QUELLES CONCEPTIONS DES NOMBRES CHEZ DES ÉLÈVES DE TROISIÈME ?

Isabelle JACQUIER
PLC2 à l'IUFM de Grenoble

Introduction

Lorsque j'étais élève en classe de troisième, les nombres étaient étudiés à travers les ensembles de nombres : les nombres décimaux, les nombres rationnels, les irrationnels, les réels.

En début d'année scolaire, en feuilletant le manuel de ma classe de troisième, j'ai compris que l'enseignement que j'allais à présent devoir donner sur les nombres serait bien différent de celui que j'avais reçu.

Les ensembles de nombres ne sont plus actuellement au programme de mathématiques du collège. Cependant, il est certain que les élèves organisent les nombres à leur manière et avec les moyens qui leur sont donnés.

Dans le cadre de mon mémoire professionnel de deuxième année d'IUFM présenté en mai 95, j'ai cherché à comprendre comment les élèves voient les nombres et comment ils les organisent entre eux. C'est ce travail qui est à la base de cet article.

1ère Partie. Conceptions et organisation des nombres, un sujet qui jalonne l'histoire des mathématiques et auquel j'ai été confronté en classe

I. Des situations en classe

L'impression de grande confusion dans laquelle se trouvent les élèves face à l'écriture de certains nombres, et des racines carrées en particulier, a motivé avant tout le choix de ce sujet. Je me suis vite aperçue du besoin que les élèves ont d'utiliser les calculatrices afin de se ramener à une écriture rassurante : "*un nombre avec une virgule*". Combien de fois ai-je déjà rencontré dans des copies ou des cahiers $\sqrt{2} = 1{,}4$?

Mais c'est lors de la correction d'un exercice proposé à mes élèves de troisième que je me suis rendu compte combien "la conception des nombres" apparaissait comme un sujet délicat, tant pour les élèves dans la représentation qu'ils se font des nombres, que pour l'enseignant dans la difficulté à expliquer et à faire passer son savoir. Cet exercice, proposé à l'épreuve du Brevet dans l'académie de Nice en 1991, est le suivant :

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.

1°) Calculer BD.

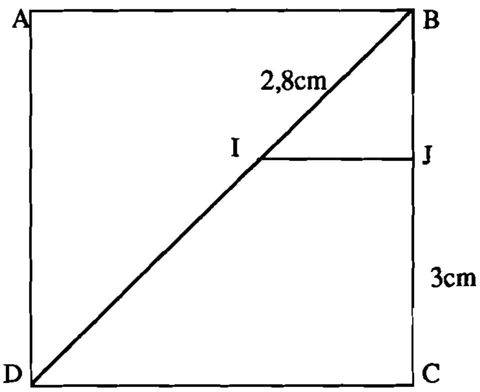
2°) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.

La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?

3°) Placer le point S de [BC] tel que BS=4 cm. La droite passant par S et parallèle à (CD) coupe

(BD) en T ; placer le point T.

Calculer BT et ST.



Plusieurs points intéressants sont ressortis à la correction des deux premières questions de cet exercice que les élèves avaient préalablement recherché :

Correction de la première question :

ABD étant un triangle rectangle, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BD^2 = 50 \qquad BD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Il apparaît à la correction de cette première question que l'absence d'une autre écriture de BD = $\sqrt{50}$ = 5 $\sqrt{2}$ est déconcertante pour les élèves. Pour reprendre les termes de l'un d'entre eux : "*Il faut écrire* BD=7,07 car $\sqrt{50}$, *pour une longueur, ça ne veut rien dire*".

Correction de la deuxième question :

Dans le triangle BCD, les points B, J, C d'une part et B, I, D d'autre part sont alignés dans le même ordre. On peut appliquer la réciproque au théorème de Thalès :

Si $\frac{2}{5} = \frac{2,8}{5\sqrt{2}}$, autrement dit si $\sqrt{2} = \frac{2,8}{2}$, alors (IJ) // (DC).

Cette deuxième question soulève un problème assez subtil et difficile pour des élèves de troisième : est-ce que $\sqrt{2}$ peut-être égal à une fraction ? Nous en avons discuté en classe :

- Un élève sur 24 pense que $\sqrt{2}$ ne peut pas être égal à une fraction car $\sqrt{2}$ ne se termine pas. Est-ce qu'il sous-entend qu'une fraction se termine toujours ?
- Tous les autres pensent qu'il est impossible de répondre sans faire de calculs ou sans utiliser de calculatrice.

N'ayant pas réfléchi au préalable aux connaissances des élèves sur les nombres en début de classe de troisième, dans l'impossibilité d'employer les termes rationnels et irrationnels, il n'a pas été facile de répondre clairement aux élèves. Il m'est donc apparu comme nécessaire d'approfondir ces questions.

II. La construction des nombres, une histoire passionnante

Le concept de nombre en général et celui de nombre réel en particulier ne sont pas simples à élaborer. Passer de la situation "tout nombre a une écriture fractionnaire" à la situation "parmi les nombres, certains ont une écriture fractionnaire" ne va pas sans bouleversement. Les élèves se trouvent après tout face aux interrogations des premiers mathématiciens qui eurent à reconnaître l'existence de ces nombres "qu'on ne peut jamais atteindre" et qui ne s'inscrivaient alors dans aucun schéma mathématique.

Le concept de nombre entier est évidemment très ancien. Jean-Paul Collette, dans son *Histoire des Mathématiques,* volume 1, page 6, met en évidence les trois obstacles à franchir afin d'assimiler le concept de nombre :

"*L'homme primitif pense à un nombre lorsqu'il saisit bien les relations suivantes :*

1) La nature des objets à compter ne joue aucun rôle dans la numération ;

2) L'ordre dans lequel les éléments sont observés n'affecte pas le résultat final, c'est à dire le nombre cardinal ;

3) le dernier élément compté correspond de fait au nombre cardinal de la collection, dans la mesure où seul le résultat du compte est nécessaire."

Le besoin de conserver le nombre apparaît dès les premières activités de comptage. Différents types de numérations de plus en plus perfectionnées s'élaborent. La numération figurée ou la "correspondance un à un" est la plus simple : chaque animal d'un troupeau est représenté par une pierre dans un récipient. Les Babyloniens, les Égyptiens, les Grecs utilisent des numérations écrites : les chiffres sont symbolisés par des signes.

Ces civilisations, 5000 av. JC pour la plus ancienne, pour des raisons et avec des approches différentes, se sont intéressées à ce qu'on appelle aujourd'hui les fractions :

- Les Babyloniens complétèrent leur système de numération par des nombres inférieurs à l'unité. Ils introduisirent les fractions sexagésimales. Ils pouvaient ainsi obtenir, par des algorithmes de calculs, de très bonnes approximations de rationnels.
- Les Égyptiens, sûrement pour des raisons d'utilité dans la vie de tous les jours, s'intéressèrent aux divisions de l'unité, aux quantièmes.
- Les Grecs étudièrent les fractions à travers les rapports de longueurs.

