est responsable d'une des phases de la reproduction). Il nous suffit ici d'en reprendre deux aspects essentiels et récurrents : *l'attente d'une croissance initiale de plus en plus rapide* (ce qui peut se traduire dans un modèle local quantitatif du type "incrément linéaire") et *la prévision d'un quelconque processus inévitable* - présence de prédateurs, manque d'herbe, catastrophes, etc. - *qui finit toujours par limiter cette croissance explosive* (ce qui peut amener à essayer un modèle du type "incrément quadratique").

Pour revenir à la croissance bactérienne, voici, en fig. 14.a, les données obtenues au cours d'une expérience.

#### V.4.5.1. Le modèle local quantitatif

Les données expérimentales montrent un comportement en courbe "sigmoïde" pour lequel le modèle "à incrément quadratique" représente une proposition pertinente ; ce modèle, comme nous l'avons déjà vu, est fonction de deux paramètres  $k$  et  $j$ . On aurait alors, pour l'incrément  $DD$  de la densité bactérienne  $D$  :  $DD = D * (k - j * D)$  ( $k, j$  constantes  $> 0$ ).

Dans ce cas, le terme quadratique trouve une certaine raison d'être, ou au moins une justification plausible, dans le phénomène que l'on appelle de "gêne" dans une population. En effet, les toxines produites par les bactéries pendant leur développement sont une fonction linéaire de  $D$  ; par conséquent, le nombre d'interaction entre bactéries, et donc la sensibilité que l'ensemble de la population a par rapport à ces toxines, est une fonction de  $D * D$ . L'argument est seulement plausible, mais non contraignant. Il vaut au moins la peine de l'explorer !

#### V.4.5.2. L'intégration numérique du modèle local

En fig. 14.b, le résultat de l'intégration numérique de ce modèle. L'accord est parfait ; le modèle logistique semble très bien décrire l'expérience. Peut-on dire qu'il

<sup>51</sup> L'expérience a été réalisée dans une 9ème, dans le cadre du cours de biologie.

<sup>52</sup> Nous avons déjà donné, en Vitale (1988), une analyse générale des possibilités de modélisation et d'intégration numérique du développement d'une population et de deux populations en interaction. Voir, pour plus de détails sur les modèles possibles et sur leurs représentations, Vitale (1990-1995), cahiers 3 et 5.

nous fait *comprendre* le pourquoi de cette dynamique particulière d'une colonie bactérienne ? Il faudrait essayer d'autres modèles avant d'en être sûrs<sup>53</sup>.

Il ne faudrait pas exclure de l'expérience (comme nous l'avons fait pour des raisons pratiques) la phase ultérieure du développement bactérien : c'est-à-dire, la phase finale pendant laquelle toutes les colonies bactériennes meurent. Pourquoi ? Peut-on trouver des modèles plus adéquats, qui rendent compte en même temps de la croissance initiale, du plateau intermédiaire et de la déchéance finale de la colonie et qui s'approchent davantage à la description des mécanismes connus de croissance bactérienne et de production de toxines ?.

