POUR DÉMARRER EN GÉOMÉTRIE
ET EN CLASSE DE 3ème : Une situation problématique

Sylvie PELLEQUER et Alain BRONNER
IREM de Montpellier
Groupe Didactique

Introduction

Le démarrage de l'année est toujours une aventure et les premiers contacts sont souvent décisifs autant au niveau relationnel qu'au niveau du type de fonctionnement en classe.

Quel enseignant ne s'est-il jamais demandé comment il allait commencer l'année ?
Quels contenus et quels objectifs ?
Par des révisions systématiques pour pallier à l'érosion des grandes vacances ?
Par des exercices ? Par quelles démarches ?

Nous proposons un démarrage possible expérimenté dans une classe de troisième dont les objectifs principaux visent le repérage des acquis et l'apprentissage du raisonnement en géométrie. Ce type de situation peut cependant être repris dans l'année.

I. Problématique

Notre intention est de démarrer l'année en prenant en compte dès le début les objectifs suivants :

- connaître les acquis et les difficultés des élèves sur certains domaines de connaissances et commencer des remédiations ;
- repérer leur rapport à la démonstration et engager un apprentissage en troisième ;
- mettre en place un certain contrat pédagogique et didactique dans la classe (Brousseau, 1986).

Commencer l'année sur des révisions systématiques, plus ou moins exhaustives, ne nous paraît pas un moyen efficace pour remédier à d'éventuelles difficultés, ne donne pas l'impression aux élèves qu'ils ont changé de classe et risque de laisser des mathématiques une image de "déjà vu". Au contraire, il nous a semblé important d'essayer de motiver les élèves autour d'une situation dans laquelle, ils sont moteurs vis à vis de leurs réflexions et de leurs décisions. La nouveauté n'est pas dans le contenu mathématique abordé (ici les définitions et théorèmes de la classe de quatrième), mais dans la façon de les aborder.

Nous avons cherché à proposer aux élèves une situation assez riche favorisant :
- une recherche de problème où les élèves sont les acteurs ;
- la mise en jeu de nombreux concepts mathématiques issus des enseignements précédents ;
- une prise en compte de l'hétérogénéité des élèves par une différenciation des tâches proposées ;
- des types d'activités de nature différente (raisonnement, calcul, rédaction, ...).

Les problèmes scolaires d'application du "cours", où figurent directement, après les donnés, des questions du type "calculer telle distance ou tel angle" ou "démontrer que ..." ne nous convenaient pas. De plus la gestion des séances de travaux dirigés où on propose de résoudre une liste de petits exercices suivis de correction par un élève ou le professeur, ne satisfaisait pas à nos intentions.

On ne pouvait utiliser des situations-problèmes au sens de Douady (1986) puisque notre but n'est pas de mettre en place de nouvelles connaissances au moyen de certaines conditions sur les problèmes.

Des problèmes ouverts (Arsac et al, 1988) ne correspondent pas à nos objectifs, même si nous si nous ne rejetons pas le développement d'une démarche scientifique telle que "faire des essais, conjecturer, tester, prouver". D'autre part il ne s'agit pas d'attendre des démarches originales dans des problèmes possédant les caractéristiques d'un problème ouvert, mais bien de repérer si certaines connaissances et méthodes de la classe de quatrième sont disponibles.

Nous avons donc été amenés à proposer une situation satisfaisant aux conditions suivantes :

- La situation s'appuie sur un *énoncé-problématique* : nous entendons ainsi un énoncé où figurent des données géométriques et/ou numériques *sans question précisée*. Cet énoncé doit permettre de faire émerger de nombreuses questions produites par les élèves eux-mêmes. Les questions doivent mettre en jeu de nombreux concepts mathématiques et pouvoir être traitées avec les connaissances visées dans les apprentissages précédents.

- L'opérationnalisation d'un tel énoncé en classe doit conduire à la mise en place d'un milieu (Brousseau, 1986) avec lequel l'élève va interagir. Nous essayons de favoriser un fonctionnement a-didactique (Brousseau, 1986) à travers des situations de communication et des situations de validation. Plus précisément les élèves seront amenés successivement :
• à émettre des questions à partir de l'énoncé ;

• à proposer à d'autres élèves une question, à préciser les théorèmes, qui permettent son traitement, et les informations utiles de l'énoncé ;
• à analyser et critiquer la résolution du groupe récepteur, à comparer avec leur propre démarche de résolution.