Les Grecs avaient une conception des nombres tout à fait particulière, puisqu'un nombre était représenté par la longueur d'un segment, une unité de longueur ayant été préalablement choisie. Tout comme l'unité est la mesure commune aux nombres entiers, ils pensaient que les grandeurs avaient toujours une mesure commune. Autrement dit, une grandeur pouvait toujours s'écrire comme la fraction d'une autre grandeur. Cette conception fut mise en échec par les Pythagoriciens : il n'existe pas de mesure commune à la longueur du côté d'un carré et la longueur de la diagonale de ce même carré. Le côté et la diagonale du carré sont dits incommensurables. Bertrand Russel dans son *Introduction à la Philosophie Mathématique,* page 40, explique très simplement comment Pythagore découvrit ce qui aujourd'hui est considéré comme la première grande rupture de l'histoire des mathématiques : les irrationnels. "*C'est lui (Pythagore) qui s'aperçut de l'existence des incommensurables, et en particulier de l'incommensurabilité du côté du carré avec la diagonale . Si la longueur du côté est, disons, de 1 cm, le nombre de centimètres de la diagonale est égal à la racine carrée de 2 et il semblait que cela n'était d'aucune manière un nombre*".

Dans le cursus scolaire, c'est aujourd'hui en classe de quatrième que les élèves découvrent les racines carrées. Qu'en est-il alors pour nos élèves ? Considèrent-ils que $\sqrt{2}$ est un nombre ou bien que ce n'en est pas un ? Et d'une manière générale, quelles conceptions les élèves ont-ils des nombres et comment les organisent-ils les uns par rapport aux autres ?

2ème Partie. Le cadre de mon travail

I. Choix d'un niveau : classe de troisième

Pour mieux connaître les conceptions que les élèves ont des nombres, j'ai choisi un niveau de classe donné.

Traiter le sujet en classe de troisième présente deux avantages :

* La classe de troisième est la dernière du cycle collège. Une étude à ce niveau peut se présenter comme un bilan des quatre années de collège.

* Les élèves de troisième ont manipulé largement les nombres décimaux, les écritures fractionnaires et les racines carrées sans avoir eu une présentation systématique des ensembles de nombres.

II. Quelques approches du nombre

Nous allons développer trois réflexions autour du nombre : qu'est-ce qu'un nombre ? qu'est-ce que connaître un nombre ? quelles représentations avons-nous des nombres ? Les réponses à ces questions devraient permettre de mieux délimiter le sujet.

II.1. Une question difficile : qu'est ce qu'un nombre ?

A. Bouvier, l'auteur du chapitre Fractions Continues de l'ouvrage *Didactique des Mathématiques, le dire et le faire,* page 164, commence son article ainsi : *"J'ai demandé à un collègue de mathématiques : "qu'est-ce qu'un nombre ?". Il a ri, pensant à une blague. Comme j'insistais, toujours en riant, il m'a répondu : "C'est quelque chose qui s'écrit avec des chiffres et éventuellement une virgule !".*

"Ce court épisode retrace bien l'embarras où nous nous trouvons face à la question : "qu'est-ce qu'un nombre ?". Il est pour beaucoup d'entre nous bien difficile d'apporter une réponse satisfaisante.

Il ne s'agissait donc pas, dans ce travail, de poser une telle question à des élèves de troisième, ni de s'intéresser à la notion même de nombre, mais plutôt d'arriver à établir les liens que les élèves font entre les nombres et leurs écritures. Comment les organisent-ils les uns par rapport aux autres ? Perçoivent-ils la différence entre $\sqrt{2}$ et 1,4142136 , entre $\frac{1}{3}$ et 0,3333333 ? Finalement, quelles connaissances ont-ils des nombres ?

II.2. Connaître un nombre

La question "quelles connaissances les élèves ont-ils des nombres ?" nous conduit à une autre question : "qu'est ce que connaître un nombre ?". Sans prétendre répondre à une telle question, précisons un peu ce que l'on peut entendre par "connaître un nombre".

* C'est savoir caractériser les différentes sortes de nombres qui existent : les nombres entiers, les nombres décimaux, les rationnels et les irrationnels. L'étude des rationnels et des irrationnels étant hors programme en classe de troisième, nous nous limiterons aux décimaux, aux écritures fractionnaires ("fractions"), et aux racines carrées.

* C'est aussi connaître sous quelles formes s'écrivent ces nombres et leurs principales propriétés.

* C'est pouvoir préciser ce qui les différencie les uns des autres.

N'a-t-on pas l'impression de mieux connaître un nombre lorsqu'il est écrit sous forme décimale ? Les algorithmes opératoires traditionnels ne fonctionnent qu'avec des décimaux (avec un nombre fini de chiffres non nuls). Pour un élève de collège, l'apprentissage du calcul avec les écritures fractionnaires et les radicaux est en cours d'élaboration. Il est loin de pouvoir se substituer aux pratiques antérieures de calcul. Ne serait-il pas normal que des élèves de troisième préfèrent à l'écriture $\sqrt{2}$, l'écriture 1,4142136 qui pour eux est plus familière, porteuse de plus de sens et permettant d'effectuer des opérations ? Reste à savoir s'ils font bien la distinction entre ces deux écritures et s'ils considèrent bien la première comme celle d'un nombre et la seconde comme une valeur approchée de ce nombre.

II.3. Quelques représentations des nombres

Les nombres ont plusieurs fonctions : dénombrer, mesurer... Ainsi, les représentations que nous pouvons nous faire des nombres sont diverses. La liste présentée ci-dessous n'est pas complète mais semble suffisante dans le cadre de notre sujet au niveau d'une classe de troisième.

* LES NOMBRES QUI DÉNOMBRENT

Ce sont les nombres qui servent à compter le nombre d'éléments d'un ensemble. Les techniques de dénombrements sont variées. Cependant, le résultat est toujours un entier naturel.

* LES NOMBRES QUI MESURENT

A première vue, les nombres décimaux sont les nombres qui mesurent. A l'école primaire, les enseignants introduisent souvent les nombres décimaux au moyen des mesures de longueurs de segments. De ce fait, le terme "mesurer", en géométrie, reste longtemps associé chez les élèves à l'idée d'instrument de mesure et donc de nombre décimal. D'où la difficulté par la suite à percevoir que $\sqrt{2}$ est lui aussi un nombre qui mesure, bien qu'il ne soit pas un nombre décimal.

* LES NOMBRES QUI PARTAGENT

"Je découpe un gâteau en trois parts égales et j'en prends deux : je prends les $\frac{2}{3}$ du gâteau.". Les fractions peuvent représenter l'action de partager en parts égales une quantité, une longueur.

II.4. Conclusion

Nous utilisons les nombres tous les jours, mais nous avons vu la difficulté à dire ce qu'est un nombre. Nous nous intéresserons donc uniquement à la connaissance ou conception que les élèves ont des nombres dans le sens où nous l'avons défini précédemment. L'analyse des manuels de collège est indispensable, non seulement pour savoir comment les nombres sont présentés aux élèves, mais aussi pour avoir une idée de la progression au cours des quatre années de collège.

III. Le point sur les connaissances des élèves

III.1. L'utilisation des calculatrices

Tous les élèves de troisième possèdent une calculatrice scientifique. Leur utilisation en classe est incontournable (en quatrième et troisième) pour l'approximation d'une racine carrée et pour les calculs trigonométriques. Les manuels de collège et de lycée intègrent parfaitement leur utilisation.

La calculatrice est un outil nouveau, avec un certain nombre d'avantages : économie de temps pour les calculs, risque moindre d'erreurs, possibilité d'effectuer un grand nombre d'essais au moindre coût, possibilité d'aborder des thèmes mathématiques de manière originale, motivation pour les élèves. Néanmoins, un de ses principaux inconvénients à mes yeux, est sa fonction de "décimalisation" des nombres : les nombres dans une calculatrice sont représentés sous forme décimale. Nous aurons sans aucun doute à constater par la suite cet aspect de la calculatrice dans les réponses apportées par les élèves à notre expérimentation.