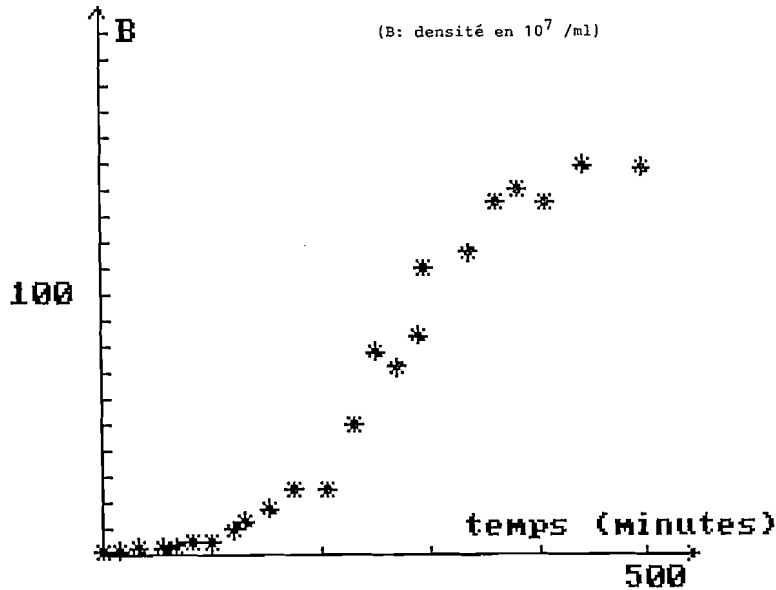
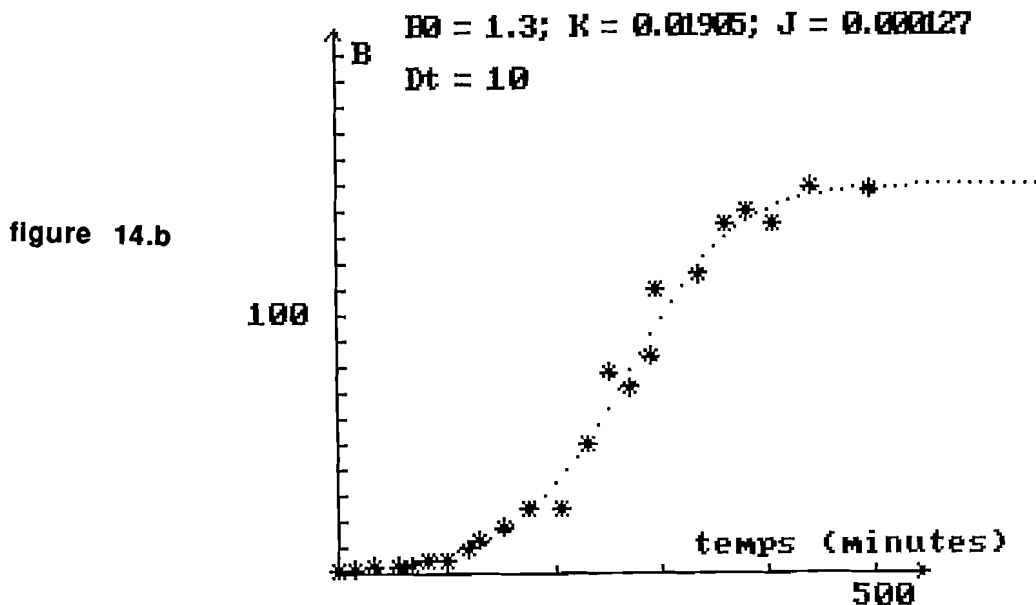


figure 14.a



<sup>53</sup> Dès que l'on voit une courbe tant peu qu'il se peut de forme "sigmoïde", on fait recours immédiatement au modèle logistique. D'autres modèles plus complexes pourraient très bien faire à l'affaire, et mieux correspondre à des éventuels mécanismes de croissance et/ou de changement.

## V.5. Conclusions sur les activités de modélisation dans le continu

Nous ne concevons pas l'activité de modélisation de phénomènes continus comme une succession d'expériences isolées, indépendantes l'une des autres, chacune modélisée de façon optimale mais sans qu'il y ait un continuel travail de remise en cause des expériences précédentes, d'anticipation sur les expériences futures, de recherche d'*invariants* parmi leurs caractéristiques, leurs dynamiques. Bien au contraire, pour nous c'est *l'ensemble des expériences et des tentatives de modélisation de chaque expérience* qui constitue un "projet de modélisation dans l'enseignement intégré de la mathématique et des sciences".

Mais est-ce que les élèves ont perçu cette unité ? Ou la pratique scolaire les a-t-elle induits à voir chaque expérience comme une tâche scolaire isolée, un "pensum" à réaliser pour ensuite passer à un autre ? Nous ne sommes pas convaincus d'avoir réussi le défi de créer les conditions de cette unité, de l'avoir faite *vivre* aux élèves ; non par de grands discours, mais par de petits mots répétés au juste moment, par une activité de guide discrète mais toujours présente.

Voici quelques extraits d'un protocole d'élève, avec des aspects encourageants, d'autres beaucoup moins :

Lara (7ème) : 'tu as une idée pourquoi vous avez fait ces expériences ? quel était le but ?' - "en math on faisait beaucoup de graphiques ..." - 'quels graphiques vous avez faits en math ?' - "il y avait des graphiques - par exemple les voitures - combien de voitures il y avait en 85 - quelque chose comme ça" - ... - 'et il y a quelque chose en commun avec la taille et la température ?' - "je pense pas" - 'la façon de changer ? la façon de changer la température et la façon de changer la taille ?' - "oui - c'est possible" - 'qu'est-ce que ça pourrait être ?' - "la température elle prend la température ambiante et nous - quand on grandit - on prend à peu près les mêmes proportions" - ... - 'dernière chose - la température - est-ce que tu crois que c'est la même chose que ça (le refroidissement des liquides) ou c'est différent ?' - "ben oui - il y a quand même un rapport - parce que les températures ça prenait la température ambiante - et puis là - il y a un moment où ça s'arrête - donc la température ce serait plutôt comme les tailles puisque après ça s'arrête"

Nous avons essayé de montrer comment, pour nous, l'activité de modélisation ne s'arrête pas à la définition du meilleur modèle local quantitatif possible et à son intégration numérique. Elle stimule des réflexions nouvelles et peut suggérer d'autres expériences qui clarifient le modèle et, éventuellement, donnent un sens à ses paramètres. Toute cette activité ne devrait pas se limiter à une seule année scolaire ; elle devrait au contraire suivre les élèves au moins pendant toute leur scolarité supérieure obligatoire.

