AIRES DE SURFACES PLANES EN CM ET EN 6ème
(2ème partie)*

Régine DOUADY
Marie-Jeanne PERRIN
I.R.E.M. de Paris-Sud

Dans la première partie, nous avons exposé les principes qui nous ont servi de base pour la construction des séquences d'apprentissage. Nous avons décrit les séquences relatives à l'approche du concept d'aire indépendamment de sa mesure, nous avons abordé la mesure des aires par le pavage et dégagé la notion d'unité d'aire.

Notre propos dans la deuxième partie, est de donner du sens à la mesure de l'aire de surface à l'aide d'une unité donnée, même si on ne sait pas paver effectivement la surface.

I – ETUDE DE L'AIRE DE 1 cm^2

Les élèves ont déjà utilisé à plusieurs reprises l'aire d'un carré de 1 cm de côté comme unité d'aire. Il s'agit maintenant d'introduire l'expression "centimètre carré" et la notation cm^2. Cette notation a un gros inconvénient pour les élèves : elle ne les aide pas à distinguer unité d'aire et unité de longueur et les induit à retomber dans l'ornière qui consiste à traiter par les longueurs un problème où il s'agit d'aires.

L'objectif de cette leçon est d'attacher le cm^2 à une aire et non à la figure carrée de 1 cm de côté, et, donc, entre autres, de distinguer le cm^2 du cm : "1centimètre carré" est souvent entendu par les enfants comme "un carré de 1 centimètre de côté" et dans cette logique, "1/2 centimètre carré" est compris comme "un carré de 1/2 centimètre de côté" ; et cela ne contredit pas toujours, pour les élèves, le fait qu'il y ait 4 X "1/2 centimètre carré" dans "1 centimètre carré".

Organisation

Elèves par équipe de deux.

Matériel

Papier quadrillé au 1/2 cm (papier à petits carreaux du commerce).

Consignes

1. Colorier chacun 3 ou 4 surfaces différentes d'aire 1 cm^2 (dont au moins un triangle).

2. Partager l'une de ces surfaces en 2 pièces de même aire ; partager une autre autre de ces surfaces en 4 pièces de même aire.

Quelle est l'aire de chacune de ces pièces ?

3. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{2}$ cm^2 (dont au moins un triangle).

(*) Cet article fait suite à celui paru dans IN n° 39-40 ; comme le précédent, il est extrait de "petit x", journal pour les enseignants de mathématiques et sciences physiques des collèges, édité par l'IREM de Grenoble, BP 41, 38402 St-Martin d'Hères.

4. Colorier 3 ou 4 surfaces différentes d'aire $\frac{1}{4}$ cm^2 (dont au moins un triangle).
5. Colorier des surfaces différentes d'aire 12 cm^2 (dont au moins trois rectangles).

Des comportements attendus

Les élèves peuvent répondre à toutes les questions en comptant les carreaux du quadrillage, ou en coupant des carreaux en 2 (pour fabriquer des triangles). Pour la consigne 5, on peut attendre au moins tous les rectangles ayant pour dimensions un nombre entier de fois $\frac{1}{2}$ cm.

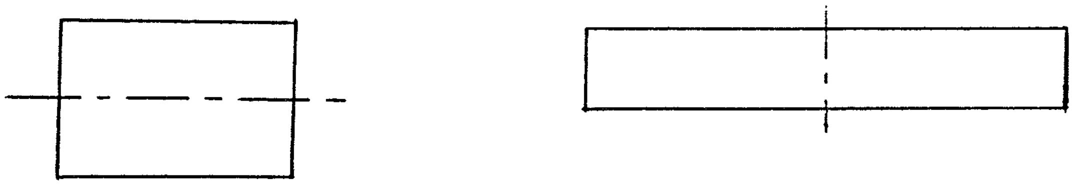
Bilan

– On peut dessiner beaucoup de surfaces d'aire 1 cm^2.

– Une surface d'aire 1 cm^2 contient 2 surfaces d'aire $\frac{1}{2}$ cm^2 et quatre surfaces d'aire $\frac{1}{4}$ cm^2.