III.2. Quelques remarques à propos d'une collection de manuels de collège

Ces remarques sont relative aux ouvrages pour le collège de la collection *Transmath* aux éditions Nathan.

* *Les fractions*. Dès la sixième, l'écriture fractionnaire est introduite au moyen des quotients. La nécessité d'une écriture fractionnaire apparaît puisqu'il n'est pas toujours possible de donner une écriture décimale exacte à certains quotients. Un lien très fort est établi entre la notion de fraction et celle de division, avant de considérer plus tard dans l'ouvrage que multiplier par une fraction revient à partager une quantité. D'autre part, le chapitre sur les nombres décimaux propose de trouver diverses écritures à un même nombre décimal : $0{,}7 = \frac{7}{10}$; $0{,}02 = \frac{2}{100}$. Mais la généralisation au résultat : "tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction" n'est faite qu'en classe de cinquième.

En cinquième et quatrième, les élèves apprennent surtout à manipuler les fractions.

* *Les racines carrées*. Dès la classe de quatrième, le théorème de Pythagore est l'occasion d'une approche de la notion de racine carrée. Les élèves apprennent alors à utiliser la touche $\sqrt{\ }$ de leur calculatrice. L'accent est mis sur la distinction à faire entre valeur exacte et valeur approchée. Le terme "irrationnel" n'est jamais employé dans le manuel de troisième. Cependant, au cours d'une activité et à l'aide de la calculatrice, une recherche est entreprise autour de la nature de $\sqrt{13}$. L'élève est conduit à établir que le carré d'un décimal non entier ne peut être égal à 13 et par là que $\sqrt{13}$ n'est pas un décimal. L'ouvrage précise que $\sqrt{13}$ n'est pas non plus un rationnel. La plupart des ouvrages en usage au collège n'aborde pas ces préoccupations.

IV. Quelques précisions

Cherchant essentiellement à déterminer comment les élèves voient les nombres depuis que l'étude des ensembles de nombres n'est plus au programme des collèges et depuis la banalisation de l'utilisation de la calculatrice, nous nous intéresserons uniquement aux nombres positifs.

La caractérisation du nombre π nous a paru difficile au niveau de la classe de 3ème tout au moins en tant que nombre irrationnel ; nous avons choisi de ne pas l'aborder dans notre étude.

3ème Partie. Expérimentation en classe

I. Les conditions de l'expérimentation

J'ai proposé deux questionnaires (le premier est en annexe 1 - pp. 49-50)[1] aux élèves de ma classe de troisième du collège F.J. Armorin de Crest. La classe comporte un effectif de 24 élèves. Cette classe est loin d'être homogène. En effet, 8 élèves, soit un tiers de l'effectif total, proviennent d'une classe dite "quatrième pilote". Ces élèves alors en échec scolaire ont bénéficié pendant leur année de quatrième d'une pédagogie particulière. Cependant, leurs résultats restent faibles.

La première expérimentation a eu lieu au mois de février pendant une heure de mathématiques. La deuxième expérimentation, très courte, s'est déroulée deux mois plus tard, en début de cours. J'ai recueilli 22 réponses pour le premier questionnaire et 19 pour le second. Les élèves ont répondu sur la feuille même de chaque questionnaire.

---

[1] Certaines questions sont une reprise du questionnaire de T.Assude (1989).

II. Présentation de l'expérimentation

II.1. Présentation du premier questionnaire

Ce questionnaire est relatif aux nombres entiers, aux nombres décimaux, aux fractions et aux racines carrées.

Questions 1 à 4. Conceptions des nombres

1) Comment pourrais-tu expliquer à quelqu'un ce qu'est un nombre entier ?
2) Comment pourrais-tu expliquer à quelqu'un ce qu'est un nombre décimal ?
3) Comment pourrais-tu expliquer à quelqu'un ce qu'est une fraction ?

Posées sous cette forme, ces questions ont l'avantage de ne pas inciter à donner une définition (ce qui serait bien difficile !). On attend ici une référence éventuelle aux nombres qui dénombrent, aux nombres qui mesurent, aux nombres qui partagent.

4) Thomas pense que $\sqrt{2}$ est un nombre. Julien pense que Thomas a tort et que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre. A ton avis, qui a raison ? Thomas ou Julien ? Quels arguments donnerais-tu pour convaincre que $\sqrt{2}$ est un nombre ou pour convaincre que ce n'en est pas un ?

Cette question est posée de façon très ouverte pour éviter d'induire un type de réponse. Après avoir choisi qui de Thomas ou Julien a raison, la difficulté vient de l'argumentation à apporter pour justifier son choix.

Questions 5 à 13. Différentes écritures d'un même nombre et ensembles de nombres

La deuxième partie a été élaborée pour mieux comprendre comment les élèves organisent les nombres entre eux et pour pouvoir apporter des réponses en particulier aux questions suivantes :

1) reconnaissent-ils un même nombre à travers différentes écritures de ce nombre ?
2) comment différencient-ils les nombres entre eux ?

Les questions 5, 6, 7, 8 cherchent à établir si les élèves perçoivent les inclusions suivantes : $N \subset Q$ et $D \subset Q$.

5) Écris le nombre 2 sous la forme d'une fraction.
6) "Tous les nombres entiers peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction". A ton avis, est-ce vrai ou faux ? Justifie ta réponse.
7) Écris le nombre 0,2 sous la forme d'une fraction.
8) "Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction". A ton avis, est-ce vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

Les questions 9 et 10 cherchent à déterminer suivant quels critères les élèves différencient les nombres. S'attachent-ils simplement à l'écriture du nombre ou bien s'intéressent-ils à la nature même du nombre ?

9) Voici une liste de nombres : $\frac{4}{2}$ 1 3 $\frac{3}{4}$ 0,3 10 $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$. Regroupe ces nombres dans deux ensembles différents A et B.

10) Même question avec la liste de nombres suivante : $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{13}{11}$.

Enfin nous abordons les nombres irrationnels sans bien sûr en parler, à travers les racines carrées et le nombre $\sqrt{2}$. Là encore, aucune compétence théorique n'est exigible de la part des élèves. L'objectif de ces questions est de déterminer si les élèves ont conscience qu'aucun nombre décimal ne peut être égal au nombre $\sqrt{2}$ et qu'ils ont alors affaire à des "objets" différents.

11) Existe-t-il un nombre entier positif qui élevé au carré donne 4 ?
12) Existe-t-il un nombre entier positif qui élevé au carré donne 2 ?
13) Existe-t-il un nombre décimal positif qui élevé au carré donne 2 ?

Questions 14 et 17. Rôle et importance de la calculatrice

La dernière partie de ce questionnaire a pour objectif de déterminer si les élèves font la distinction entre la valeur décimale approchée et la valeur exacte de certains nombres, et évoque l'affichage obtenu sur une calculatrice (les élèves disposaient de leur calculatrice).

14) Est-ce que $\sqrt{2} = 1{,}4142136$?

17) Les trois égalités suivantes sont-elles vraie ou fausses ?
$\frac{1}{3} = 0{,}3333333$ $\quad \frac{3333333}{10000000} = 0{,}3333333$ $\quad \frac{3333333}{10000000} = \frac{1}{3}$

Pour la question 14, est-ce que ce qu'on lit sur une calculatrice lorsqu'on appuie sur les touches 2 $\sqrt{\ }$ est la valeur de $\sqrt{2}$? Les racines carrées sont abordées lors de l'étude du théorème de Pythagore et à l'aide de la calculatrice. Les enseignants ne manquent pas d'insister sur le fait que la calculatrice ne peut donner qu'une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$. "*Lorsqu'on utilise la touche* $\sqrt{\ }$ *d'une calculatrice, on obtient une valeur approchée d'un nombre*". Cette phrase, souvent répétée aux élèves s'est-elle inscrite pour certains tel un mécanisme ? Il est possible que des élèves n'aient pas fait le lien entre la question 13 et la question 14, et ayant répondu que 1,4142136 est un nombre qui élevé au carré est égal à 2, écrivent par la suite que $\sqrt{2} \neq 1{,}41421$.

