PEUT-ON ENSEIGNER DES MÉTHODES ?

COMMENT LES ÉLÈVES APPRENNENT-ILS DES MÉTHODES ?*

Claude CASTELLA
Alain MERCIER
IREM de Marseille

Nous montrons ici combien un enseignement spécifique des méthodes, en mathématiques, est illusoire lorsqu'il est déconnecté de l'activité mathématique elle-même. L'apprentissage de méthodes ne peut s'effectuer qu'au sein de l'activité mathématique, et ne peut aboutir à former un objet spécifique, distinct. Nous dénonçons d'abord, non seulement l'absence de rentabilité des fiches d'aide méthodologique générales (listes de procédures ou descriptions d'actions à effectuer) mais leur effet négatif sur les apprentissages des élèves, en mathématiques. L'observation des élèves montre ensuite que l'enseignement de méthodes ne doit pas proposer la somme des savoirs utiles à la résolution des problèmes mais la théorie mathématique du champ de problèmes à résoudre, elle même.

L'expertise impossible des élèves

Le dispositif particulier qui est observé dans cette première partie s'inspire du courant innovateur de « l'évaluation formatrice », qui privilégie un travail sur « les procédures des tâches » comme aide à l'apprentissage ; ce travail serait « un passage obligé à l'établissement de l'expertise ». Mais nous montrerons comment l'élaboration d'une « réponse d'expert » se fait principalement à l'aide de savoirs relatifs à la situation institutionnelle comme à la situation mathématique, c'est-à-dire à des savoirs qui ne correspondent pas à des procédures. Quant aux élèves qui « possèdent une procédure standard », nous montrerons qu'ils ont des difficultés plus grandes que les autres pour entrer dans une situation nouvelle si les problèmes qu'ils y rencontrent nécessitent une disponibilité partielle de cette procédure : les acquis procéduraux ne résistent pas aux ruptures du contrat de la situation.

La notion d'expertise

Il n'est pas aisé de trouver, dans les thèses générales de la psychologie cognitive, une définition de l'expertise. *L'expert* est souvent présenté comme celui dont les connaissances sont plus structurées, plus intégrées, plus rapidement accessibles et utilisables (Gobbo C., Chi M. 1986). La théorie de l'évaluation formatrice reprend l'idée d'expertise en l'associant à la notion d'*instance évaluative*, l'instance évaluative

---

* Ce texte a été publié dans le n° 1 du journal de la commission Inter-Irem "Didactique" en septembre 1994 (éditeur : Irem de Clermont-Ferrand).

de l'expert étant opposée à « l'instance évaluative spontanée de l'apprenant (Nunziati G. 1990) ». Précisons ce que les tenants de l'évaluation formatrice entendent par là. C'est aux travaux de la psychologie soviétique sur l'apprentissage qu'il faut référer la notion d'instance évaluative. Vygotski (1934, traduction de Sève F. 1985) définit *l'action* comme l'unité d'analyse du processus d'apprentissage : elle se déroule en cinq phases, non nécessairement consécutives : la représentation du but et des propriétés des objets, l'anticipation, la planification, l'exécution, enfin le contrôle ou évaluation, constitutif de toutes les autres phases. La notion d'instance évaluative ou de système interne de pilotage désigne ce qui permet de conduire, à chaque instant, le contrôle du bon déroulement de toutes les phases de l'action.

L'évaluation formatrice propose un dispositif pédagogique dont l'un des objectifs est de permettre à l'apprenant de passer d'une « instance évaluative spontanée », empirique, à un « système de pilotage rationnel » qui caractériserait l'expert.

Nous examinons la notion d'instance évaluative d'expert en référence permanente aux conditions, mathématiques et didactiques, dans lesquelles elle est amenée à fonctionner. L'outil conceptuel qui nous permet de réaliser cet examen est la notion de *contrat didactique* (Brousseau G. 1984). Cette notion est issue de la didactique des mathématiques, qui définit sous ce nom « l'ensemble des conditions, règles implicites de comportement et attentes des divers partenaires dans leurs rapports au savoir, qui est l'enjeu de leur relation ». Cette notion apporte donc aux situations d'expertise examinées ici l'éclairage des spécifications du contexte institutionnel de l'action. Notre objet d'étude est alors *l'expert en situation*, c'est-à-dire en référence aux conditions dans lesquelles se manifeste son expertise.

L'instance évaluative de l'expert pose problème : en effet, l'expert fonctionne par automatisme. C'est d'ailleurs l'automatisation de son action qui en réduit la durée, ce qui conduit l'expert à supprimer ce qui n'est pas pertinent pour l'exécution de l'action. Alors, l'analyse introspective de l'action experte montre une apparente « inconsistance matérielle de la pensée », soulignée par Pavlov A.S. (1977) : les outils matériels ou verbaux d'aide à la pensée et de contrôle de celle-ci, ne sont apparemment plus nécessaires et il ne reste plus qu'un « sentiment » qui « joue le rôle de lampe de contrôle sur un tableau de bord », le témoin d'une action devenue invisible. C'est ce que nous allons observer par l'analyse du cas de deux fonctionnements définissables a priori comme des fonctionnements experts. Nous allons tenter d'analyser plus particulièrement le rôle du système de pilotage de l'action. Les experts observés, enseignants de mathématiques, ont été amenés à fonctionner dans une situation apparemment identique, en présence du même problème.

Les différences de comportement observées sont relatives à la position institutionnelle différente des acteurs. En effet, la situation que nous observons est une situation *didactique*. Il s'agit précisément d'un stage d'enseignants de mathématiques, réalisé par deux formateurs. L'un présente une séquence d'enseignement de l'algèbre en classe de Quatrième, l'autre est observateur. Il ne connaît pas l'enseignement présenté et il va résoudre, lui aussi, l'exercice de mathématiques proposé aux stagiaires comme exercice exemplaire de l'utilisation de l'algèbre (Chevallard Y., Conne F. 1984). La question posée est la suivante : « ...On pose aux élèves ce problème : *Choisir trois entiers consécutifs, calculer la différence entre le carré du nombre du milieu et le produit des nombres extrêmes ; recommencer ; formuler une conjecture puis démontrer votre conjecture.* Faites le problème... »

L'expertise obligatoire du co-formateur

Intéressons-nous dans un premier temps au co-formateur en position d'observateur. Il a résolu l'exercice pour « voir comment il s'y prend dans sa tête ». La seule trace de son action est dans la réponse, formulée à voix basse : « ça doit tourner autour de 1 », longtemps avant que les stagiaires ne soient en situation d'affirmer avec assurance : « c'est 1 ». Nous aurons recours à l'interrogation introspective non inductrice pour « en savoir plus » :

J'ai un instant de flottement pour comprendre la question.

Je vois les stagiaires qui se mettent à écrire.

Je décide de ne pas écrire, sans raison.

J'ai une image un peu floue qui apparaît, mais sous forme écrite : n $n+1$ $n+2$, puis quelques fragments du produit développé des extrêmes et, distinctement, le 2n.

Je pense au 2n du carré de $n+1$.

Je pense 1.

Je dis : ça doit tourner autour de 1.

Au moment où je dis cela, j'ai conscience que ma réponse n'est pas sûre mais je ne peux pas recommencer, c'est trop long.

Je pense : ça doit être ça, 1 est souvent la réponse dans ce genre de problème, et : c'est pas embêtant à trouver, c'est bon en situation de formation.

Reprenons le fonctionnement conscient de la validation de la réponse : le risque pris en raison d'une contrainte de « temps de réponse » est nettement ressenti. La validation se fait par la recherche de garanties successives dans les caractères de la situation, *après coup* : 1) la réponse est fréquente, donc probable ; 2) elle est d'autant plus probable que c'est le premier exercice d'une séquence d'enseignement de l'algèbre.