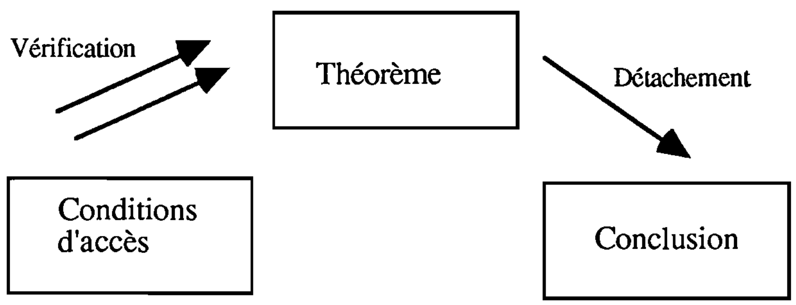
Nous faisons *l'hypothèse* que dans une telle situation :

- on favorise un riche questionnement et des activités de résolution de problèmes, sans nécessairement prendre des problèmes complexes et mettre en jeu de nouvelles connaissances ;
- on peut apprécier le degré de capitalisation de connaissances, méthodes et situations sur un domaine déjà étudié par les élèves ;
- on permet aux élèves une meilleure prise en compte des attentes de l'enseignant sur l'activité mathématique et le fonctionnement de la classe de mathématique ;
- on permet à l'enseignant une meilleur connaissance de ses élèves et on favorise un début de mise en place d'un contrat didactique en classe.

II. Nos positions sur l'apprentissage de la démonstration

Elles s'appuient sur les analyses de R. Duval et M.A. Egret (1991) qui montre qu'un pas déductif met en œuvre trois propositions.

La structure ternaire d'un pas déductif est illustrée par le scéma ci-dessous :



Les trois flèches qui relient les conditions d'accès au théorème montrent qu'il en faut autant que de conditions requises par le théorème. Le nombre de conditions pour appliquer un théorème varie donc en fonction du théorème et il faut s'assurer que l'on retrouve bien, dans l'exercice, toutes les conditions nécessaires à l'application du théorème, c'est à dire la partie "Si ..." du théorème.

De plus le théorème utilisé ne peut être pris que dans un ensemble de théorèmes déjà construits théoriquement et connus (le cours des enseignements précédents et des classes précédentes). Il faut amener les élèves à bien concevoir ces énoncés comme toujours vrais.

Enfin il n'y a qu'une seule conclusion possible, celle qu'on détache du théorème (la partie "alors..." du théorème) et qu'on applique à l'exercice. Ces trois éléments n'ont de sens dans le raisonnement que globalement et en interaction, mais pour mieux faire sentir ces trois étapes aux élèves, des situations peuvent être conçues pour bien mettre en évidence chacune d'elles.

Concernant la rédaction de la démonstration, nos choix sont de laisser les élèves organiser ces étapes sans pour autant imposer d'ordre dans les divers éléments de chaque pas déductif. Cependant nous sommes exigeants sur la structure ternaire d'un pas déductif.

Dans une rédaction de démonstration, il nous semble important de retrouver :
- toutes les conditions d'accès au théorème, liées à la question, bien marquées ;
- le théorème utilisé, cité hors contexte, représentant le savoir mathématique ;
- la conclusion, liée à l'exercice, bien citée.

L'essentiel est que la logique interne du pas ternaire soit respectée : un élève peut rédiger en commençant par la conclusion et raisonner juste. Par contre, il faut essayer de faire comprendre à l'élève qu'une affirmation, qui ne s'appuie pas sur un théorème ou sur une reconnaissance des données, reste du domaine de l'opinion et pas de celui des mathématiques.

III. Objectifs de la situation expérimentée

La situation choisie est une activité géométrique centrée sur le raisonnement déductif, mais on peut différencier plusieurs types d'objectifs.

III.1. Au niveau du raisonnement

- Connaître la position des élèves sur le raisonnement déductif : le sens des théorèmes (du type "si ... alors ...") et leurs utilisations, le statut de la figure, et la rédaction de démonstrations ;
- Donner des références communes aux élèves sur le raisonnement déductif et continuer l'apprentissage de la démonstration.