Enfin, la dernière question présente quelques "pièges" pour des élèves habitués à utiliser leur calculatrice. Il est vrai que si l'on tape sur une calculatrice :

$$1 \div 3 \text{ ou } 3333333 \div 1000000$$

la calculatrice affiche dans les deux cas le même nombre et l'on peut être tenté de dire que $\frac{3333333}{10000000} = \frac{1}{3}$. Les élèves vont-ils s'en référer uniquement à leur calculatrice au risque d'aboutir à l'égalité précédente ou bien vont-ils faire la distinction entre $\frac{1}{3}$ et une valeur approchée de $\frac{1}{3}$?

II.2. Présentation du second questionnaire

Au vu des résultats recueillis pour la question 17 du précédent questionnaire, il a paru nécessaire d'approfondir cette question, sans avoir la possibilité cette fois d'avoir recours à la calculatrice. Sur cette fiche, il est bien précisé que l'on s'intéresse à un nombre a = 0,3333333... (avec des 3 indéfiniment) et un nombre b = 0,3333333 (avec sept 3 après la virgule).

> II.1) Est-ce que a = b ?
>
> II.2) Lequel des deux nombres, entre a et b, est égal à $\frac{1}{3}$?
>
> II.3) Pierre dit : "Si $\frac{1}{3}$ était égal à 0,3333333 alors 3 x 0,3333333 serait égal à 1. Or 3 x 0,3333333 = 0,9999999 $\neq$ 1. Donc $\frac{1}{3} \neq$ 0,3333333". Le raisonnement de Pierre est-il juste ?

Ce questionnaire nous permettra, en rapport avec la question 17 du précédent questionnaire, d'évaluer l'influence de la calculatrice. Il nous est aussi apparu nécessaire pour aider les élèves à faire le point sur leurs connaissances et pour leur apporter des éléments de réflexion (comme cette dernière question).

4ème Partie. Les résultats obtenus

Notre analyse est basée sur un effectif total de 22 élèves.

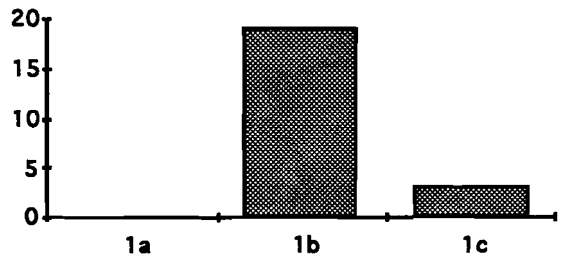
I. Représentation des nombres

Nous avons effectué le dépouillement du questionnaire relativement à la représentation des nombres en fonction des trois conceptions suivantes.

LES NOMBRES ENTIERS

-1a : Les nombres entiers qui dénombrent.
-1b : Un nombre entier comme s'écrivant sans virgule.
-1c : Non explicitée (le plus souvent de simples exemples).

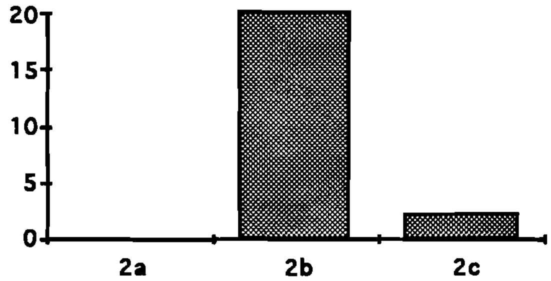
Voici la répartition obtenue :



LES NOMBRES DÉCIMAUX

-2a : Les nombres décimaux qui mesurent.
-2b : Un nombre décimal comme s'écrivant avec une virgule.
-2c : Non explicitée (essentiellement des exemples).

Voici la répartition obtenue :

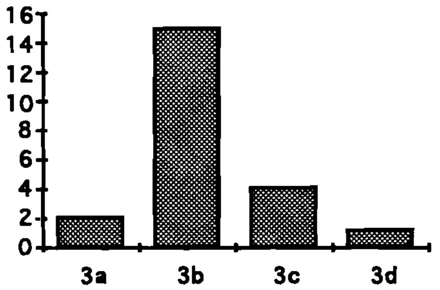


La plupart des réponses sont assorties d'exemples. Aucune réponse ne fait allusion à l'utilité de ces nombres ou propose des exemples relatifs à la vie de tous les jours. Il apparaît clairement que les élèves ont une vision des nombres qui se rapporte à leur écriture. "Un nombre décimal, c'est un nombre avec virgule (à l'inverse d'un nombre entier). Un nombre entier est un nombre sans virgule (à l'inverse d'un nombre décimal)". Pour cela nous dirons que les nombres entiers et décimaux sont définis les uns par rapport aux autres. Aucune précision telle que "un nombre entier est aussi un nombre décimal" ou "un nombre décimal a un nombre fini de chiffres après la virgule" n'a jamais été donnée. Peut-être que les questions posées telles quelles ne se prêtaient guère à ce type de remarques ? Mais il est possible aussi que ces questions aient surpris les élèves peu habitués à ce type de réflexion.

En définitive, l'idée de nombre entier ou décimal est, pour les élèves, rattachée à l'écriture de ces nombres.

LES FRACTIONS (OU ÉCRITURES FRACTIONNAIRES ...)

Nous avons retenu :
- 3a : Les fractions permettant de partager.
- 3b : Une fraction représentant une division à effectuer.
- 3c : Une fraction comme une simple écriture (caractérisée par un numérateur et un dénominateur).
- 3d : Aucune réponse.



Cette fois les réponses sont plus partagées et seulement 4 élèves expliquent qu'une fraction, c'est "quelque chose" qui a un numérateur, un dénominateur, et un "trait" (3c). Autrement dit, la représentation des fractions est bien moins liée à l'écriture que ne le sont les nombres entiers ou décimaux. Il reste un résultat surprenant : seulement deux élèves associent les fractions au partage d'une quantité. Pourtant, les manuels de collège présentent ces deux approches possibles des fractions :

- une fraction est une division,
- multiplier par une fraction revient à partager.

Le besoin de faire des calculs pour obtenir un résultat, et donc ici de transformer la fraction, à l'aide de la division, en "nombre décimal" peut expliquer la préférence des élèves pour cette approche. Un seul élève précise qu'une fraction est un nombre qu'il n'est pas toujours possible d'écrire autrement.

La fraction n'est pas vue comme l'écriture d'un nombre (le quotient), mais plutôt comme l'écriture d'une opération à effectuer. Déjà, à l'école primaire, les apprentissages relatifs à la division et aux nombres décimaux sont très mêlés. De plus, l'usage des calculatrices renforce le lien entre quotient et nombre décimal.

Intéressons nous à présent à la nature de $\sqrt{2}$. Pour la question "$\sqrt{2}$ est-il un nombre ? ", les avis des élèves se répartissent selon le diagramme suivant :

$\sqrt{2}$ EST-IL UN NOMBRE ?