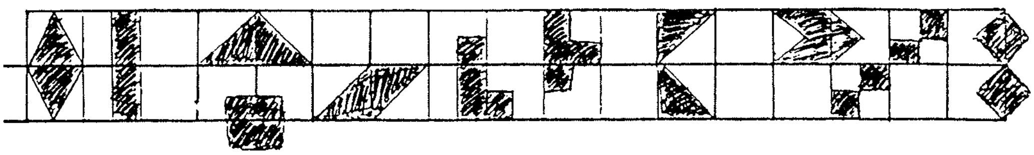
– Un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm a pour aire $\frac{1}{4}$ cm^2.

– On peut fabriquer beaucoup de rectangles d'aire 12 cm^2, avec par exemple le procédé de fabrication suivant : couper en deux, remettre au bout.



Remarques sur le comportement des élèves

Dans une classe de CM^2, en réponse à la 1ère consigne, sur papier quadrillé au cm, les élèves ont fourni des productions variées dont voici quelques exemples :



Par la suite, quelques élèves ont cependant interprété "un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm" comme "$\frac{1}{2}$ centimètre carré". C'est pourquoi nous avons ici ajouté les consignes 2, 3, 4.

II – AIRE DU RECTANGLE

L'objectif de cette phase est de restructurer des connaissances anciennes sur le comptage de carreaux à l'intérieur d'un rectangle en termes de mesure d'aire et de prendre en compte la bidimensionnalité de l'aire dans le cas du rectangle.

2.1 Quelques prérequis à contrôler

a) L'aire est invariante par déplacement. En particulier le nombre de carreaux nécessaires pour paver un rectangle dessiné sur papier quadrillé ne dépend pas de la position du rectangle sur le papier.

L'aire est invariante par découpage et recollement convenable (c'est-à-dire sans perte ni chevauchement des morceaux).

b) Si on a un petit rectangle de dimension u, v et un grand rectangle de dimension $a = nu$, $b = pv$, l'aire du grand rectangle vaut n p fois l'aire du petit. Autrement dit, la mesure de l'aire du grand est n p quand on prend l'aire du petit comme unité d'aire.

Dans le cas particulier où $u = v$, si les dimensions du rectangle sont mesurées avec l'unité u, et si l'aire est mesurée en prenant comme unité l'aire du carré de côté u, la mesure de l'aire du rectangle est le produit des mesures des dimensions.

c) Plus généralement

Si on multiplie une des dimensions d'un rectangle par un nombre n et l'autre par un nombre p, l'aire est multipliée par n p.

Si on multiplie les deux dimensions d'un rectangle par un nombre n, l'aire est multipliée par n^2.

On peut prendre pour n des entiers ou des inverses d'entiers. Il faudra étendre ces propriétés aux nombres non entiers par la suite.

Voici quelques activités visant à contrôler des connaissances anciennes ou à les compléter.

Activité 1.

Organisation

Travail individuel.

Matériel

Feuille quadrillée sur laquelle le maître a dessiné un rectangle suivant les lignes du quadrillage et des traits en diverses positions sur la feuille, de longueur l'une des dimensions du rectangle.

Consigne

Construire sur la feuille des rectangles dont l'un des côtés est l'un des traits dessinés et ayant la même aire que le rectangle donné. A chaque trait correspond un rectangle.

Bilan

En déplaçant un rectangle de n'importe quelle façon, par exemple en le faisant tourner autour d'un point ou en le faisant glisser le long d'un rail, on obtient un rectangle superposable. En particulier, les dimensions et l'aire sont conservées. Le nombre de carreaux nécessaires pour paver le rectangle n'a pas changé.

Activité 2

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par deux : émetteur, récepteur. Chacun est à la fois émetteur d'un message et récepteur d'un message venant d'un autre camarade. Ils disposent de papier blanc (non quadrillé) et de 3 ou 4 rectangles polycopiés (par exemple 2 cm sur 5 cm ; 3 cm sur 4 cm ; 1 cm sur 2 cm).

Consigne

Chacun de vous choisit un de ces petits rectangles et dessine un autre rectangle pavable à l'aide du rectangle choisi. Il écrit ensuite un message sans dessin à un camarade pour que le récepteur puisse dessiner le même rectangle (c'est-à-dire superposable). Le récepteur pave à son tour le rectangle trouvé avec le carrelage de son choix. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs rectangles et le nombre de pièces utilisées pour paver.

Dans un deuxième temps, on pose la question suivante : Etait-il possible de paver avec d'autres carreaux ? Si oui lesquels ? Si non pourquoi ?