Nous observons bien les caractères de la « manipulation experte » du savoir : l'action est automatique, puisque les étapes non pertinentes à l'exécution sont supprimées afin d'obtenir une diminution sensible du temps de réponse. Mais un phénomène inattendu apparaît alors, l'évaluation de la réponse s'effectue seulement en relation au contrat de la situation, et l'expert s'interdit toute confirmation par un « retour aux procédures ». La confirmation du résultat mathématique est recherchée dans la situation, les deux repères utilisés font usuellement partie des « non-dit » de l'analyse du savoir, ils relèvent du contrat didactique. Cela peut paraître d'autant plus étonnant que l'erreur n'est pas permise à l'observateur, mais il montre ainsi qu'il n'est pas comme les stagiaires. Son raisonnement développé est le suivant : comme la situation didactique nécessite un exercice d'introduction « rapide » donc à réponse aisée, « facile » à effectuer - sa résolution n'étant pas l'enjeu didactique de cette formation - l'évaluation de la réponse peut se faire uniquement à partir de ce contrat, mais il n'est pourtant jamais explicité.

L'expertise interdite des stagiaires

Les stagiaires, puisqu'il s'agit d'algèbre, puisqu'ils sont en situation de résoudre *en élèves* un exercice d'algèbre, commencent par *écrire*. Ces enseignants de mathématiques sont, *dans l'abstrait*, tout aussi capables que le formateur de fonctionner par automatisme, mais leur automatisme n'est pas du même ordre : ils montrent un automatisme d'élèves. De même, d'autres techniques mathématiques auraient pu être disponibles au co-animateur ou aux stagiaires si leurs expertises avaient pu être d'un autre type. Ils auraient pu savoir par exemple, que « pour trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, le carré du terme médian est égal au produit des extrêmes augmenté du carré du pas ». En analysant en professeurs cet exercice d'algèbre scolaire, ils auraient pu « bien choisir » les « noms algébriques » des trois nombres consécutifs de manière à respecter la symétrie donnée par l'énoncé : $n - 1$, n et $n + 1$, donnent aussitôt $n^2 = (n^2 - 1) + 1$. Ces solutions leur étaient de fait aussi peu disponibles que celle-ci : « Un rectangle $(x + a, x - a)$ diffère du carré (x, x) par le terme a^2 ». Mais ces types de solutions expertes sont interdites au stagiaires en raison de leur position dans le stage de formation, car ils étudient l'effet de l'exercice sur des élèves : de telles solutions ne peuvent pas être validées à l'aide du savoir mathématique demandé à des élèves débutants. L'énonciation des règles du calcul algébrique doit seule valider une solution didactiquement acceptable. Les stagiaires doivent donc *montrer comment on fait* l'exercice *quand on est élève*. Comme les élèves, ils engagent donc « une action qui montre ce qu'elle fait », et ils écrivent. Ils font d'abord un ou deux exemples numériques *pour voir*, parce que l'énoncé le suggère. Ensuite, ils posent le problème avec l'outil algébrique comme la situation le suggère. Ils écrivent donc les trois entiers consécutifs n, $n + 1$, $n + 2$; ils posent la différence $(n + 1)^2 - n(n + 2)$; ils font le calcul rapidement et aboutissent au résultat ...= 1. Ils évaluent leur résultat comme le feraient des élèves experts en calcul algébrique : ils vérifient, soit avec les exemples qu'ils ont commencé par chercher (c'était bien 1) soit en analysant leur calcul (la vérification se fonde alors sur l'explicitation totale du calcul).

Expertise et apprentissage, les problèmes posés par l'évaluation formatrice

L'étude que nous venons de réaliser a confirmé la caractérisation première du fonctionnement de l'expert, l'automatisation de l'action menée.

Elle a montré *la disparition simultanée des repères procéduraux* dans une instance évaluative experte, ce qui réduit les étapes de l'exécution. Seule a subsisté une validation après coup, référée à des normes contextuelles. C'est l'observation surprenante née de l'étude en situation, sous les lois du contrat didactique omniprésent dans la manipulation d'objets et de savoirs mathématiques à l'école : le « savoir d'expert » d'un sujet dépend de la position institutionnelle du sujet observé. Car le savoir d'expert n'est pas seulement un savoir mathématique opératoire ou méthodologique, c'est aussi un savoir sur la situation mathématique du problème et sur la situation institutionnelle dans laquelle le problème est posé.

La construction, chez l'élève, d'une instance évaluative d'expert, constitue l'un des objectifs d'un dispositif d'évaluation formatrice. Mais *dans les pratiques* d'évaluation formatrice, la mise en place d'une « bonne » instance évaluative se fonde sur un travail *de type méthodologique*, l'explicitation des procédures des catégories de tâches, procédures qu'il s'agit, pour l'élève, de s'approprier.

L'outil méthodologique central d'un dispositif d'évaluation formatrice est « la carte d'étude » qui comporte en principe, outre les procédures, pour chaque sujet particulier, le motif, les conditions de la tâche, les connaissances qui lui sont inhérentes, les propriétés du matériel de départ. Elle est « le plan de la base d'orientation du sujet » qui est constituée par ses représentations du milieu et de l'action, elle se doit d'être *individuelle*. Mais dans la réalité des pratiques enseignantes se référant à l'évaluation formatrice en mathématiques, la carte d'étude fait le plus souvent place à « la fiche critériée » outil méthodologique *collectif* énonçant les procédures des types de tâches référées à des « critères de réussite » fixant leur seuil d'acceptabilité. Ces procédures sont alors présentées sous une forme algorithmique : il s'agit d'établir un rapport conscient à chacune d'elles, ce rapport étant considéré comme le passage obligé vers leur appropriation. Le passage à l'automatisation suppose donc que se produise l'oubli fonctionnel de l'expert, dont « les automatismes ne sont pas des combinaisons d'actions intermédiaires mais des comportements nouveaux » (Nunziati G. 1990, p.52). Ainsi les dispositifs de travail méthodologique produits par l'évaluation formatrice créent des situations où se posent avec force les questions suivantes :

- Comment favoriser la « déconscientisation » nécessaire à l'apparition de l'automatisme, chez les élèves, en situation scolaire ? *Comment passer d'une « fiche critériée » listant des procédures à la « déprocéduralisation » de l'expert ?*
- Comment permettre à l'élève de prendre des repères dans sa situation d'enseigné ?

L'explicitation des procédures et la privatisation du savoir

La première perspective de réponse à ce questionnement est donnée par l'idée de *privatisation du savoir.* La nécessité reconnue de la privatisation du savoir permet d'intégrer les spécificités individuelles comme paramètres du contexte dans lequel le savoir est en jeu. Mais comment favoriser la privatisation du savoir au sein de l'institution scolaire d'enseignement des mathématiques, si l'on doit sans cesse « expliciter » de nouvelles procédures pour montrer celles que l'on met en oeuvre, *puisqu'en mathématiques chaque objet de savoir ou presque est associé à un ensemble particulier de procédures nouvelles dont l'apparition force à une réorganisation des procédures anciennes ?*

La reconnaissance à l'élève d'un domaine de savoir privé passe nécessairement par l'abandon du pouvoir de l'enseignant omniprésent dans la construction du savoir de l'élève, le pouvoir de demander à tout voir. Nous l'avons observé lors de l'analyse de l'action des stagiaires : la nécessité de *montrer que l'on sait* interdit l'oubli fonctionnel qui est associé au passage à l'automatisme. Cela suppose une limitation manifeste de l'action de contrôle de l'enseignant comme de la « fiche critériée » méthodologique qui est le support de ce contrôle.

Le contrôle des procédures et la conscience de savoir

La deuxième observation importante que nous avons faite est celle de la conscience de savoir qui caractérise le fonctionnement expert. Est-ce l'assurance de savoir que possède l'expert institutionnellement reconnu, qui l'autorise à valider ses réponses avec des références relatives au contrat de la situation au lieu de revenir à des normes sur les procédures ? Si c'est bien le cas, il est fondamental de favoriser l'émergence de cette conscience de savoir chez les élèves, en des points et à des moments qu'il faudra déterminer. Mais le fonctionnement des experts montre que cette conscience est relative à la situation où le savoir s'utilise, l'expert doit en avoir la maîtrise.

La validation des procédures et l'évaluation de la pertinence des réponses

Il faut par conséquent effectuer un travail d'étude de ces savoirs qui, comme nous l'avons vu, jouent un rôle important dans la validation de la réponse experte. Ces savoirs ne donnent pas des certitudes à l'instar des savoirs disciplinaires, ils fonctionnent plutôt comme des vecteurs d'influence, des facteurs de probabilité d'une réponse. Ils permettent de s'assurer de celle-ci, à cette seule condition que le contrat soit bien défini et stable, ce qui n'est pas toujours le cas en mathématiques. L'expert est conscient de l'influence de ces savoirs sur la tâche à effectuer, de leur capacité de prédiction de l'exactitude d'une réponse, et ces savoirs lui sont disponibles.