III.2. Au niveau des contenus

- Repérer les connaissances des élèves sur les théorèmes de géométrie ;
- Réactiver les théorèmes de quatrième les plus utiles pour la troisième ;
- Connaître les rapports des élèves avec le théorème de Pythagore et la notion de racine carrée (par exemple l'utilisation du radical) ;
- Avoir des informations sur la disponibilité de l'outil "cosinus" et sur la conclusion qu'ils donnent pour le calcul d'un angle ; en particulier voir leur niveau de réflexion sur les notions de "valeur exacte" et "valeur approchée" ;
- Donner des pistes pour les remédiations, prolongements, et approfondissements dans les domaines du programme des classes antérieures et celui de troisième.

III.3. Au niveau du contrat de travail

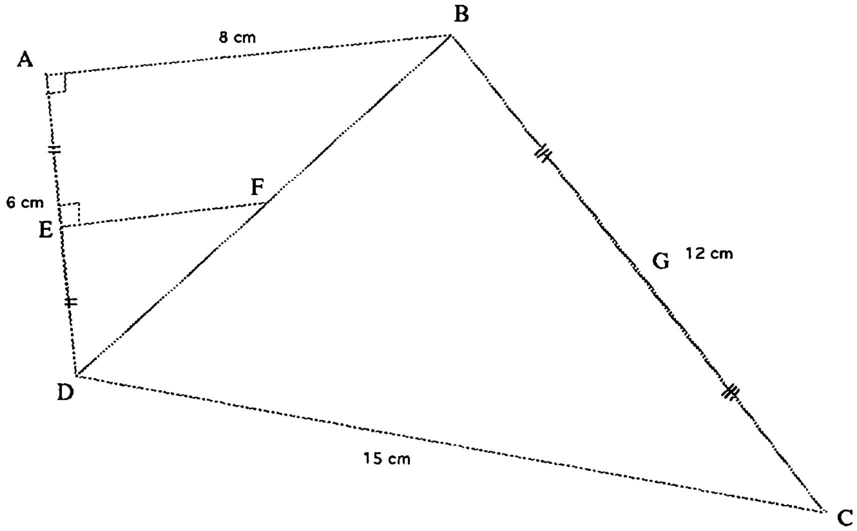
- Habituer les élèves à une certaine rigueur dans les raisonnements, le vocabulaire et les rédactions ;
- Faire repérer les attentes de l'enseignant dans les rédactions de démonstrations ;
- Habituer les élèves au travail en groupe, aux échanges entre pairs sur les mathématiques, et favoriser l'écoute des autres ;

- Inverser le contrat traditionnel pour : "le savoir n'est pas du seul ressort de l'enseignant". A certains moments ce n'est plus le professeur qui valide, mais les connaissances mathématiques des élèves. Ils doivent interroger le savoir, l'utiliser et avancer dans la résolution de la situation de manière autonome.

IV. Description de la situation

IV.1. L'énoncé-problématique

Il s'agit de la figure ci-dessous



Le choix de cette figure est d'abord justifié par le fait que nous voulions une situation qui permette de mobiliser les connaissances des classes antérieures sur les triangles (et les triangles rectangles en particulier), le théorème de Pythagore et sa réciproque, les divers théorèmes des milieux dans un triangle, le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle, le cosinus d'un angle, la notion de racine carrée.

Ensuite elle favorise un questionnement sur les "inconnues" de la figure, puis le traitement de nombreuses questions et par là des raisonnements.

Elle est très riche quant au nombre de questions possibles et de théorèmes à utiliser. De plus il peut y avoir des questions "très simples", même pour des élèves en difficulté. Elle peut aussi permettre un questionnement sur les notions de "valeur exacte" et "valeur approchée" d'un nombre.

L'activité est basée sur un questionnement à partir de la figure codée ; sans question posée par le professeur. Ce choix est motivé par le fait qu'elle favorise un travail de réflexion sur la figure et son statut :
- la figure est un moyen pour "chercher" des solutions ;
- mais elle n'est pas un moyen pour démontrer ;
- une figure codée montre la "force" des codages et des "non" codages ;
- et ainsi aide à différencier ce qu'on voit de ce que l'on sait de façon sûre ;

- cela permet aussi de passer en revue de futures conditions d'accès.