Analyse de la tâche

a) Emetteur

L'émetteur doit d'abord dessiner son rectangle. Pour qu'il soit pavable à l'aide du rectangle élémentaire choisi, le plus simple est de reporter un nombre entier de fois la longueur et un nombre entier de fois la largeur (ou encore de prendre des dimensions multiples de celles du rectangle élémentaire choisi).

Pour rédiger son message, l'émetteur doit décrire le rectangle qu'il a dessiné. Pour cela, il peut :

– soit donner ses dimensions en cm ;

– soit décrire la construction à partir du rectangle élémentaire choisi : nombre de reports de la longueur, nombre de reports de la largeur. Dans ce cas, il doit aussi décrire le rectangle élémentaire choisi. Comme on n'a pas droit aux dessins et qu'aucun codage n'a été établi, l'émetteur peut décrire le rectangle élémentaire choisi en donnant ses dimensions en cm ou en utilisant des périphrases : "le petit, le moyen, le grand" (Désignation ambiguë en ce qui concerne les rectangles (2,5) et (3,4)). Le codage par un couple est bien adapté. Remarquons que si l'enseignant a donné un nom aux rectangles élémentaires, il est probable que c'est cette désignation que les élèves utiliseront dans les messages.

b) Récepteur

Si le message est correct, la construction du rectangle ne doit pas poser de problèmes.

Si le message est descriptif de la construction (et correct), le pavage choisi par l'émetteur se déduit de la construction. Le récepteur peut choisir le même pavage ; il doit alors utiliser le même nombre de pièces que l'émetteur. Il peut aussi chercher un autre pavage.

Si le message donne les dimensions du rectangle, le récepteur doit d'abord déterminer le (ou les) rectangle(s) élémentaire(s) qui permet(tent) de paver et réaliser le pavage ou prévoir le nombre de carreaux par le calcul.

Remarque : le rectangle (1,2) devrait toujours convenir avec les rectangles élémentaires choisis ici.

c) Confrontation

Emetteur et récepteur doivent avoir des rectangles superposables. Mais le nombre de carreaux utilisés pour paver peut être différent. Ils doivent alors faire la relation entre les nombres trouvés et les carreaux utilisés. Par exemple, si l'émetteur a utilisé n carreaux (3,4), le récepteur p carreaux (1,2), on doit avoir $p = n \times 6$.

Le fait que ℓ' soit fixe se traduit sur le graphique par un alignement des points de coordonnées $(x,y) = (\text{mes}_u\, \ell, \text{mes}_c\, A)$. La question est de savoir si les points de coordonnées (x,y) alignés avec les précédents mais avec x non entier correspondent à des rectangles de la famille et, réciproquement, si tous les rectangles de la famille sont représentés par des points alignés avec les précédents. La réponse viendra partiellement de l'expérience.

Si on laisse aux élèves le choix de la dimension variable, ils peuvent eux-mêmes introduire des valeurs numériques non entières (demis, quarts, nombres décimaux qu'ils connaissent), mais ils n'y sont pas obligés. L'enseignant peut provoquer le calcul sur de tels nombres en choisissant pour a une valeur non entière mais connue des élèves. Le choix de a est une variable de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir.

b) Organisation de la classe et consigne

Les élèves sont par équipes de quatre. On donne à chaque équipe une valeur de a.

Exemples :

$a = 5,\ a = 7,\ a = 3 + \frac{1}{2},\ a = 8 + \frac{1}{2},\ a = 2 + \frac{3}{4},\ a = 4 + \frac{6}{10} \ldots$

Les fractions peuvent être écrites sous forme décimale selon le type d'écriture familier aux élèves.

Consigne

Dans chaque équipe, vous allez vous partager le travail. Chacun dessine 4 ou 5 rectangles différents dont une des dimensions mesure en cm la valeur qu'on vous a donnée. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun de ces rectangles, vous calculez l'aire en cm^2. Vous organisez les résultats dans un tableau.

c) Analyse de la tâche

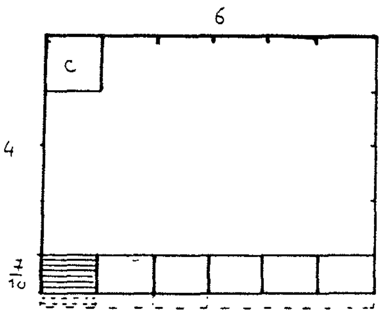
Nous présentons cette analyse en exploitant l'écriture fractionnaire de a. Cette analyse est à adapter si a est écrit sous forme décimale.