Les dispositifs d'évaluation formatrice mettent en place, par le biais des critères de réussite, des validations des réponses finales ou intermédiaires en référence aux normes des produits attendus pour ces réponses. Il existe d'autres types de validation non traitées par ces dispositifs mais déterminantes dans le fonctionnement expert : la validation fonctionne alors en relation au contrat de la situation ; les élèves doivent en disposer.

L'explicitation et l'implicitation des procédures

Enfin, la recherche d'un rapport optimal d'efficacité entre les temps de « l'explicitation » et de « l'implicitation » nous apparaît fondamentale au sein d'une situation d'enseignement. Pour l'évaluation formatrice, savoir, c'est avoir conscience de son savoir, avoir la conscience nette des procédures ou « conscience de savoir faire », caractère primordial de la position d'expert ; mais apprendre, c'est « déconscientiser » les procédés d'apprentissage pour ne garder que cette conscience de savoir. En conséquence, nous ne devons pas perdre de vue que la mise en place de *l'explicitation n'est qu'un moyen, comme tout travail méthodologique* ; c'est le moyen de rendre conscientes les procédures. A ce titre, l'explicitation demandée ne doit pas obliger l'élève à expliciter sur des points où ce passage à l'implicite est déjà fait ; l'explicitation doit donc être gérée dans ses rapports à « l'implicitation ». La recherche d'un rapport optimal d'efficacité entre explicitation et implicitation pose le problème du *temps* passé au travail méthodologique d'explicitation, un temps sans limite interne (on peut toujours expliciter encore), surtout lorsque l'explicitation se traduit par une réduction algorithmique des procédures. La psychologie cognitive (Netchine-Grynberg G., 1988, 264-271) a bien établi que *les règles et procédures ne reflètent qu'une part limitée du réseau des connaissances impliquées dans un problème*. Le temps passé à l'explicitation des procédures des tâches pose la question du temps restant pour l'enseignement - et l'apprentissage - de ces autres connaissances.

Les «acquis procéduraux» face à une rupture du contrat didactique

La notion d'instance évaluative s'est enrichie de l'hypothèse d'un fonctionnement sous contrat. L'instance évaluative experte n'a pas validé sa réponse à partir de normes rationnelles, exactes, internes à l'action, mais à partir de savoirs induisant une forte présomption d'exactitude de la réponse... *Cela disqualifie leur enseignement comme outils méthodologiques d'accès à l'expertise.*

L'observation rapportée ici a été effectuée auprès d'élèves de BEP Agricoles entraînés à une automatisation procédurale systématique sur l'étude des fonctions affines. Trois problèmes « voisins » du problème standard leur ont été proposés. Le premier reprenait les questions classiques de l'enseignement automatisé suivi par ces élèves, bien que les coefficients des fonctions soient inhabituels.

Problème 1

Soient les fonctions définies par :

$f \quad x \text{ --------------> } f(x) = 345x - 1250$

$g \quad x \text{ --------------> } g(x) = -187x + 1931$

1°) Les représenter graphiquement.

2°) Déterminer les coordonnées de leur intersection, par le graphique et par le calcul.

Ce premier problème est traité par les cinq élèves auxquels il est posé, selon la procédure normalisée, bien que certains s'étonnent des coefficients numériques. Il met en échec les deux élèves traditionnellement plus faibles.

Le deuxième problème reprenait une situation familière aux élèves, ayant fait l'objet d'un enseignement explicite parce que le problème d'examen est souvent posé sous cette forme.

Problème 2

Au marché de Saint-Charles, on a observé la variation des quantités de salades en fonction du prix p en francs du kilogramme de salade.

Quantités offertes : $Q_o = 345p - 1250$

Quantités demandées : $Q_d = -187p + 1931$

1°) Calculer Q_o *et* Q_d *pour* $p = 4$ *et* $p = 8$.

2°) Représenter graphiquement ces fonctions pour p compris entre 3,7 et 9 F.

3°) Pour quel prix, en francs, $Q_o = Q_d$ *?*

4°) Pour quel intervalle de prix a-t-on une offre supérieure à la demande ?

Ce deuxième problème n'est pas traité selon la procédure normalisée par les deux élèves qui le traitent : ceux-ci contrôlent leurs calculs par un commentaire bien développé et interprètent leurs résultats, tandis que les élèves qui utilisent la procédure standard se trouvent vite arrêtés par des erreurs de toute sorte.

Le troisième proposait une modélisation des lois d'un marché (Castella C., Mercier A. 1991).

Problème 3

Au marché de Saint-Charles, on a observé les lois de l'offre et de la demande de salades en fonction du prix p, en francs (p est le prix au kilo).

Offre : $Q_o(p) = 345p - 1250$

Demande : $Q_d(p) = -187p + 1931$

1°) Quelle est la fonction croissante, la fonction décroissante, pourquoi ?

2°) Déterminez graphiquement le prix d'équilibre.

3°) Ces fonctions ne prennent un sens que pour un prix positif, et les quantités doivent elles aussi être positives : sur quel intervalle de prix Q_o *a-t-elle un sens ? sur quel intervalle de prix* Q_d *a-t-elle un sens ?*

4°) Calculer le prix maximum du marché, sachant que l'offre est limitée à 4325.

5°) Calculer le prix d'équilibre.

Aucun élève ne traite le problème, et quatre élèves sur cinq signalent la rupture de contrat. En particulier, les élèves - qui ne savent pas ce qu'est une fonction croissante - considèrent qu'on ne peut pas interpréter des coefficients négatifs pour une fonction d'offre parce que l'ordonnée à l'origine est négative (ce qui ne gênait pas dans le premier problème).

Aucun élève n'a commis une erreur dans le premier problème - dans le doute, l'élève s'arrête simplement - mais les bons élèves se trouvent dans l'impossibilité de garantir leur réponse et rendent copie blanche au troisième problème. Deux élèves considérés comme « moyens » par leur enseignant habituel abandonnent résolument la procédure standard et réussissent à traiter le deuxième problème (en commettant une ou deux erreurs de calcul)

La plasticité du contrat didactique

Plasticité du contrat et faisabilité du problème

Cette observation nous a aidés à repérer à la fois des moments où se produisent des ruptures de contrat et des moments où, bien qu'il ait varié dans certaines de ses composantes, il y a eu *conservation de la faisabilité* de l'exercice. On peut dire en effet que le contrat est rompu, pour un élève donné, lorsqu'il ne reconnaît plus ce qu'il devrait savoir faire : lorsque la faisabilité s'est perdue, pour cet élève[1]. La faisabilité se conserve tant que le problème est, au moins, *reconnu*, elle se voit par conséquent à ce que l'élève *sait* ...les gestes mathématiques à faire, même s'il se trompe en les exécutant.

Nous appelons plasticité du contrat la possibilité qu'il a de supporter cette variation, sa propriété de pouvoir varier autour de sa norme, dans un domaine où il restera reconnu comme identique à lui-même - ce qui garantit la faisabilité, par l'élève, des questions qui sont posées dans ce cadre. Une variation d'une composante du problème qui dépasserait le seuil de plasticité entraînerait la non-faisabilité des questions obtenues, la rupture du contrat. Ainsi, une variable de grande élasticité potentielle, comme la taille des coefficients numériques dans les équations, s'exprime pleinement dans le problème standard et conserve en partie sa capacité à assurer une part de la plasticité du contrat lorsqu'elle figure dans les autres problèmes. En revanche, le signe des coefficients numériques contribue fortement à la rupture totale du contrat réalisée par le troisième problème : nous y reviendrons.