IV.2. Le dispositif et le déroulement de la situation

L'expérimentation a eu lieu en tout début d'année dans une classe de troisième de l'un des auteurs de l'article. La classe est constituée de 26 élèves qui seront partagés en 4 groupes de 4 élèves et 2 groupes de 5 élèves. Lors de cette première situation les groupes se font par regroupement géographique puisque le professeur ne connaît pas encore ses élèves.

La situation s'est déroulée sur trois séances d'une heure. La première a permis l'émergence de questions et le repérage des éléments de la structure ternaire des pas déductifs. L'objectif de la deuxième séance est le traitement des questions issues de l'énoncé, par l'intermédiaire de phases de communication et de validation entre les groupes d'élèves. La troisième séance vise un travail sur la rédaction en géométrie.

IV.2.1. Première séance

• Phase 1 (20 minutes environ)

objectifs

Mener une réflexion sur le statut de la figure et sur les données, et éventuellement modifier ce statut. Apprendre à lire les informations codées sur une figure et prendre conscience de l'intérêt du codage d'une figure.

Dégager les futures conditions d'accès (pour les phases 2 et 3) des conséquences probables, faire la différence entre données (sûres) et informations visibles ou probables, conjectures.

consignes

"Ecris toutes les informations que la figure te donne et dont tu es sûr".

déroulement

La figure est distribuée à chaque élève de la classe.

Dans un premier temps *le travail est individuel* et dure environ 10 minutes.

Dans un deuxième temps le professeur organise un bilan.

Au tableau le professeur écrit la liste de toutes les informations prises sur la figure par la classe. Chaque proposition va être discutée. Le professeur anime un débat avec la classe entière sur l'acceptation ou le rejet de certaines informations. Il ne tranche qu'en dernier recours.

La discussion a porté sur les questions :

- Peut-on considérer BDC comme un triangle rectangle ou bien F est-il milieu de [DB] ?

- Peut-on écrire directement que E milieu de [AD] ou que les droites (AB) et (EF) sont parallèles ?

(Voir en annexe 7 les informations de l'élève Bes).

Le fait de parler de ce type de questions dès le début de l'année permet de clarifier les exigences et attentes du professeur, et de préciser le contrat dans la classe de mathématique.

Le professeur doit clairement laisser entendre que les propositions doivent être rejetées ou acceptées par la classe et qu'il gère le débat entre les élèves.

A la fin du bilan, chaque élève de la classe peut aborder la phase suivante en disposant des mêmes informations que tous ses camarades, ce qui permet une certaine régulation au niveau des élèves.

Cette phase permet de mettre en place le milieu de la situation avec lequel l'élève va être confronté.

• Phase 2 (40 minutes)

objectifs

Mener une réflexion sur le raisonnement déductif et faire prendre conscience de la structure ternaire d'un pas déductif. Continuer le travail sur le statut de la figure.

Repérer la disponibilité de certaines connaissances géométriques et numériques.

consignes

a - Imagine une question que tu pourrais poser à un autre groupe.
b - Ecris à l'aide de quel(s) théorème(s) on peut y répondre.
c- Ecris les informations utiles de la figure pour cette question.
d- Cherche le plus de questions possibles.

déroulement

La recherche se fait maintenant par groupe. Le rôle du professeur dans cette phase est de faire respecter les consignes et le contrat du travail en groupe qui doit se mettre en place dans la classe.

La tâche du groupe est de trouver et traiter le plus de questions possibles liées à cette figure. Pour préparer la phase suivante le professeur va donner son accord sur une question à poser à un autre groupe.

Dans cette phase, *le rôle du professeur est crucial.* Il passe de groupe en groupe, pour s'assurer du bon fonctionnement de travail du groupe, et pour s'informer sur la façon de chercher, de débattre dans le groupe, mais aussi pour mesurer l'avancée du travail et le type de questions proposées et traitées. Mais il ne répond jamais à une question concernant le savoir mathématique. A chaque fois qu'il est interpelé dans ce sens, il renvoit la question au groupe. Le professeur n'est plus à ce moment le responsable du savoir en jeu, il ne valide pas les solutions des élèves, mais ce sont les élèves ici qui doivent prendre cette responsabilité. La règle du jeu doit être annoncée aux élèves, mais le professeur doit exercer sa vigilance pendant toute la séance.