Si une des dimensions est entière, on a à faire le produit d'une fraction par un entier, ce qui se ramène à une addition répétée en utilisant l'additivité des aires.

Exemples :

$a = 4 + \frac{7}{10},\ x = 6.$

L'unité d'aire est l'aire c du carré C de dimension u. Le problème est de savoir combien de C il nous faut pour paver le rectangle.



Il faut déjà 24 carrés entiers (6 X 4) et on sait qu'il en faut moins de 30 (6 X 5). Pour le reste on a 6 petits rectangles dont l'aire de chacun vaut $7 \times \frac{1}{10} c = \frac{7}{10} c$: chaque petite bande se reporte 10 fois dans le carré C et il faut en prendre 7 pour recouvrir un petit rectangle.

On a donc $6 \times \frac{7}{10} = \frac{42}{10} = 4 + \frac{2}{10}$.

L'aire du rectangle en C est donc :

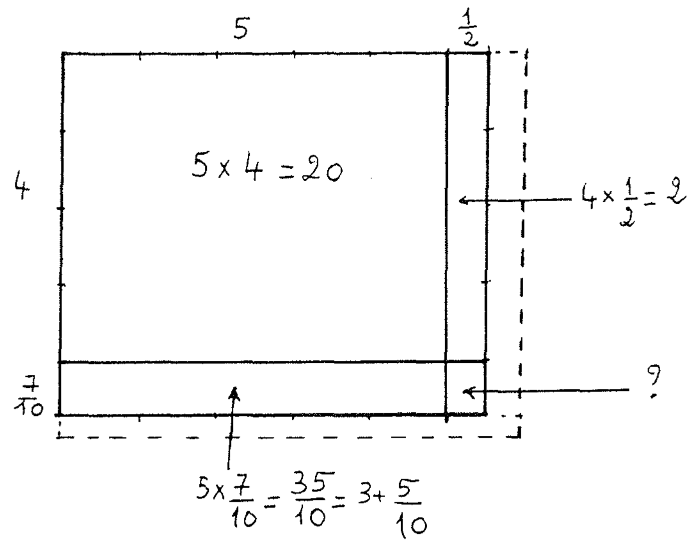
$(6 \times 4) + (6 \times \frac{7}{10}) = 24 + \frac{42}{10} = 24 + 4 + \frac{2}{10} = 28 + \frac{2}{10}.$

On peut écrire $6 \times (4 + \frac{7}{10}) = 28 + \frac{2}{10}$.

Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles.

Exemple :

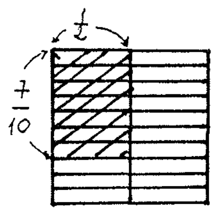
$a = 4 + \frac{7}{10} \quad x = 5 + \frac{1}{2}.$



$$(4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2}) = (4 \times 5) + (4 \times \frac{1}{2}) + (5 \times \frac{7}{10}) + (\frac{7}{10} \times \frac{1}{2})$$

$$= 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + (\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}).$$

Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimensions $\frac{7}{10}$ u et $\frac{1}{2}$ u. On le reporte dans le carré unité.

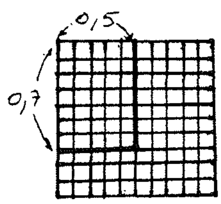


Le rectangle R de dimensions $\frac{7}{10}$ u et $\frac{1}{2}$ u est composé de 7 petits rectangles r de dimensions $\frac{1}{10}$ u et $\frac{1}{2}$ u. Il faut 20 de ces petits rectangles pour paver le carré unité. L'aire du petit rectangle r est donc $\frac{1}{20}$ c, l'aire du rectangle R est $7 \times \frac{1}{20}$ c $= \frac{7}{20}$ c.

Finalement la mesure de l'aire cherchée est :

$$(4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2}) = 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}$$

Remarque :



Avec des nombres décimaux, on aurait le même travail. Par exemple $0,5 \times 0,7 = 0,35$: on a besoin de 100 carrés de dimension 0,1 u pour paver le carré de dimension 1 u. L'aire du carré de dimension 0,1 u est donc 0,01 c, il en faut 35 pour paver le rectangle de dimensions (0,5 u ; 0,7 u) donc $0,5 \times 0,7 = 0,35$.