La plasticité différentielle du contrat

Le contrat didactique est le produit d'une négociation dont nous ne voyons pas, dans le cas que nous étudions, les deux protagonistes ensemble. Chacun, ici, est face non pas à ce que l'autre attend de lui, mais à ce qu'il pense que l'autre est en droit d'attendre. Les variations du contrat didactique, dans ces conditions, sont-elles reçues pareillement par les élèves quelle que soit la place à laquelle ils prétendent dans la hiérarchie de la classe ? A l'évidence, la réponse est non. *Les meilleurs élèves font ici les frais des ruptures du contrat.* Ce fait mérite quelques commentaires.

Les meilleurs, à l'issue du premier problème, s'étonnent des coefficients peu usuels - ils signalent la gène que la variation a produite - mais la faisabilité du problème n'est pas remise en cause - ils ne changent pas de procédure de résolution. Le contrat a varié

[1] Nous faisons ici la différence entre une rupture proprement dite, qui ne tient pas à la volonté - explicite ou implicite - des acteurs du système, parce qu'elle n'a pas de fonction didactique, et les *ruptures didactiques* dont le but est d'assurer l'évolution du contrat - sous le contrôle de l'enseignant - en faisant bouger une des *variables didactiques* que le contrat détermine.

dans le cadre de sa plasticité maximale. Les trois composantes de la variation dans le deuxième problème sont bien notées en commentaires par les meilleurs élèves qui ont eu à le traiter, mais leur performance s'affaisse même si la faisabilité reste entière. Le deuxième problème est bien reconnu, et les procédures des meilleurs élèves restent stables. La rupture est, en revanche, tout à fait nette dans le troisième problème pour lequel la faisabilité est apparemment perdue - ces « bons » élèves qui rendent copie blanche en témoignent.

Nous devrions observer le même phénomène pour les autres élèves, or ce n'est pas le cas : les élèves classés *moyens* semblent s'accommoder aussi bien de ce contrat que des autres. Certains d'entre eux se trouvent bien réussir le second problème, pour lequel ils développent des procédures personnelles de contrôle de leurs productions par le sens qu'elles prennent dans le système étudié ; et c'est un *élève moyen* qui, seul, réussit à produire un début d'attaque du troisième problème. Le contrat didactique aurait-il, pour un tel élève, une plasticité plus grande ?

Rappelons que les phénomènes que nous étudions ici sont relatifs à une épreuve du type de l'examen terminal.

L'étude de ce qu'il en est pour les élèves classés *mauvais* par leur professeur devrait nous apporter d'autres éléments de confirmation de nos analyses. Ni la situation qui demande la reproduction des procédures mathématiques standard ni la situation définie par le problème d'application - qui offre la possibilité d'un appui sur des connaissances du système étudié - ne garantissent pour ces élèves un commencement de faisabilité. Mauvaise reconnaissance des variables du contrat *en situation*, connaissance d'un nombre insuffisant de celles-ci, autant d'hypothèses que nous ne pouvons pas ici mettre à l'épreuve. Nous pouvons pourtant affirmer que leurs difficultés ne viennent pas de ce que ces élèves ne *savent rien* : deux d'entre eux réalisent une performance moyenne dans l'un au moins des deux premiers problèmes. Nous pouvons donc supposer que c'est leur reconnaissance des caractères du contrat qui est, trop souvent, insuffisante pour leur permettre de commencer le travail demandé : faute d'une première reconnaissance, les savoirs et les procédures standard associées ne leur sont pas disponibles. Ne pas avoir la disponibilité des savoirs nécessaires au traitement d'un problème reconnu, ne pas reconnaître le contrat qu'appelle le traitement d'un problème donné, ou même, la conjonction occasionnelle des deux, peuvent ainsi constituer des déterminants de l'échec de ces *mauvais élèves*.

Nous en arrivons à ce constat, paradoxal en apparence, que les élèves qui ont le mieux appris précédemment sont ceux qui ont le plus de difficulté à entrer en rapport avec un savoir nouveau. Nous montrons ainsi un paradoxe que la théorie du contrat lève sans doute en partie, mais de façon incomplète : si, en effet, il était toujours plus facile à ceux qui savent déjà d'apprendre encore, nous ne verrions pas les meilleurs élèves craindre l'apparition de nouveaux savoirs. Mais l'explication donnée par l'analyse du contrat didactique rencontre un appui dans les théories de la construction des connaissances : une connaissance trop performante peut constituer un obstacle à toute production de connaissances nouvelles.

Nous comprenons alors l'intérêt d'une stratégie d'élève *moyen*, pour qui désire apprendre encore, et l'intérêt d'une procédure standard pour procurer la réussite maximum à des élèves qui ne désirent pas apprendre plus. On comprendrait mieux, aussi, dans ces conditions, pourquoi *la question du transfert des compétences acquises par le moyen des enseignements de méthodes est la pierre de touche de ces techniques d'enseignement* : les « opérations » mises en place par ces techniques produiraient des résistances particulièrement fortes aux ruptures de contrat et, en quelque sorte, elles feraient obstacle à l'entrée dans une situation nouvelle, où l'enseignant voudrait voir se faire le transfert de compétences. Ces analyses nous amènent à énoncer enfin quelques hypothèses concernant ces élèves dits *moyens* parce qu'ils ne se distinguent ni par leur réussite, ni par leur échec. Les élèves moyens de la classe que nous avons observée passent l'épreuve d'évaluation de manière à faire reconnaître par l'institution leur rapport suffisamment conforme, puisqu'*ils ont la moyenne*. Et ces élèves semblent ainsi *disponibles* pour entrer en rapport avec d'autres savoirs si nécessaire ; c'est l'un d'eux qui s'empare avec opportunisme et efficacité des outils de contrôle que lui donnent les questions plus atypiques et qui, seul, entre dans la résolution du dernier problème.

L'expertise en situation didactique

Les savoirs d'expert sur un champ de problèmes mathématiques, dans le cadre d'une institution didactique

Nous avons vu apparaître, dans le fonctionnement expert, des connaissances de la situation institutionnelle dans laquelle était posé le problème à résoudre associées à des connaissances de la situation mathématique de ce problème dans son champ d'appartenance. Dans le même temps, apparaissaient des fragments de la procédure de résolution du problème. Nous pouvons résumer ainsi les différents types de savoirs observés : fragments de savoirs procéduraux ; savoirs sur la situation institutionnelle ; savoirs sur la situation mathématique du problème dans son champ.

Ainsi le problème est, pour l'expert institutionnel, situé dans un champ triplement *viabilisé* : dans sa résolution ; dans l'institution où il le rencontre ; dans sa discipline d'appartenance. Les savoirs non strictement mathématiques sont inséparables de ceux-ci, ils apportent *de fortes certitudes sur l'action de résolution et les résultats produits*, ils permettent de *poser des conjectures* sur la pertinence des modes de résolution et d'en *tester* la résistance aux informations venues de la situation. Ils réfèrent de façon permanente l'action à son *milieu* mathématique et institutionnel. Ils énoncent des *lois de ce double milieu* ; ces lois ne font à priori l'objet d'aucun enseignement explicite dans l'institution didactique. On pourrait les décrire comme les règles non énoncées d'une *culture*, d'un *savoir-vivre* mathématique au sein d'une institution donnée : ce sont les règles nécessaires à la vie des objets mathématiques de cette institution. C'est ainsi qu'apparaît la nécessité d'articuler les connaissances sur la résolution d'un problème à ces savoirs sur le double milieu du problème. Ces savoirs peuvent-ils constituer des méthodes devant et pouvant être enseignées ? Peut-on construire une situation didactique susceptible de travailler la viabilité d'un champ de problèmes en produisant des savoirs de résolution associés à des savoirs sur les milieux mathématique et institutionnel des problèmes du champ, tel est le problème didactique auquel nous sommes maintenant confrontés. Il est clair que ce n'est plus un problème d'enseignement de méthodes.

Quels types de dispositifs didactiques seraient aptes à favoriser la construction des savoirs sur la situation ?