Vrai	12
Faux	9
Indécis	1

Les élèves sont très partagés quant à la nature de $\sqrt{2}$. Pour les 9 élèves pour qui $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre :

* 5 élèves n'ont apporté aucun argument pour convaincre que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre,

* pour trois autres, ce n'est pas un nombre car c'est un calcul à faire. "*c'est comme si* $\frac{1}{3}$, 3 x 2 *ou* 4 + 6 *étaient des nombres*" écrit l'un d'entre eux. On retrouve ici le même type de réponse que pour les fractions. Le fait d'utiliser sa calculatrice

pour obtenir la valeur approchée d'une racine fait de la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice un symbole opératoire au même titre que + , x ou ! ,[2]

- enfin, pour le dernier de ce groupe de 9 élèves, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre car c'est une racine carrée...

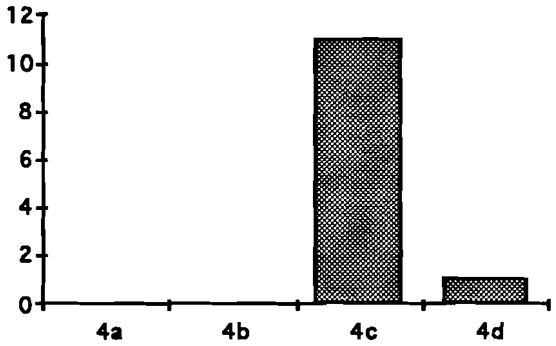
Pour les 12 élèves pour qui $\sqrt{2}$ est un nombre, les arguments donnés en faveur de Thomas pour prouver que $\sqrt{2}$ est un nombre se répartissent ainsi :

4a : référence à la définition.

4b : $\sqrt{2}$ est un nombre qui mesure.

4c : la séquence de touches 2 ; $\sqrt{\ }$ sur une calculatrice donne un nombre.

4d : autres réponses.



C'est donc la calculatrice qui permet aux élèves d'affirmer que $\sqrt{2}$ est un nombre. Celle-ci donne une "écriture décimale" de $\sqrt{2}$. On peut donc penser que pour eux, $\sqrt{2}$ est reconnu comme un nombre par l'intermédiaire de l'écriture décimale donnée par la calculatrice. Le lien avec la définition et avec le cadre géométrique ne se fait pas (Anton S. (1994). Y aurait-il eu la même proportion en faveur de Thomas si les élèves n'avaient pas eu de calculatrice à leur disposition ?

Conclusion. La représentation que les élèves ont des nombres est très fortement liée à l'écriture de ceux-ci. On a l'impression que les élèves reconnaissent comme nombre en tant que tel les nombres entiers et les nombres décimaux. On voit ici l'influence de la calculatrice qui écrit et traite tous les nombres sous la même forme, la forme "décimale"[3]. Les racines carrées et les fractions prennent leur place dans l'ensemble des nombres comme des calculs à effectuer. En effet, les touches $\sqrt{\ }$ et $\div$ permettent de les écrire sous forme entière ou décimale. Le schéma suivant peut représenter ce que nous venons de dire.

[2] N'oublions pas que lors des "apprentissages fondamentaux" (CP, CE1), les enfants ont beaucoup de difficultés à percevoir l' écriture 2 + 3 comme celle d'un nombre. Ils l'interprètent plutôt comme un calcul à effectuer.

[3] À l'exception toutefois de certains modèles qui effectuent quelques calculs limités sur les écritures fractionnaires.

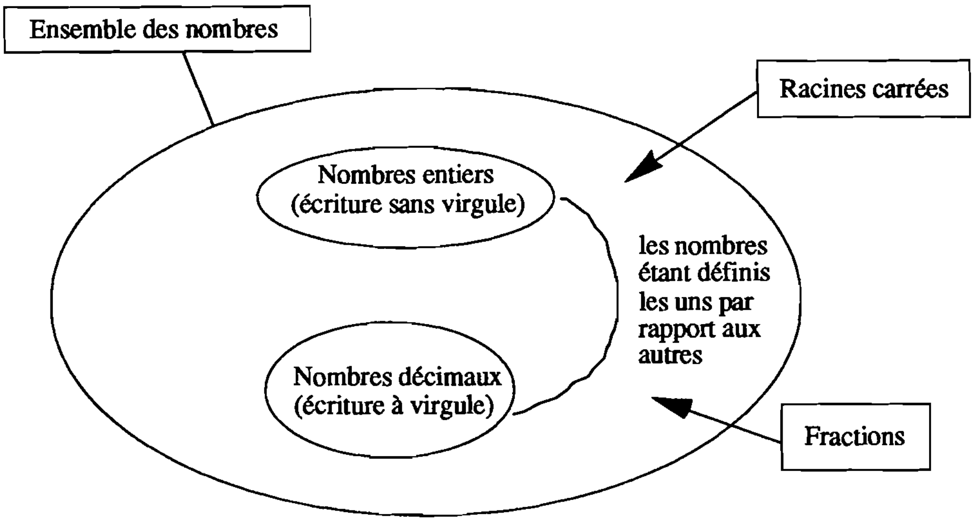


schéma 1

Cette conception limitée à la simple écriture ne donne aucune consistance mathématique aux nombres et ne présente aucune référence aux structures opératoires et à leurs propriétés.

II. Différentes écritures d'un même nombre ; ensembles de nombres

Nous ne pouvons pas limiter les conceptions que les élèves ont des nombres au schéma précédent qui paraît trop simple. Il existe bien entendu d'autres interactions entre les ensembles. Ainsi, la sixième question et la huitième question portent sur les inclusions $N \subset Q$ et $D \subset Q$. Le dépouillement des précédentes questions montre qu'il manque ici la question "Un nombre entier est aussi un nombre décimal. Est-ce vrai ou faux ?". Il semble que ce ne soit pas vrai pour tous.

QUESTION 6

«Tous les nombres entiers peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction». Est-ce vrai ou faux ?.

Vrai	18
Faux	3
Indécis	1

Aucun argument n'a été apporté pour justifier que la proposition est fausse. Les arguments donnés pour prouver que l'affirmation est vraie se répartissent ainsi :

- un tiers des élèves ont écrit qu'un nombre entier est aussi une fraction de dénominateur 1.
- un tiers des élèves ont "multiplié et divisé un entier par un autre entier": $2 = 2 \times 6 \div 6 = \frac{12}{6}$.
- un tiers des élèves ont donné des exemples.

Lorsqu'il s'agit d'écrire des nombres décimaux sous forme de fractions, bien que la démarche soit identique et connue depuis la classe de sixième, les avis sont bien plus partagés :

QUESTION 8

«Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction». Est-ce vrai ou faux ?

Vrai	10
Faux	8
Indécis	4

Personne n'a apporté de justifications valables, aussi bien pour prouver que l'affirmation est vraie ou fausse. Ce point apparaît comme étant confus pour les élèves. Cela viendrait-il du fait que la notion de nombre décimal n'est pas clairement définie pour eux ? Nous verrons par la suite qu'en fait ils ne savent pas bien si un nombre décimal a un nombre fini ou non de chiffres après la virgule. De plus, le fonctionnement de la calculatrice peut abuser l'utilisateur :

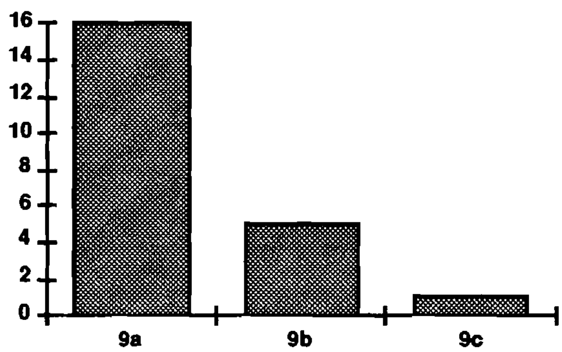
* le calcul porte sur un nombre de chiffres plus grand que ceux de l'affichage,

* un système d'arrondi automatique fait croire que certains calculs s'effectuent avec des valeurs exactes $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Les questions 9 et 10 ont en fait proposé une démarche inverse : étant donné plusieurs fractions, est-il possible de les différencier les unes des autres ? Y a-t-il parmi ces fractions des nombres entiers, des nombres décimaux, "*des nombres décimaux qui ne se finissent pas*" ?