Observations

– Dans toutes les classes de CM1 et CM2 observées, les élèves ont procédé de la manière décrite ci-dessus.

– Les élèves de 6ème connaissent la technique de multiplication de 2 décimaux. L'activité présentée ici est l'occasion de donner du sens à la fois à cette multiplication et au calcul de l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions dans le cas où les mesures ne sont pas entières.

d) Bilan et institutionnalisation du calcul de l'aire

Les procédures sont exposées au cours du bilan sur de nombreux exemples. Les élèves ont le choix des valeurs numériques pour b ; ceux qui se sentent moins à l'aise dans le calcul sur les fractions ou les nombres décimaux ont tendance à ne choisir que des valeurs entières de b. Il est nécessaire que chaque élève ait à faire le calcul dans le cas où a et b sont fractionnaires. Cela sera fait au cours d'exercices de renforcement sur cette séquence. Après ces exercices de renforcement, on est en mesure d'institutionnaliser la technique de la multiplication en tableau.

Par exemple $(4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2})$.

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{4}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$

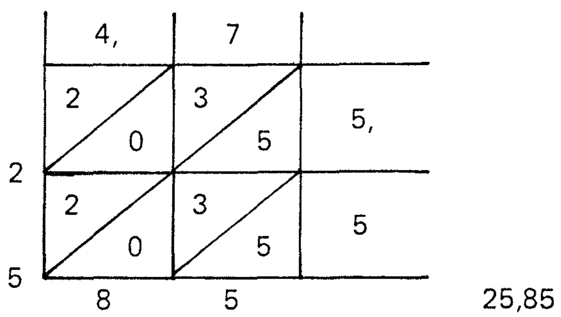
Résultat : $20 + \frac{35}{10} + \frac{4}{2} + \frac{7}{20} =$

$= 20 + 3 + \frac{5}{10} + 2 + \frac{7}{20} =$

$= 25 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}$

La disposition peut se perfectionner quand on a affaire à des nombres décimaux.

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{20}{10}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{5}{10}$



e) Représentation graphique

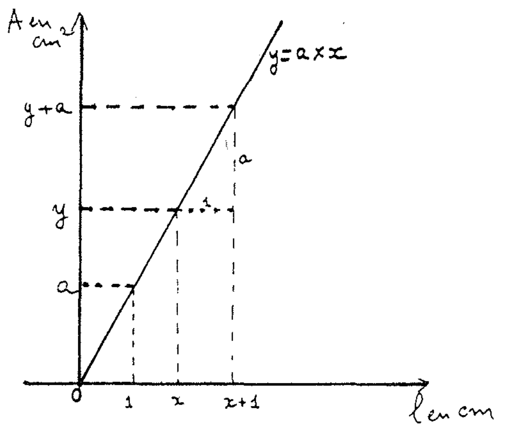
Travail individuel.

Consignes.

1. Représenter graphiquement tous les couples (x, y) trouvés par l'équipe pour la valeur de a donnée ; x est la mesure en cm de l'autre dimension du rectangle, y est la mesure de l'aire en cm^2.

2. Y a-t-il dans la famille un rectangle dont l'aire mesure 20 cm^2, 25 cm^2, etc ...

Le but de ce travail est de faire jouer à la représentation graphique le double rôle de recueil et organisation de l'information (consigne 1) et de source d'information nouvelle (consigne 2) en donnant du sens à de nouveaux points intermédiaires.



Les points obtenus s'alignent sur une droite qui passe par l'origine : si on progresse de 1 vers la droite, on progresse de a vers le haut. Les élèves constatent d'abord cette propriété quand x est entier. Soient M et P les points de coordonnées respectives $(n, a \times n)$ et $(n + 1, a \times (n + 1))$ avec n entier. Si on considère un rectangle de dimensions a cm et x cm avec $n < x < n + 1$, à ce moment de la situation un élève sait lui associer son aire $a \times x$ cm^2, du moins si x est un nombre qu'il connaît. Un tel x est de la forme $n + \frac{k}{p}$ avec $k < p$ et (le plus souvent) p = 2,4 ... 10,100 ... ; si on progresse de $\frac{1}{p}$ vers la droite, on progresse de $\frac{a}{p}$ vers le haut : en p coups on a progressé de 1 vers la droite et de a vers le haut. Le point correspondant de coordonnées (x, y) avec $y = a \times x$ est sur le segment MP. Tous les points correspondant aux rectangles de la famille qu'on a trouvés sont alignés avec M et P sur une droite qui passe par l'origine.