Ne pas focaliser l'attention sur les procédures

Focaliser le travail des élèves sur les procédures de résolution d'un champ donné de problèmes bloque la construction des savoirs sur le milieu mathématique et institutionnel de ces problèmes. En particulier, *tout dispositif pédagogique de ritualisation procédurale bloque non seulement la fabrication de ces savoirs mais empêche la mobilisation partielle et pertinente des fragments de la procédure standard dans les nouveaux problèmes du champ.*

En effet tout travail systématique sur les procédures d'un champ de problèmes met en place une procédure standard, ce qui se fait par la restriction contractuelle de ce champ au domaine de validité de la procédure standard (Chevallard Y. 1990). Cette restriction du champ empêche non seulement la formation de connaissances générales sur le champ - cela va de soi - mais également la formation de connaissances particulières au sous-champ étudié, puisque les particularités de ce dernier ne pourront se singulariser faute de référence possible à l'ensemble du champ, comme le montrera l'observation de René, dans la troisième partie de cet article. Qui plus est, comme nous l'avons observé auprès des élèves de BEPA, une connaissance trop performante peut constituer un obstacle à une production de connaissance nouvelle. Nous montrons ici une *pathologie* spécifique aux systèmes pédagogiques qui *fétichisent les procédures*. Au lieu de constituer une situation pouvant faciliter la fabrication de connaissances, ces dispositifs enkystent l'apprentissage dans un sous champ, ce qui fait obstacle d'une part à la production de connaissances procédurales nouvelles, comme nous l'avons montré, d'autre part aux connaissances sur le champ et sur la situation particulière du problème dans le champ. Nous développons ci-dessous cette dernière affirmation.

La non automatisation de la procédure de résolution.

Nous avons pu penser que le passage à l'automatisme garantirait une *disponibilité* de l'élève au repérage et au traitement d'autres informations : « L'automatisation de l'action libérant en partie l'attention du sujet, cette attention pourrait être alors réinvestie sur d'autres données et favoriser les possibilités de traitement de celle-là (Netchine Grynberg G. 1988). » Le repérage et l'utilisation des informations issues de la situation mathématique et institutionnelle du problème seraient donc possibles *à ce moment là*. La faiblesse de l'hypothèse réside dans ce : « à ce moment là ». En effet, pourquoi la construction des connaissances sur le champ du problème se serait-elle effectuée au moment de l'automatisation procédurale, alors que le travail focalisé sur la procédure a interdit tout repérage de ces connaissances ? En quoi le travail procédural devrait-il être préalable à leur construction ?

Ce n'est pas au moment de la déprocéduralisation qu'il faut *espérer* voir se construire des connaissances sur le champ de problèmes par le seul fait d'une « libération de l'attention de l'élève » : les connaissances sur le champ de problèmes et les connaissances sur leur résolution doivent pouvoir se construire ensemble, *dès la rencontre de l'élève avec le problème*. Les méthodes seront alors des *techniques d'étude* d'un champ de problèmes construites en même temps que le champ auquel elles sont associées.

Le lien du travail sur les procédures à l'étude de leurs situations d'emploi

Nous avons vu comment un dispositif pédagogique à fétichisme procédural produit des phénomènes néfastes à l'apprentissage. Si nous voulons que l'élève soit en mesure de prendre en compte les informations issues des situations mathématique et institutionnelle du problème, nous devons transformer le rapport focalisé sur la procédure de résolution, en un rapport détendu à cette dernière. Le rapport détendu peut, au contraire de la ritualisation procédurale, assurer cette disponibilité de l'élève aux données venues du double milieu du problème - données qui ne dépendent pas strictement du problème lui-même.

Notre analyse nous permet alors de penser la notion de *disponibilité de l'élève* en termes de *propriétés d'une situation didactique* et non en termes de caractéristiques de sa personne ou de caractéristiques de son action.

Ainsi, il n'apparaît plus nécessaire *d'attendre* le moment de l'automatisation de l'action pour aider l'élève à fabriquer des connaissances sur le milieu du problème. *Une technique d'étude* (Chevallard Y. 1990) n'est pas une procédure ou une méthode qu'il s'agit d'apprendre et de contrôler *dans ses étapes*, mais elle travaille la fonctionnalité d'un savoir dans la résolution d'un problème qu'il s'agit de roder dans des conditions standard, de tester dans des conditions limites, d'infirmer peut-être en bordure du champ.

Le montage de dispositifs didactiques adaptés

Le choix du problème initial

Notre étude de la question de l'enseignement de méthodes montre que, dès la rencontre de l'élève avec un type de problèmes, la nécessité de mettre en place une technique d'étude et non une procédure de résolution est une contrainte incontournable que doit satisfaire un dispositif didactique. La rencontre d'un type de problèmes se fait traditionnellement par la présentation, par l'enseignant, d'un *problème prototypique* du champ de problèmes considéré. Nous nous heurtons ici à la difficulté de fabriquer une situation didactique adéquate : comment entendre ce que peut être un « bon » problème prototypique ?

Nous allons définir deux contraintes contraires qu'il doit satisfaire. Il se doit en premier d'être représentatif du champ d'étude, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir montrer des propriétés caractéristiques de ce champ et par là apporter un éclairage sur celui-là, ensuite il doit proposer une réalisation des propriétés à étudier. Ainsi, un problème prototypique devrait dans le premier temps jouer le rôle d'un exemple parfait du champ. Le problème doit encore être faisable. On pourrait imaginer un problème extrêmement représentatif du domaine étudié, mais présentant de telles difficultés de réalisation que sa faisabilité en serait compromise ; c'est pourquoi on pourrait a contrario imaginer d'assurer la faisabilité au prix de la réduction du champ de représentativité du problème. La plasticité du contrat didactique prend ainsi un sens nouveau : le contrat passé à l'occasion de la rencontre du problème prototypique doit pouvoir supporter les variations dues à l'exploration du champ qui va suivre, il doit pouvoir être reconnu comme identique à lui-même au travers de ses variétés, il doit garantir la faisabilité des questions que l'élève devra traiter de sa propre initiative. La représentativité du problème initial est donc un élément de la plasticité du contrat didactique à son endroit. Enfin, le problème et le champ devront être assurés d'une possible reconnaissance mathématique de leur représentativité, pour qu'émerge une méthode (composée à la fois de connaissances procédurales et de connaissances sur la situation du type de problème) apte à être reçue comme savoir mathématique : c'est une des contraintes - ici, une contrainte externe - auxquelles le contrat didactique doit satisfaire ; la fidélité mathématique doit, au moins, trouver à se montrer.

Conjuguer ces exigences n'est pas aisé. La présentation, avec le problème initial, d'une technique d'étude de ce problème va permettre que s'établisse le contrat didactique sur un problème fortement représentatif. Une « bonne technique » en effet demeure sur tout le champ. Même si le travail dont elle est l'objet la fait évoluer, sa permanence évite le fractionnement de celui-là en même temps qu'elle interdit la polarisation sur les procédures de résolution d'un problème particulier parce qu'elle ouvre sur une théorie mathématique du champ de problèmes.

L'amorce du travail du problème

Ce moment de présentation du problème initial, avec les difficultés d'ordre didactique que nous venons de souligner, est traditionnellement suivi d'un moment où l'élève va être amené à résoudre des problèmes semblables aux problèmes de la phase initiale. La fonction de ce deuxième moment n'est pas de mettre en place une reconnaissance des problèmes du champ puisque, traditionnellement, par contrat, les problèmes présentés sont du même type que le problème initial. Mieux, ces problèmes là se doivent d'être reconnus par les élèves comme des problèmes semblables au problème initial, puisque les élèves savent qu'ils vont avoir à faire *comme l'enseignant* lorsque celui-ci a exposé le problème initial ; les élèves ne savent pas encore « comment faire » et les variations entre le problème initial et les problèmes de ce moment d'amorce se doivent d'être mineures. C'est un moment où le paramètre de faisabilité est extrêmement sensible ; en conséquence, la variabilité mathématique par rapport au problème initial doit jouer sur des variables mineures, secondaires, afin de ne pas casser la faisabilité.