### Remerciements

Nous tenons à remercier tous les collègues qui ont accepté de collaborer avec notre groupe et de partager avec nous leur expérience. En particulier, nous citerons Javier Arlegui et collaborateurs, Département de pédagogie, Université publique de Navarre, Pampelune.

Les observations, suggestions et critiques de plusieurs collègues nous ont également aidés ; nous remercions en particulier Sandrine Britton, CRPP, Genève ; Eduardo Marti, Département de psychologie, Université de Barcelone ; Afira Ripper, José Maria Valente et collaborateurs, LEIA-NIED, et Université d'état

de Campinas ; Paolo Guidoni, Elena Sassi et collaborateurs, Département de physique, Université de Naples ; Silvia Vidal Branco Bustamante et collaborateurs, Département d'informatique éducationnelle, Université catholique de Petrópolis ; ainsi que les collègues français, organisateurs de la "journée d'étude sur la modélisation dans l'enseignement" (27 août 1995), qui nous ont offert la possibilité de présenter et de discuter - dans le cadre de la 8ème école d'été des enseignants français de mathématique - nos premiers résultats.

## Références

ACKERMANN-VALLADAO E. (1981). *Statut fonctionnel de la représentation dans les conduites finalisées chez l'enfant*, Thèse de doctorat, Genève : FPSE.

ARCA M., GUIDONI P. (1987). *Guardare per sistemi, guardare per variabili ; Un approccio alla fisica e alla biologia per la Scuola dell'obbligo*, Torino : Emme edizioni.

BEGUIN C., GURTNER J.-L., DE MARCELLUS O., DENZLER M., TRYPHON A., VITALE B. (1995). Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences. Première partie : Les activités de représentation. "petit x", n°38, pp. 41-71.

BLUM W., NISS M., HUNTLEY I. (eds.) (1989). *Modelling, applications and applied model solving ; Teaching mathematics in a real context*, Chicester : Horwood.

BLUM W., NISS M. (eds.) (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects ; State, trends and issues in mathematics instruction, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 37-68.

CASTI J.L. (1992). *Reality rules ; Picturing the world in mathematics*, vol. 1 : *The fundamentals* ; vol. 2 : *The frontiers*. New York : Wiley.

CAUZINILLE-MARMECHE E., MATHIEU J., WEIL-BARAIS A. (1983). *Les savants en herbe*. Berne : Lang.

CHIN J., SATO P., MANN J.M. (1990). Infections par le VIH et cas de SIDA : projections jusqu'en l'an 2000, *Bulletin de l'OMS*, 68, pp. 143-153.

COLGATE S.A., STANLEY E.A., HYMAN J.M., QUALLS C.R., LAYNE S.P. (1989). AIDS and risk-based model, *Los Angeles Science*, fall issue.

DE LANGE J., KEITEL CH., HUNTLEY J., NISS M. (eds.) (1993). *Innovation in maths education by modelling and applications*, New York : Horwood.

DENEUBURG J.-L., CHAMPAGNE P., PASTEELS J., VERHAEGHE J.-C. (1988). Une stratégie basée sur l'erreur ; L'exploitation des ressources chez les fourmis, dans J.-P.Brans, I.Stengers and P.Vincke : *Temps et devenir ; A partir de l'oeuvre d'Ilya Prigogine*. Genève : Patiço, pp. 51-58.

Encyclopedia Universalis (1988). Modèle (N.Mouloud (introduction) ; B.Jaulin (mathématiques) ; M.-A.Tonnelat (physique) ; J.Goguel (sciences de la terre) ; S.Guinand (biologie) ; R.Boudon (sciences

sociales) ; F.Richard (psychologie) ; G.Mounin (linguistique) ; H.Damien (arts) ; N.Mouloud (perspectives épistémologiques). Vol. 12, pp. 401-416.

GAUVIN, J., REED, A. (1987). *Un modèle pour la simulation de la population des Grandes Oies blanches*, Montréal : Service canadien de la faune.

GELMAN S.A. (1993). Early conceptions of biological change, in Montangero et al (1993), pp. 197-208.

GURTNER J-L., VITALE B. (1991). *Why modeling ? Pupils interpretation of the activity of modeling in mathematical education*, actes PME-15, Assisi, vol. II, pp. 101-108.