Réciproquement, étant donné un nombre y, existe-il un rectangle de la famille d'aire y cm^2 ? La réponse fait intervenir la division comme outil : un tel rectangle a pour dimensions a cm et x cm avec $y = a \times x$. Graphiquement ce rectangle sera représenté par le point de la droite D et d'ordonnée n. Les élèves peuvent lire un résultat approché sur le graphique et le contrôler par le calcul. Le graphique sert aussi de contrôle au calcul : si on trouve un point qui n'est pas dans l'alignement, il faut vérifier le calcul correspondant.

f) Institutionnalisation de la variation de l'aire en fonction d'une dimension

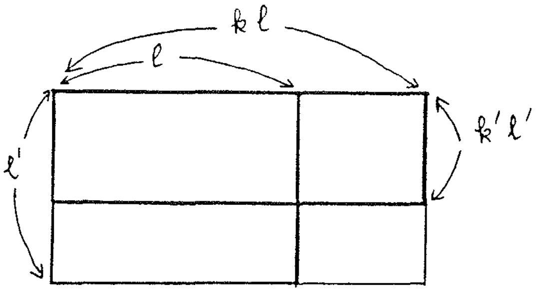
Le bilan permet de conclure que l'aire est proportionnelle à la dimension variable du rectangle.

– si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre, quel qu'il soit, entier ou non, l'aire est multipliée par le même nombre ;

– si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre k entier ou non, et l'autre dimension par un nombre k', entier ou non, l'aire est multipliée par $k \times k'$;
$A \longmapsto kA \longmapsto k' \times (kA) = (k \times k') A$;

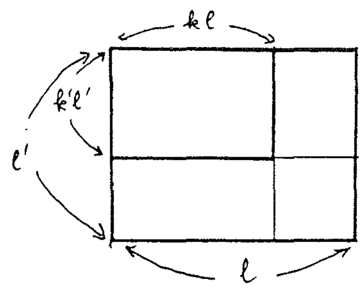
– en particulier si on multiplie les deux dimensions d'un rectangle par un nombre k, l'aire est multipliée par $k \times k = k^2$:

– c'est vrai aussi quand $k < 1$ ou $k' < 1$. Dans ce cas le rectangle obtenu ne contient pas l'ancien, mais on a $A' = (k \times k')\,A$.



$k > 1$ et $k' < 1$
$A' = (k \times k')\,A$

Si $k < 1$ et $k' < 1$, on obtient un nouveau rectangle d'aire $(k \times k')\,A$ qui peut s'inclure dans le rectangle donné d'aire A.



$k < 1$ et $k' < 1$
$A' = (k \times k')\,A$

2.3 Recherche de rectangles de périmètre donné

Les élèves sont par équipes de 2 ou 4.

A chaque équipe on donne une valeur de P (différente d'une équipe à l'autre). Les élèves de l'équipe cherchent des rectangles de périmètre P cm et calculent l'aire. Ils organisent leurs résultats dans un tableau. a et b sont les mesures des dimensions en cm, A la mesure de l'aire en cm^2.

a	b	P	A

Cette situation a un double **objectif** :

– elle permet un renforcement de la situation précédente de calcul de l'aire d'un rectangle dans le cas où les dimensions ne sont pas entières : quand P est fixé, il y a peu de rectangles de la famille dont les dimensions sont entières et, si on demande à chaque équipe de produire suffisamment de rectangles différents, les élèves seront obligés de choisir a et b non entiers ;

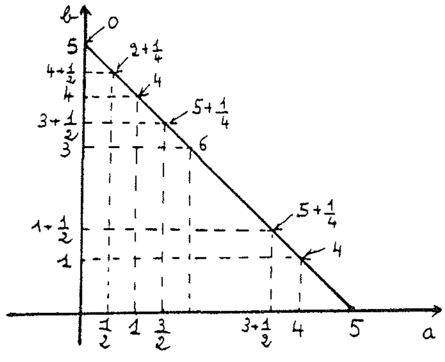
– elle permet d'institutionnaliser le fait que, à périmètre constant, l'aire varie. Dans l'approche de la notion d'aire indépendamment de la mesure (voir 2.3*), nous avions fabriqué des surfaces de périmètres différents et de même aire, nous avions peu étudié la situation symétrique (même périmètre, aires différentes) faute de moyens pour apprécier la variation d'aire ou de connaissances géométriques suffisantes. Nous sommes maintenant en mesure de le faire au moins dans le cas des rectangles.