La fonction du deuxième moment est donc de commencer *le rodage* de ce que nous avons défini comme une technique d'étude. Chez les tenants de l'évaluation formatrice, ce deuxième moment n'est que le moment d'explicitation de la procédure de résolution des problèmes, la clé du travail sur les procédures. Une fois explicitée et devenue méthode, la procédure va devenir l'objet central du dispositif, *l'objet fétiche de l'action de l'élève et du contrôle de son action.* Cette double ritualisation de l'exécution et de son contrôle ne donne aucune place aux connaissances de la situation mathématique, *ne fait pas du problème un objet d'étude puisque l'objet d'étude est la procédure.* Le travail se réduit à l'accomplissement d'un *geste technique* sans tenir compte de son articulation avec le dispositif qui le produit. On ne peut plus ainsi parler de rodage d'une procédure, puisque sa fonctionnalité n'est jamais testée, confirmée ou infirmée par les informations contextuelles : le contexte n'est jamais interrogé. Or, l'un des caractéristiques du travail de rodage est l'interrogation permanente du contexte : c'est cette interrogation qui permet la mobilisation des informations que l'on en retire, qui ainsi met en place un « habitus » de sollicitation du milieu qui est fondamental dans le guidage et la validation de l'action experte.

Apparaît ainsi une deuxième pathologie des dispositifs d'évaluation formatrice, une pathologie en matière d'évaluation cette fois. Loin de permettre la « construction d'une instance évaluative d'expert » - l'un de leurs objectifs déclarés - ces systèmes interdisent le fonctionnement réel de cette instance évaluative puisque, en la réduisant à une vérification procédurale, ils ne mettent jamais en jeu sa fonction essentielle qui est *la sollicitation permanente du milieu ;* or, nous l'avons vu, c'est de la double dimension du milieu, fait d'objets mathématiques et institutionnels, que sont issus les savoirs qui permettent de *conjecturer* et de *tester* les modes de résolution disponibles, les savoirs que nous avons vu à l'oeuvre dans le guidage et la validation de l'action experte. Cette deuxième pathologie des systèmes pédagogiques fondés sur l'évaluation formatrice est faite de ce paradoxe : ils interdisent la mise en place d'une évaluation experte alors que celle-ci constitue leur objectif prioritaire.

Le travail technique suppose une théorie du champ mathématique des problèmes qui sont étudiés, c'est en effet la théorie qui permet l'identification d'un champ de problèmes et des techniques associées, comme le montre l'observation suivante.

Les élèves peuvent-ils apprendre des méthodes ?

Un exemple venu du cahier d'exercices d'une classe de Première S

Il s'agit du cahier de René, un redoublant. Le premier jour de classe, le professeur propose de faire quelques exercices sous le titre « Techniques de base ». Il choisit ces exercices dans le livre de Première de l'établissement.

Voici l'exercice n°7 de la page 8 du livre des élèves

$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, *et* $y = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$, *quel est le plus grand de ces deux nombres ?*

Correction : $x - y = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

$(x + y)(x - y) = (2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + \sqrt{5})$

on a multiplié par un nombre positif, somme de racines carrées

$= [(2+\sqrt{3})+ (\sqrt{2} + \sqrt{5})][(2 +\sqrt{3})- (\sqrt{2} +\sqrt{5})]$

$= (2 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (4 + 3 + 4\sqrt{3}) - (2 + 5 + 2\sqrt{10})$

$= 7 + 4\sqrt{3} - 7 - 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{10} = 2(\sqrt{12} - \sqrt{10}) > 0$, *donc* $x > y$

Un autre exercice, ce même jour, a fait rencontrer le calcul suivant :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2$$

Voici maintenant un exercice de la première interrogation écrite :

$\boxed{\text{exercice 4}}$

a et b étant deux réels strictement positifs, établir que :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{11} \text{ si et seulement si } \left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right| = \sqrt{7}.$$

Voici encore l'exercice 2 de l'interrogation 3 :

exercice 2

x et y étant deux réels strictement positifs, établir que : $2(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}) - 3(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + 6 \geq 0$

Une même technique est à l'oeuvre dans tous ces exercices, et les élèves de cette classe de Première sont engagés à reconnaître la technique dans les diverses situations où il est possible d'en apprécier l'efficacité. Nous considérons par conséquent que nous sommes en face d'un champ de problèmes, nécessitant le recherche des méthodes correspondantes.

La première fois, l'exercice est posé en introduction, comme un exercice de révision sur les calculs de racines carrées tels que ceux que l'on peut rencontrer en Seconde. Chacun sait bien quel est le plus grand nombre, et « le produit par la quantité conjuguée » est le nom de la technique de démonstration. Mais *il n'est pas d'usage de faire un tel calcul pour démontrer une inégalité.* Aussi, pour bien montrer la technique de calcul en question, le professeur a choisi un exercice où la technique est à appliquer trois fois de suite. Reprenons la correction notée par René, en la commentant rapidement :

Correction : $x - y = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

$(x + y)(x - y) = (2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + \sqrt{5})$ *on a multiplié par un nombre positif, somme de racines carrées*

$= [(2+ \sqrt{3})+ (\sqrt{2} + \sqrt{5})][(2 + \sqrt{3})- (\sqrt{2} + \sqrt{5})]$

Les élèves doivent comprendre que l'on a calculé encore $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$, et que ce faisant on a multiplié encore une fois par un nombre positif, $x^2 + y^2$, somme de carrés et quantité conjuguée de $x^2 - y^2$, ce qui permet de « supprimer les racines carrées dans l'expression de $x^2 - y^2$ » ...dans la mesure où l'on ne sait pas plus comparer deux nombres composés comportant des racines carrées d'entiers différents que comparer deux nombres s'écrivant avec des racines carrées composées comme on les avait au départ. Cette idée suppose que l'on « sache » que

$[(2 + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} + \sqrt{5})][(2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} + \sqrt{5})]$

sera, une fois « simplifié », plus simple que l'expression initiale $(2+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ parce que l'on n'aura plus que des racines carrées de deux entiers différents :

$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{5} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$

et le calcul complet donne :

$= (2 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (4 + 3 + 4\sqrt{3}) - (2 + 5 + 2\sqrt{10})$

$= 7 + 4\sqrt{3} - 7 - 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{10} = 2(\sqrt{12} - \sqrt{10}) > 0$, *donc* $x > y$

La technique de base est présentée dans l'exercice, elle est démontrée par le professeur : les élèves sont ici en position d'apprentis.

Il faut apprendre de cet exercice que « la quantité conjuguée » est un outil essentiel aux *problèmes de majorations et minorations, fondamentaux dans la pratique de l'analyse* : cet exercice en est le premier exemple. Pourtant, cette « technique » n'est pas enseignée comme méthode, cela se voit par exemple au fait qu'elle n'est pas utilisée jusqu'au bout : au moment d'évaluer $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$, au lieu de multiplier cette fois l'expression, $x^4 - y^4$, par $x^4 + y^4$, le professeur va faire appel à la croissance de la fonction $\sqrt{\ }$, c'est-à-dire, à une intuition de la croissance de la fonction racine carrée dont l'exercice avait pour but de montrer les limites ! On obtenait pourtant un calcul simple, et surtout particulièrement « démonstratif » de l'efficacité de la méthode présentée :

$(2\sqrt{3} + \sqrt{10})(2\sqrt{3} - \sqrt{10}) = (4)(3) - 10 = 2.$

Il apparaît clairement que ce n'est pas le fait d'une « erreur » du professeur : le « travail technique » n'arrive jamais à prendre, en mathématiques, la place qui devrait être la sienne. Nous tenterons de comprendre les multiples raisons qui concourent à produire ce phénomène.

Déjà, une première remarque : l'élève dont nous observons le cahier n'énonce pas le nom de la technique « produit par une *quantité conjuguée* positive », il parle de *nombre*. Ce faisant il réduit le travail à un calcul arithmétique, alors que la technique relève du travail algébrique. Cette réduction est induite par les programmes actuels du Collège et du Lycée : l'algèbre et l'algébrique y sont absents, remplacés par des « activités numériques » qui n'ont pas grand'chose à voir avec l'analyse du même nom : le travail de l'élève est en général réduit à du « calcul sur ordre » pour lequel il dispose d'une panoplie de trois gestes ouverts : Réduire, Factoriser, Développer, et de deux gestes fermés : les Identités Usuelles $a^2 - b^2$ et $(a + b)^2$. C'est là pour nous le premier signe d'une péjoration du travail technique, remarquable dans le domaine algébrique.

Tout de suite, une deuxième remarque : le calcul $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 2$ n'est pas présenté comme un outil dont il faudrait apprendre le maniement : un *théorème algébrique*, mais comme le résultat juste d'un des calculs nécessités par un exercice de révisions et d'entraînement. L'intérêt de ce travail dans de nombreux exercices n'est donc pas souligné : nous y voyons un second signe de la péjoration du travail technique des manipulations algébriques.