QUESTION 9. CLASSEMENT DE LA PREMIÈRE LISTE

Il s'agissait de différencier les fractions entières des fractions décimales
9a : Les nombres entiers d'une part, les nombres décimaux d'autre part.
9b : Les nombres entiers et décimaux d'une part, les fractions d'autre part.
9c : Indécis.



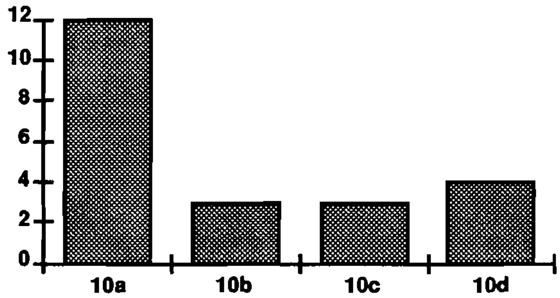
Il semble qu'une grande majorité d'élèves ait été gênée d'avoir à regrouper dans un même ensemble les entiers et décimaux. Bien que formant l'ensemble de ce qu'ils reconnaissent comme nombre, entiers et décimaux apparaissent comme deux entités bien différentes. Ces élèves choisissent donc une autre stratégie de regroupement, essayant d'inclure les fractions à l'un ou l'autre des deux ensembles : les nombres entiers d'une part et les nombres décimaux d'autre part.

Un peu moins d'un quart des élèves a regroupé d'une part les entiers et décimaux proposés et d'autre part les fractions. Pour ces élèves, l'idée qu'ils ont des nombres semble assez proche du schéma 1 que nous avions représenté à la page 13 : tout ce qui est considéré comme nombre est mis dans un ensemble et les fractions sont à part.

QUESTION 10. CLASSEMENT DE LA DEUXIÈME LISTE

Il s'agissait cette fois de différencier les fractions décimales des fractions non décimales.

10a : Les fractions décimales d'une part, les fractions non décimales d'autre part.
10b : Toutes les fractions dans le même ensemble.
10c : Autres réponses.
10d : Indécis.



Pour plus de la moitié des élèves, il existe donc bien une distinction possible entre toutes les fractions proposées. Certaines sont "des nombres décimaux" et d'autres "*des nombres décimaux qui ne se terminent pas*" (terme utilisé par les élèves). Le besoin de préciser "*qui ne se terminent pas*" montre que la définition de nombre décimal ne correspond pas à la définition donnée en mathématiques. D'ailleurs, les élèves ayant choisi de classer suivant le critère 10b, justifient ainsi : "*Les résultats sont tous des décimaux. Je les mets donc tous dans le même ensemble*".

QUESTION 11

Existe-t-il un nombre entier positif qui élevé au carré est égal à 4 ?

Tous les élèves ont donné le nombre 2 comme solution. La racine carrée de certains nombres peut donc être un nombre entier.

QUESTION 12

Existe-t-il un nombre entier positif, puis décimal, qui élevé au carré est égal à 2 ?

Premier cas : nombre entier

Vrai	2
Faux	20

Deuxième cas : Nombre décimal

Vrai	9
Faux	13

Pour les réponses positives, tous ont donné comme réponse une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec plus ou moins de décimales.

Il apparaît, après analyse des résultats de ces questions :

* qu'il existe bel et bien une confusion autour de la définition de nombre décimal. Les élèves qui, au deuxième cas, donnent comme réponse une valeur approchée de $\sqrt{2}$, ne savent pas exactement combien de chiffres après la virgule doit compter leur réponse.

* qu'il est nécessaire de mettre quelques réserves à propos des réponses négatives obtenues dans ce même cas. En effet, faute de bien comprendre ce qu'est un nombre décimal, il est possible que beaucoup d'élèves aient alors répondu négativement sans être capable de donner aucune justification pour expliquer ce choix.

Conclusion. Nous pouvons à présent compléter le schéma 1 de la page 13. L'ensemble des nombres reconnus est toujours formé de l'ensemble des nombres entiers et de l'ensemble des nombres décimaux. Mais ce dernier se compose de deux sous-ensembles : "*les nombres décimaux qui se terminent*" et "*les nombres décimaux qui ne se terminent pas*". Les touches $\sqrt{\ }$ et $\div$ des calculatrices permettent de considérer les fractions et les racines carrées comme des nombres. Certaines fractions sont entières, d'autres décimales, d'autres "décimales qui ne se terminent pas". Les racines carrées peuvent être des nombres entiers. Pour celles qui ne le seraient pas, une partie des élèves pense alors avoir à faire à un nombre décimal, l'autre partie se trouvant devant un nombre plutôt indéfinissable.

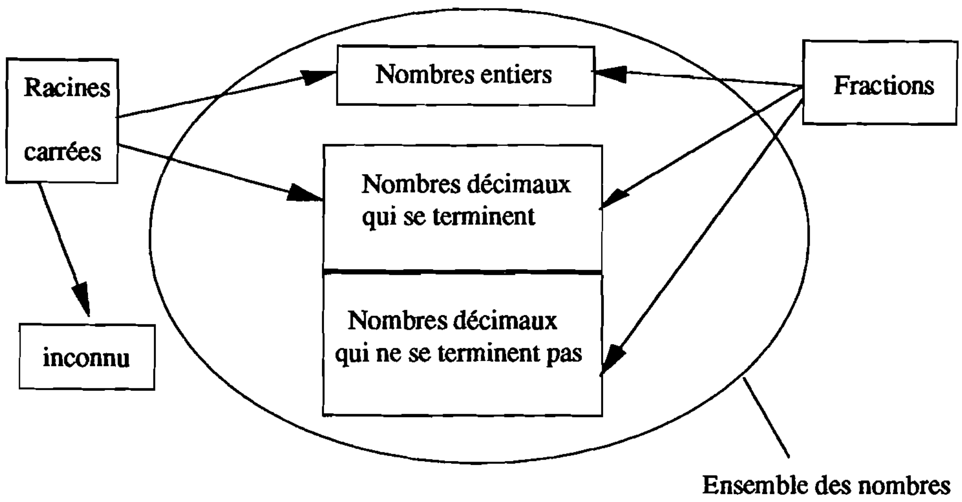


Schéma 2

Le fait que $N \subset Q$ est reconnu par la plus grande partie des élèves. Mais il apparaît que les élèves ne savent pas (pour la plupart) ce qu'est un nombre décimal et l'inclusion $D \subset Q$ n'est pas évidente pour eux.

III. Rôle et importance de la calculatrice.

L'influence de la calculatrice chez les élèves n'est plus à montrer lorsque nous observons le schéma 2 que nous venons de présenter. Néanmoins, l'analyse des questions 14 et 17 devrait nous permettre de mesurer l'importance de son utilisation.