(*) Les références portant, comme celle-ci, une étoile renvoient à la première partie de l'article (Grand N n° 39-40)

Déroulement

Le tableau "montre" que l'aire n'est pas constante, mais il ne dit rien sur la façon dont elle varie. Le report graphique permet de visualiser cette variation :

1ère représentation

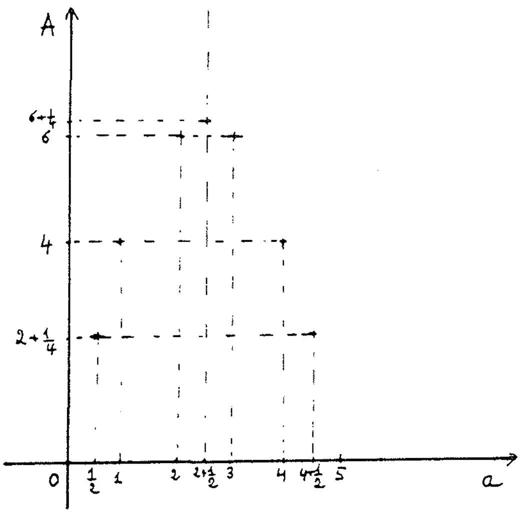


Exemple P = 10

Les points M de coordonnées (a,b) représentant les rectangles de la famille sont alignés. A côté de M, on note la mesure de l'aire du rectangle correspondant, et on constate le sens de variation et la symétrie : si le point M (a,b) représente un rectangle de la famille, M'(b, a) représente le "même" rectangle. L'aire augmente quand la différence entre a et b diminue.

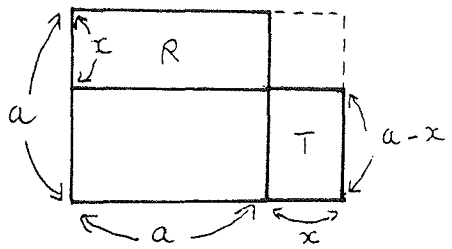
2ème représentation

On porte en abscisse une dimension (l'autre est alors connue aussi) et en ordonnée l'aire du rectangle. Pour préciser le tracé de la courbe les élèves sont incités à faire des calculs intermédiaires.



Exemple P = 10

Quand a augmente, A augmente puis diminue. On a une symétrie : les points correspondants représentent des rectangles de mêmes dimensions. On peut penser que, parmi tous les rectangles de la famille, c'est le carré qui aura la plus grande aire. On peut aussi s'en convaincre par un raisonnement géométrique :



si, à partir du carré de la famille de dimensions (a, a), on fabrique un rectangle de la famille, on doit enlever à un côté ce qu'on ajoute à l'autre. On enlève un rectangle R d'aire plus grande que le rectangle T qu'on ajoute. Il nous manque le petit carré de dimensions (x, x).
Au passage, on remarque que :
$(a + x) \times (a - x) = a^2 - x^2$.

Prolongements possibles

– Etant donné un nombre y, existe-t-il un rectangle de la famille d'aire y cm^2 ? Autrement dit, peut-on trouver un rectangle dont on connaît l'aire et le périmètre ?

Les représentations et les raisonnements précédents permettent de prévoir que y ne doit pas être trop grand : dans la famille des rectangles de périmètre P cm, c'est le carré qui a la plus grande aire, c'est-à-dire $\frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$.

Si $y > \frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$, on ne trouvera pas de rectangle.

Si $y \leqslant \frac{P}{4} \times \frac{P}{4}$, on trouvera peut-être un rectangle, en tous cas on pourra trouver des rectangles de la famille dont l'aire s'approche autant qu'on veut de l'aire demandée.

– Existe-t-il dans la famille des rectangles de périmètre P cm, des rectangles d'aire aussi petite que l'on veut ? Plus petite que 1 cm^2 ? Plus petite que 0,01 cm^2 ?