L'équivalence à monter lors de la première interrogation écrite se travaille par passage au carré, puisqu'il s'agit de quantités positives,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 = (\sqrt{11})^2 \text{ si et seulement si } \left(\left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right|\right)^2 = (\sqrt{7})^2$$

elle donne simplement, pour qui se souvient du « théorème » présenté en exercice, l'équivalence triviale $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = 11$ si et seulement si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = 7$.

Le même « théorème » permet de donner rapidement le changement de variable qui transforme l'expression en carré parfait ou en somme de carrés :

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \text{ en } 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 4 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 = 2A^2 - 3A + 2$$

$$= 2\left(A^2 - \frac{3}{2}A + 1\right) = 2\left(\left(A - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 - \frac{9}{16}\right) = 2\left(\left(A - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right)$$

à la seule condition que l'on ait bien en main la technique « de la lettre auxiliaire » qui permet de garder le contrôle des calculs en réduisant considérablement la complexité de l'expression et du calcul. Faute de cette technique (non enseignée en tant que telle) le même calcul devient à peu près illisible et surtout incontrôlable, comme on peut le voir ci-dessous :

$$= 2\left(\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1\right) = 2\left(\left(\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 - \frac{9}{16}\right) = 2\left(\left(\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right)$$

Le retour régulier d'exercices fondés sur des savoirs techniques semblables nous fait supposer un objet de savoir commun - une méthode. Lequel ? Pour réussir ce type d'exercice, pour comprendre l'existence d'un champ de problèmes et d'une méthode de traitement des problèmes du champ, il faut chercher la théorie derrière les techniques. Un épisode observé quelques mois plus tard dans l'année, et dont René est le sujet, montre comment.

L'observation d'un épisode de la biographie didactique de René

A la fin du mois de février, René vient consulter à propos de deux exercices qu'il est allé chercher dans le livre d'exercices de Terminale C qu'un de ses oncles avait utilisé en 1969, à l'époque des « mathématiques modernes ». René montre son cahier, après avoir expliqué qu'il choisit, dans les ouvrages de Terminale dont il dispose, *les exercices qui ressemblent à ceux qu'il doit faire dans le cadre de la classe.* Ils sont de ce fait, pense-t-il, adaptés à ce qu'il doit apprendre. Mais alors qu'il a réussi tous les exercices du livre de classe, il n'arrive pas à traiter ceux-ci. Voici les brouillons qu'il apporte :

Montrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + mx^2 - 8x - m = 0$
admet trois racines réelles, quelle que soit la valeur du paramètre réel m.

Il a engagé le travail :

L'équation admet au moins une racine réelle parce que f est continue et que Im (f) = IR ; elle admet un maximum relatif positif et un minimum relatif négatif, ce qu'il suffit de vérifier :

$f'(x) = 3x^2 + 2mx - 8$, la dérivée s'annule pour $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 24}}{3}$ ... ?

Le voilà empêché d'aller plus loin. Il ne sait pas en effet « comment obtenir le minimum et le maximum, et les comparer à 0 ». Je lui explique que le produit de deux nombres de la forme $a + b\sqrt{g}$ $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $g \in \mathbb{N}$ constante, est un nombre de la même forme $a' + b'\sqrt{g}$. Alors, si l'on change par exemple $(a + b\sqrt{g})^2$ en $(a - b\sqrt{g})^2$, le signe de a' ne change pas ($a' = a^2 + b^2g$), tandis que b' s'obtient par des produits où un seul signe change : $b' = 2ab\sqrt{g}$ donne $b' = -2ab\sqrt{g}$), ce qui facilite le calcul des extremums. René se met aussitôt à calculer le carré puis le cube de ses de ses solutions : l'exercice est immédiatement résolu.

Le savoir algébrique utile était énoncé « à l'époque des mathématiques modernes », lorsque l'on enseignait la théorie des groupes et des corps. Pour comprendre ce que peut être le calcul par lequel l'exercice se résout, il est nécessaire de savoir ce qu'est un corps, quels sont les types de calculs qu'une structure de corps permet, il est nécessaire de savoir que « les nombres de la forme $a + b\sqrt{g}$ $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ et $g \in \mathbb{N}^*$ » sont les éléments d'un corps parce que l'ensemble de ces nombres est stable pour l'addition et la multiplication » et il faut encore connaître les conséquences de cette propriété dans le cas présent[2]. Dans ces conditions par exemple, comme on peut le vérifier dans l'ouvrage utilisé par René, le fait que l'inverse d'un nombre de ce corps peut s'écrire à partir de l'expression conjuguée de ce nombre est *un résultat*, donné sous la forme d'un théorème. Dans le cadre de l'ouvrage dans lequel ces exercices se rencontrent, ils sont « des applications immédiates du cours » : ils ne nécessitent rien d'autre que la mise en oeuvre d'un théorème, un objet de savoir sensible. Ce savoir et la notion même de théorème d'algèbre se sont perdus. Mais quinze années passées et quatre vagues successives de contre-réformes n'ont pas réussi à expurger les mathématiques des exercices de travail technique portant sur les calculs dans le corps $Q(\sqrt{2})$. Or, la nécessité d'une compréhension théorique du champ de problèmes correspondant à ces exercices n'a pu être remplacée par l'enseignement de techniques opératoires comme « la quantité conjuguée ». La réussite de ces exercices suppose l'existence de méthodes fondées sur une théorie du champ dont ils participent.

Savoirs opératoires et savoir fondamental : le manque de l'algèbre dans le travail algébrique

La présence nécessaire de l'algèbre comme « savoir fondamental » sur les structures algébriques se manifeste encore aujourd'hui par cet indice insistant : la permanence d'exercices qui produisent l'échec massif des élèves du Lycée (Mercier A. 1992). Ces exercices de toutes sortes (ceux que nous avons présentés n'en sont qu'un exemple) ne font que montrer le manque institutionnel des savoirs théoriques de l'algèbre sans produire les apprentissages de méthodes que l'on pourrait en attendre. Pire : les méthodes correspondant au rapport attendu à l'algébrique figurent comme applications du cours dans l'ouvrage où ces exercices sont posés pour la première fois, mais aujourd'hui un redoublant qui se situe en tête de sa classe de Première et qui a fait seul tous les exercices de son livre de classe n'en a pas l'usage. René a pu apprendre « tout ce qu'il fallait à un élève de Première S » ou presque, à partir des exercices, et bien qu'il sache que c'est dans les exercices que se trouve le savoir qu'il doit apprendre, il n'arrive pas pour autant à dépasser le niveau d'une bonne connaissance technique des savoirs algébriques. Il n'arrive pas à produire « du savoir fondamental » c'est-à-dire des méthodes générales d'algèbre, à partir de sa connaissance performante que par opposition on qualifiera d'« opératoire », et ce n'est pas étonnant[3]. Il ne lui reste plus qu'à chercher à apprendre de quelqu'un qui connaît mieux ces problèmes.

Notre interprétation s'appuie sur une autre observation du même élève. En effet, un second exercice a arrêté René, dans un autre chapitre du même ouvrage : le n° 6 du chapitre 8.

---

[2] Cette propriété était démontrée explicitement dans l'ouvrage concerné, le « Résumé Pratique, de Louquet » tout au long d'une série de plusieurs exercices soigneusement corrigés et présentés en face du résumé de cours, pour l'illustration pratique des propriétés énoncées.

[3] Il y a fallu quelques mathématiciens célèbres et la réorganisation proposée par Nicolas Bourbaki, soit, un siècle de travail mathématique collectif !

On donne la fonction y(x) de la variable x, $y(x) = \dfrac{x^2 + ax + 4}{4x^2 + ax + 1}$ où a désigne un paramètre.

1) Dans quel intervalle doit-on choisir le paramètre a pour que la fonction y(x) soit définie quel que soit x ? On supposera qu'il en est ainsi dans les questions suivantes.

2) Montrer que la fonction y(x) ne s'annule pas. Soit $x_0 \pi 0$ et $x_1 = \dfrac{1}{x_0}$ deux nombres inverses. Comparer $y(x_0)$ et $y(x_1)$.