Premier cas : Est ce que $\sqrt{2} = 1{,}4142136$?

Vrai	14
Faux	7
Indécis	1

Deuxième cas : Est ce que $\frac{1}{3}$=0,3333333 ?

Vrai	19
Faux	3

Ce qu'affiche la calculatrice n'est pas remis en cause par une grande partie des élèves et la distinction entre valeur exacte et valeur approchée n'est pas faite. D'ailleurs, le symbole = d'une calculatrice est ambigu. Comment penser que $1 \div 3$ est différent de 0,3333333 alors que l'on vient d'appuyer sur la touche = ? La différence du nombre de réponses positives entre les deux cas ci-dessus peut s'expliquer pour deux raisons :

* La phrase souvent répétée aux élèves "ce que vous lisez sur votre calculatrice n'est pas $\sqrt{2}$" a pu s'inscrire comme un mécanisme chez eux.

* Les élèves ne savent pas si 0,3333333 c'est effectivement 0,3333333 ou bien des 3 indéfiniment après la virgule. Ils confondent 0,3333333 et 0,333... La réponse est donc vraie pour eux.

La deuxième expérimentation va nous éclairer sur ce point (remarque : les élèves ne devaient pas utiliser leur calculatrice et il y avait 19 élèves présents ce jour là).

Est-ce que 0,3333333...= 0,3333333 ?

Non	18
Oui	1

Est-ce que $\frac{1}{3}$ = 0,3333333 ou $\frac{1}{3}$ = 0,3333333....?

$\frac{1}{3} = 0{,}3333333$	2
$\frac{1}{3} = 0{,}3333333...$	17

Les élèves, perçoivent bien ici une différence entre 0,333... et 0,3333333. Ils n'ont pas cette fois à leur disposition leur calculatrice. Devant choisir l'une ou l'autre écriture pour $\frac{1}{3}$, ils choisissent très majoritairement la deuxième. Cette distinction est-elle induite par le questionnaire ou bien peut-on attribué cette différence de résultats à l'influence de la calculatrice ?

La confiance donnée à la calculatrice apparaît bien grande lorsqu'on étudie les résultats de la dernière question du 1er questionnaire :

Réponses	$\frac{1}{3} \neq 0{,}3333333$ $0{,}3333333 = \frac{3333333}{10000000}$ $\frac{1}{3} \neq \frac{3333333}{10000000}$	$\frac{1}{3} = 0{,}3333333$ $0{,}3333333 = \frac{3333333}{10000000}$ $\frac{1}{3} = \frac{3333333}{10000000}$	$\frac{1}{3} = 0{,}3333333$ $0{,}3333333 = \frac{3333333}{10000000}$ $\frac{1}{3} \neq \frac{3333333}{10000000}$	Autres
Effectifs	2 élèves	15 élèves	3 élèves	2 élèves
		Les élèves semblent avoir uniquement utilisé leur calculatrice pour répondre.		

Conclusion. Pour 18 élèves parmi 22, $\frac{1}{3}$ et $\frac{3333333}{10000000}$ sont une même chose puisque les nombres affichés par la calculatrice après avoir effectué les divisions sont identiques. Les liens que nous avions représentés au schéma 2 (page 16) entre les fractions, les racines carrées et l'ensemble des nombres semblent renforcés. La calculatrice a le désavantage, comme nous venons de nous en apercevoir, d'entretenir une confusion sur la nature des nombres, non seulement par sa fonction de "décimalisation" de tous les nombres, mais aussi par l'incertitude qu'elle crée sur la partie décimale d'un nombre.

Conclusion générale

Les observations faites confirment l'ambiguïté relative à la conception des nombres décimaux pour les élèves de collège : "un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une virgule ; il peut avoir un nombre infini de chiffres non nuls après la virgule ; il y a des nombres décimaux qui se terminent et d'autres qui ne se terminent pas". Cette ambiguïté semble persister pour beaucoup de personnes n'ayant pas eu l'occasion d'approfondir leurs connaissances en mathématiques après la classe de Terminale. M.J. Perrin (1992) après avoir étudié les résultats obtenus à un test en direction de deux promotions d'élèves-instituteurs dans le cadre d'un enseignement du DEUG premier degré en 84-85 et 85-86 signale (p. 176) :

direction de deux promotions d'élèves-instituteurs dans le cadre d'un enseignement du DEUG premier degré en 84-85 et 85-86 signale (p. 176) :

«la nature des nombres décimaux, leur place par rapport aux autres ensembles de nombres, la différence entre nombre et écriture d'un nombre sont des questions qui sont loin d'être réglées pour les élèves-instituteurs : les fractions sont difficilement acceptées comme nombre décimal par certains alors que des écritures décimales infinies le sont.»

R. Neyret (1995), qui a étudié en détail les rapports aux systèmes de nombres à la fin du collège et à l'entrée à l'IUFM, conclut (p.149) :

«Ainsi les difficultés et les erreurs que l'on peut repérer chez l'une ou l'autre des populations sont de même type pour les exercices que nous leur avons proposés et vont dans le sens des remarques que nous avons faites dans l'analyse des différents questionnaires :
- pas de distinction entre les nombres et leurs écritures,
- difficultés à mettre en rapport les différents D_i (ensemble des décimaux s'écrivant avec au plus i chiffres non nuls après la virgule)
- peu d'interrelations entre les différents systèmes de nombres,
- en particulier, difficultés à voir quelle est la fonction des décimaux par rapport aux autres ensembles de nombres».

Les élèves au niveau collège n'ont aucune idée sur la façon dont les nombres décimaux sont définis en mathématique. Ils situent seulement ces nombres par rapport aux entiers : "les nombres entiers sont les nombres qui s'écrivent sans virgule".

Certes la notion de nombre décimal n'est pas facile à aborder. Les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut n'importe quel nombre réel ; et pourtant il existe des nombres qui ne sont pas des décimaux. Il existe des nombres décimaux ayant un nombre aussi grand que l'on veut de chiffres non nuls ; et cependant un nombre décimal ne comporte qu'un nombre fini de chiffres non nuls.

Cette conception est en relation très forte avec les pratiques d'enseignement et l'usage des calculatrices. Lorsqu'ils aboutissent à un résultat comme $\frac{7}{5}$, les élèves demandent souvent si ils doivent continuer le calcul ou non. Ils perçoivent une fraction, en particulier au niveau de la classe de 3ième, comme une division à effectuer ou comme l'écriture du résultat de cette opération (Valla L., 1995). De même, ils ne jugent pas satisfaisant un résultat laissé sous la forme $\sqrt{2}$. N'ont-ils pas abordé la notion de racine carrée par l'intermédiaire de la touche d'une calculatrice[4] ? Il n'y a pas toujours une réflexion particulière proposée à ce moment là mettant en évidence que $\sqrt{2}$ ne peut pas être un décimal. Ni quel procédé permet de retrouver sur une calculatrice que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Cette perception que les élèves ont des décimaux pouvant avoir éventuellement une infinité de chiffres non nuls après la virgule est tout à fait "compatible" avec les problèmes qu'ils rencontrent en 1er cycle. Aucune des activités proposées ne conteste vraiment cette conception. L'obstination des professeurs à demander les résultats sous forme d'écritures fractionnaires ou avec des radicaux est simplement associée à leur défiance à utiliser les calculatrices. Nous faisons l'hypothèse que cette conception est associée à une conception erronée du fonctionnement des calculatrices. Les élèves sont généralement persuadés que la

[4]la notation $\sqrt{2}$ apparaît essentiellement comme un artifice de calcul (exécuté par une calculatrice) permettant de retrouver le nombre dont 2 est le carré (voir Anton S. (1994)).

que, pour une calculatrice scientifique, la représentation interne des nombres comporte seulement 13 chiffres significatifs et un exposant fixant l'ordre de grandeur du nombre.