GURTNER J-L., LEON C., NUNEZ ERRAZURIZ R., VITALE B. (1993). The representation, understanding and mastering of experience ; Modelling and programming in a school context, in de Lange et al (1993), pp. 63-68.

GURTNER J.-L., LEON L., NUNEZ ERRAZURIZ R., VITALE B. (1993a). Representation and modelisation of change over time in 12-13 year-olds in a school context, in Montangero et al (1993), pp. 279-290.

HORN H.S. (1993). J'ai descendu dans mon jardin... *Pour la Science*, mars 1993

JANVIER C., MARY C. (1991). *Systèmes à rétroaction, représentations, jeu interactifs et expérimentation*, Rapport de recherche, Montréal : CIRADE.

LARCHER C., MEHEUT M., CHOMAT A. (1987). Modèles particuliers et activités de modélisation en classe de 4ème, in Martinand et al (1987).

MARTINAND J.L., CAILLOT M. (eds.) (1987). *Enseignement et apprentissage de la modélisation ; Quantité de mouvement et modèle particulière*, Rapport de recherche, Paris : LIRESPT.

MONTANGERO J., CORNU WELLS A., TRYPHON A., VONECHE J. (eds.) (1993). Conceptions of change over time, *Cahiers de la Fondation Archives J. Piaget*, n°. 13

PAPERT S. (1994). *L'enfant et la machine à connaître ; Repenser l'école à l'ère de l'ordinateur*, Paris : Dunod.

PYLYSHYN Z. (1984). *Computation and cognition ; Toward a foundation for cognitive science*, Cambridge (USA) : MIT Press.

ROLAND J.C., ROLAND F. (1992). *Atlas de biologie végétale, tome 2 : Organisation des plantes à fleurs*, Paris : Masson.

TIERNEY C.C., NEMIROVSKY R. (1992). Young children spontaneous representations of changes in population and speed, Cambridge (USA) : TERC.

TIERNEY C.C., WEINBERG A.S., NEMIROVSKY R. (1992a). Telling stories about plant growth ; Fourth grade students interpret graphs. Cambridge (USA) : TERC.

VITALE B. (1988). Psycho-cognitive aspects of dynamic model-building in LOGO ; A simple population evolution and predator/prey program, *Journal of Educational Computing Research*, 4, pp. 227-252.

VITALE B. (1990-1995). L'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique ; vol. 1 : Considérations générales pour une approche trans-disciplinaire ; vol. 2 : Les projets : cahiers 1 (jeux), 2 (arbres), 3 (croissance et changement), 4 (musique), 5 (les bases de la pensée écologique), 6 (algorithmes aléatoires), 7 (algorithmes déterministes), Genève : CRPP-DIP.

VITALE B. (1991). Pratiques et perspectives nouvelles de la stratégie expérimentale ; Elargissement de la pratique expérimentale dans des cadres interprétatifs, *Cahiers d'Observation Scientifique*, n° 5.

VITALE B. (1992). Processes ; A dynamical integration of informatics into mathematical education, in C.Hoyles and R.Noss (eds.) : *Learning mathematics and LOGO*, Cambridge (USA) : MIT University Press.

VITALE B. (1994). Modélisation qualitative et quantitative. Un exemple d'intégration de l'informatique à la pratique pédagogique : les bases de la pensée écologique, *Informatique-Information*, n° 23.

VITALE B. (1995). From local to global ; Local modeling, programming and the unfolding of local models in the exploratory learning of mathematics and science, in A.diSessa, C.Hoyles, R.Noss and L.Edwards (eds.) : *The design of computational media to support exploratory learning*. New York : Springer.

WESTPHAL R. (1988). *Microbiological techniques in school*, Paris : Unesco.

WOLD H. (ed.) (1966). *La technique des modèles dans les sciences humaines*, Monaco : Sciences Humaines.

## Annexe

### C5. La croissance d'une culture bactérienne

Les bactéries (*Escherischia coli*) ont été cultivées dans un milieu riche (glucose et tryptone), inoculé avec un échantillon d'une culture saturée et maintenu à 37 °C à l'aide d'un bain-marie. Un tube connecté à une source d'air permet d'aérer constamment le milieu depuis le fond du tube par un courant de bulles d'air.

Le titre (bactéries par millitre) de la culture a été mesuré à intervalles réguliers durant 5 heures.

Pour chaque mesure, un échantillon de la culture, dilué de manière appropriée, est étalé sur agar-agar dans une boîte de Petri, où les bactéries sont comptées grâce aux colonies qu'elles forment. Le titre dans la culture est ensuite calculé en tenant compte de la dilution effectuée ; il passe en 6 heures d'environ  $10^7$  à  $10^9$ .