3) Calculer la dérivée de la fonction y(x). Montrer que cette dérivée s'annule pour deux valeurs inverses de x. Déterminer le paramètre a pour qu'elle s'annule quand on donne à x la valeur 3.

La question de René est ici relative au 3) :

$y'(x) = \dfrac{-3ax^2 - 30x - 3a}{(4x2 + ax + 1)^2}$, elle s'annule pour $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - a^2}}{a}$ mais comment montrer que ces deux valeurs sont inverses l'une de l'autre ?

Dès qu'on lui a montré que « b inverse de a équivaut à ab = 1 », comme c'est - là encore - énoncé dans le *Résumé Pratique* de Louquet, il a entrepris d'effectuer le produit des deux solutions, sans autre forme de procès, par une identité remarquable, et il a immédiatement obtenu $\dfrac{25 - (25 - a^2)}{a^2} = 1$. Ici encore, cela semble une simple pratique technique, mais c'est un savoir opératoire issu d'un savoir fondamental sur la structure de groupe et ses conséquences, qui est à l'œuvre. Le savoir qui manque à René, c'est encore la structure de groupe multiplicatif de $Q(\sqrt{2})$. Seule la lecture du sens que permet cette notion théorique peut fonder l'apprentissage d'une méthode de résolution des exercices qui soit transférable d'une situation d'emploi à l'autre : c'est en effet la notion théorique qui nous donne à voir la similitude des situations, par delà leurs diverses apparences formelles.

Les savoirs mathématiques que René devrait connaître sont donc *absents*, c'est-à-dire qu'ils ne sont plus des objets institutionnels de sa classe de mathématiques. Le travail technique le plus systématique ne suffit pas à les produire, et pour René, ils restent manquants. Il en est de même pour tous les élèves de Première S que nous avons observés.

Nous avons ici décrit un double épisode didactique, fondé sur une rencontre de la nécessité de savoirs que la situation ne permet pas à René de produire par lui-même. Pour d'autres élèves observés, le problème principal est plutôt, par exemple, le manque d'un rapport adéquat aux exercices et problèmes, que ces élèves font « à l'image de ce que le professeur a montré » et pour lui montrer en retour qu'ils savent imiter ses gestes mathématiques sans jamais trouver dans cette activité un quelconque savoir mathématique à apprendre. Un rapport adéquat aux exercices manque à ces élèves. Lorsque de tels savoirs institutionnels sont absents à un instant donné (par exemple, parce que les exercices n'ont encore jamais constitué des savoirs mathématiques employés à nouveau - des résultats, ou des théorèmes - comme c'est le cas au Collège et au Lycée) les élèves éprouvent leur ignorance sans pouvoir pour autant apprendre ces savoirs.

Ce peut être le manque d'un rapport adéquat au cours, parce que jamais pour certains élèves les savoirs fondamentaux présentés en cours n'ont produit ou justifié les savoirs opératoires utiles aux exercices. Nous pourrions montrer encore une élève qui rencontre la nécessité didactique de *repasser* ses cours, alors que ce geste n'a pas, pour elle, d'existence, et qu'elle ne connaît probablement pas le sens de ce terme (Bachelard désigne par là l'action de reconstruire pour soi un texte de présentation de son savoir personnel, afin de pouvoir s'enseigner à soi-même dans une action semblable à celle que Descartes projette pour lui-même[4]). Une enquête rapide montre que personne ne sait plus même le sens de l'expression, que Bachelard utilise comme si tout ancien élève la connaissait naturellement[5].

L'enseignement de méthodes ne remplace pas le savoir fondamental

Cette enquête nous a fait rencontrer un double problème.

Des savoirs opératoires ne produisent pas nécessairement du savoir fondamental, parce que les premiers modélisent l'action et les dispositifs qui lui sont associés, tandis que le second modélise le domaine de réalité où l'action intervient.

Les savoirs par lesquels un élève accède aux objets mathématiques proprement dits - les savoirs de la situation - font partie de la liste des savoirs mathématiques opératoires de l'élève qui sont nécessaires à l'acquisition des savoirs fondamentaux.

Les savoirs fondamentaux doivent être explicitement enseignés, mais ils ne peuvent l'être efficacement qu'à des élèves qui ont rencontré la nécessité opératoire de ces savoirs fondamentaux : ils fondent alors les méthodes de résolution des problèmes d'un champ théorique que les élèves ont commencé d'explorer par un problème prototypique.

La rencontre de la nécessité de savoir, par les élèves eux-mêmes, est un temps incontournable de tout enseignement, on ne peut pas attendre que chaque élève construise pour lui-même des savoirs mathématiques fondamentaux, spontanément. Cette rencontre ne produit pas même les savoirs opératoires que les savoirs fondamentaux outillent, et qui devront être produits dans un temps particulier de l'enseignement des mathématiques.

Ces propositions sonnent presque comme des énoncés paradoxaux, parce que l'observation des classes de mathématiques montre que le plus souvent les deux temps d'un enseignement efficace se sont trouvés disjoints par la recherche obstinée de raccourcis didactiques à un chemin qui est parfois difficile à tracer, parce qu'il suppose

---

[4] Descartes R. (1620-1628, publication 1701), *Regulae ad directionem ingenii*. Trad. et notes par Sirven J., (1970), Paris, Librairie philosophique J. Vrin. L'auteur explique par exemple, p. 61 (règle X) : « ...Je suis né, je l'avoue, avec un esprit tel que le plus grand plaisir des études a toujours consisté pour moi, non pas à entendre les raisons des autres, mais à m'ingénier moi-même à les découvrir. » et, p. 66 (règle XI) : « Après l'intuition de quelques propositions simples, quand nous en tirons une autre conclusion, il est utile de parcourir les mêmes propositions dans un mouvement continu et nulle part interrompu de la pensée, de réfléchir à leurs rapprots mutuels... »

[5] Aujourd'hui, les élèves *relisent* leur cours.

un travail patient - et souvent complexe - de transposition didactique. Mais il semble que les élèves n'apprennent jamais autrement. Mais nous comprenons mieux pourquoi les « méthodes » qui tentent d'assurer le contrôle de l'action ou de la pensée des élèves lorsqu'ils agissent pour rechercher la solution d'un problème ou pour résoudre un exercice ne sont que les ersatz des savoirs fondamentaux qui manquent dans l'organisation du savoir enseigné, des ersatz des savoirs relatifs à la situation dans laquelle les élèves doivent agir, ou des ersatz des savoirs relatifs aux gestes de l'étude nécessités par l'enseignement effectué.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematic, (Cours) *in* H.G. Steiner (ed.) *Theory of mathematics education.* Occasional paper 54, Institut fur Didaktik der Mathematik, University of Bielefeld, pp. 110-119.

CASTELLA C. & MERCIER A. (1991). *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA,* (Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991), GRAF, Nîmes.

CHEVALLARD Y. & CONNE F. (1984) Jalons à propos d'algèbre. La question du rapport entre algébrique et numérique, *Interactions didactiques,* N°3, Genève et Neuchâtel.

CHEVALLARD Y. (1985-1992). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, *Petit x.* N° 5, 19, 23, 30, IREM de Grenoble, Grenoble, pp. 51-94, pp. 45-67, pp. 5-38, pp. 5-15.

CONNE F. (1992). Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 12/2-3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 221-270.

GOBBO C. & CHI M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children, *Cognitive development,* pp. 221-337.

MERCIER A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.*,Thèse d'Université, Université Bordeaux I.

MERLEAU-PONTY M. (1945). *Phénoménologie de la perception,* NRF, Gallimard, Paris.

NETCHINE-GRYNBERG G. (1988). *Les modèles de développement et l'étude du fonctionnement cognitif de l'enfant,* Paris, PUF.

NUNZIATI G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice, Dossier du formateur, *Cahiers pédagogiques,* 280, pp. 47-64.

PAVLOV A.S. (1977). *Les possibilités motivatrices du 3ème type d'enseignement dans les différentes conditions d'une expérience de formation,* Université d'Etat de Moscou.

VYGOTSKI L.S. (1934), traduction française de Sève F. (1985). *Pensée et langage,* Paris, Ed. Sociales.