Lorsqu'un élève écrit $\frac{1}{3} = 0{,}333333$, il sous-entend généralement que le nombre n'est pas entièrement écrit. Il y a pour lui une infinité de 3. Depuis quelques années, on évite soigneusement dans l'enseignement en 1er cycle, la notation 0,333 333 ... Pourquoi ce souci ? Et plus généralement, pourquoi parait-il gênant de laisser s'installer cette conception erronée des décimaux ?

Au niveau mathématique tout d'abord, si on considère $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ comme 0,333 333... + 0,666 666... on aboutit à 1 = 0,999 999... . Et il semble difficile à ce niveau de laisser les élèves percevoir sans aide l'identification possible de ces deux notations[5]. De plus, il demeure possible de définir l'écriture décimale périodique d'un rationnel mais comment donner une définition de "l'écriture décimale illimitée" 1,414213562373... de $\sqrt{2}$? Enfin, même si les programmes ne proposent pas l'étude des ensembles de nombres, n'est-il pas nécessaire de développer quelques réflexions à propos des caractéristiques des différents types de nombres réels.

Au niveau des calculatrices ensuite, peut-on espérer une utilisation rationnelle d'une calculatrice scientifique sans une représentation à peu près correcte du mode de calcul de la machine ? Il est possible de mettre facilement en évidence quelques limites de précisions des calculs et de montrer que les algorithmes opératoires utilisant les écritures décimales ne permettent pas toujours de trouver la valeur exacte d'un résultat.

Si on veut permettre aux élèves de se faire une idée plus précise des nombres décimaux, de leurs caractéristiques et de leurs limites ainsi que des nombres rationnels et irrationnels il est nécessaire d'envisager des situations permettant de lever les ambiguïtés que nous avons pu trouver aux travers des différentes réponses apportées par les élèves aux différents questionnaires que nous leur avons soumis. Reste posé le problème du choix de ces activités.

Bibliographie

ANTON S. (1994). *Conceptions de la racine carrée,* Mémoire professionnel PLC2 IUFM de Grenoble.

ASSUDE T. (1989). Racines carrées : conception et mise en situation in *«petit x»* . n° 20, IREM de Grenoble

BARTH B. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction, méthodes pour une meilleure réussite à l'école,* Éditions Retz.

BOUVIER A. (1986). *Didactique des mathématiques, le dire et le faire,* Éditions Nathan.

[5] en posant $x = 0{,}999\ldots$, on peut admettre que $10\,x = 9 + x$ et on obtient $9\,x = 9$!

BOUVIER A. (1986). *Didactique des mathématiques, le dire et le faire,* Éditions Nathan.

COLLETTE J.-P. (1973). *Histoire des mathématiques,* Éditions du renouveau pédagogique : Montréal.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1982). *Routes et dédales, Histoire des Mathématiques,* Éditions Études Vivantes.

FLETCHER T.J.(1970). *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui. Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré,* Éditions de l'office central de librairie.

GHYKA M. (1978). *Philosophie et mystique du nombre,* Éditions Payot.

HOCQUENGHEM M.L., MISSENARD C. et D., col. IREM Université Paris 7. (1980). *Histoire des mathématiques pour les collèges,* Éditions Cédic.

NEYRET R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formations des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres,* Thèse d'Université, Université J. Fourrier Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux, Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème,* Thèse de doctorat d'état, Paris VII.

RUSSEL B.(1991). *Introduction à la philosophie mathématique,* Éditions Payot.

VALLA L. (1995). *Les fractions : quelles perceptions au collège ?* Mémoire professionnel PLC2, IUFM de Grenoble.

Annexe 1

Questionnaire

Ceci est individuel, anonyme, et ce n'est pas noté.

Les réponses obtenues permettront l'élaboration d'un projet sur la conception des nombres en classe de 3ème.

Quelques consignes :

- Répondre à toutes les questions.

- Même si tu n'es pas sûr d'une réponse, écris la.

- N'oublie pas de donner des exemples, de faire des dessins (si nécessaire), pour illustrer ce que tu expliques.

- Tu peux utiliser ta calculatrice.

1) Comment pourrais-tu expliquer à quelqu'un ce qu'est un nombre entier ?

2) Comment pourrais-tu expliquer ce qu'est un nombre décimal ?

3) Comment pourrais-tu expliquer ce qu'est une fraction ?

4) Thomas pense que $\sqrt{2}$ est un nombre.
Julien pense que Thomas a tort et que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre.
A ton avis, qui a raison ? Thomas ou Julien ?
Quels arguments donnerais-tu pour convaincre que $\sqrt{2}$ est un nombre ou pour convaincre que ce n'en est pas un.

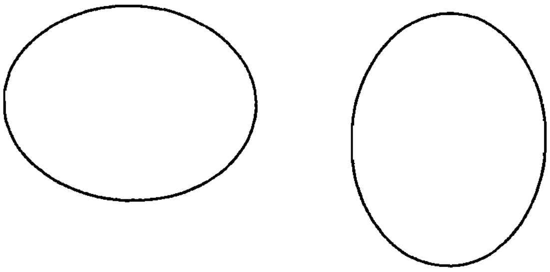
5) Ecris le nombre 2 sous la forme d'une fraction.

6) "Tous les nombres entiers peuvent s'écrirent sous la forme d'une fraction".
A ton avis, est-ce vrai ou faux ? Vrai
Faux
Justifie ta réponse.

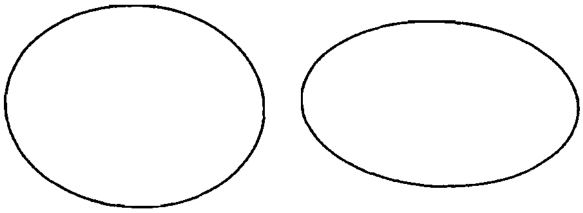
7) Ecris le nombre 0,2 sous la forme d'une fraction.

8) "Tous les nombres décimaux peuvent s'écrirent sous la forme d'une fraction".
A ton avis, est-ce vrai ou faux ? Vrai
Faux
Justifie ta réponse.

9) Voici une liste de nombres :
$\frac{4}{2}$ 1 3 $\frac{3}{5}$ 0,3 10 $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$.
Regroupe ces nombres dans deux ensembles différents A et B.
Explique ton choix.



10) Mêmes questions avec la liste de nombres suivante :
$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{13}{11}$.



11) Existe t-il un nombre entier positif qui élevé au carré donne 4 ? Oui Non

Si oui, lequel ?

12) Existe t-il un nombre entier positif qui élevé au carré donne 2 ? Oui Non

Si oui, lequel ?

13) Existe t-il un nombre décimal qui élevé au carré donne 2 ? Oui Non

Si oui, lequel ?

14) Est-ce que $\sqrt{2} = 1,41421$?

15) Connais-tu une autre écriture de $\sqrt{9}$? Si oui, laquelle ?

16) Connais-tu une autre écriture de $\sqrt{5}$? Si oui, laquelle ?

17) Les trois égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\frac{1}{3} = 0,33333$ Vrai Faux

b) $\frac{3333333}{10000000} = 0,3333333$ Vrai Faux

c) $\frac{3333333}{10000000} = \frac{1}{3}$ Vrai Faux