Il est souvent difficile de gérer les différences de rythme de travail des élèves. Dans ce type d'activité la régulation est facilitée car il suffit d'inciter les groupes à chercher d'autres questions.

Le professeur assure la régulation des connaissances par le choix des questions à poser aux groupes. Ce choix est déterminé par les deux principaux critères : avoir des questions non triviales pour tous les groupes, des questions non trouvées par l'autre groupe et des questions intéressantes à développer en classes entière. Par exemple les groupes n'ayant pas pensé au "cosinus", ont une question dans ce sens. La phase suivante prolongera aussi la régulation entre les élèves.

Les questions apparues et les solutions sont reprises et analysées au paragraphe V.

IV.2.2. Deuxième séance

• Phase 3 (30 minutes)

Cette phase se déroule toujours en groupe et va comporter trois étapes.

objectifs

Les objectifs précédents sont poursuivis, plus spécifiquement : faire émerger les critères des élèves concernant une bonne rédaction.

Le travail est maintenant centré sur la résolution d'une question choisie par le professeur et la validation de la structure ternaire demandée dans la phase 2 de la séance précédente.

consignes

Résoudre la question reçue et rédiger le plus soigneusement possible la solution choisie par le groupe. Cette solution sera envoyée au groupe qui a émis la question. (premier temps).

Reprendre la question envoyée et la réponse de l'autre groupe. "Corriger" l'autre groupe avec les critères suivants :

Est-ce juste ou faux ?

La rédaction est-elle correcte ?

La démarche est-elle identique ? Sinon expliquer la vôtre.

déroulement

Premier temps

La tâche de chaque groupe est de résoudre et de rédiger une solution au problème correspondant à la question posée par un autre groupe.

Deuxième temps

Ensuite le groupe émetteur reçoit la solution d'un autre groupe à sa question et la confronte à sa propre solution selon les consignes données par le professeur.

Dans cette phase le professeur donne les nouvelles consignes et explique le fonctionnement de la classe qui peut ne pas être habituel pour les élèves. Il transmet les questions, puis les solutions dans le deuxième temps de la phase.

Il s'assure de la compréhension des consignes et garde la vigilance sur le fonctionnement et le contrat de travail en groupe.

Troisième temps (assez bref)

On effectue un dernier échange et chaque groupe reprend sa solution corrigée à la question posée par le groupe émetteur. Ce groupe peut ainsi réagir à la correction et voir éventuellement une autre démarche.

Le professeur est la courroie de transmission pour passer les questions ou renvoyer les solutions entre certains groupes, et il fait respecter le contrat. Il continue à jouer pendant cette phase un rôle d'observateur de l'apprentissage et du travail des groupes. La régulation entre les groupes reste facilitée car le professeur peut proposer aux groupes les plus rapides de rédiger une autre question.

Chaque groupe reste responsable de son travail. Les diverses communications entre les groupes permettent, à des degrés différents, une certaine rétroaction du travail de chacun, sans le besoin indispensable de validation par le professeur dans cette phase.

• Phase 4 (30 minutes)

objectifs

Prendre conscience aux élèves du pas ternaire dans les démonstrations et faire poursuivre la régulation entre les élèves à propos de la démonstration et de certains contenus mathématiques.

C'est une phase de bilan où deux questions vont être reprises :
- La nature du triangle BDC
- Le calcul de l'angle ABD

En particulier les conditions d'accès du théorème seront précisées ainsi que le théorème lui même. Le choix de la première question permet de mettre en évidence l'utilisation implicite de la contraposée dans certaines questions (sans institutionnaliser cette notion).

Un deuxième objectif est de mener une réflexion sur les notions de "valeur exacte" et de "valeur approchée" à propos du cosinus, et plus généralement sur le traitement des écritures correctes ou fausses apparues dans la première question.

déroulement

Le professeur reprend au tableau avec la classe entière les deux questions retenues. C'est la classe entière maintenant qui va faire le point sur ce qu'on attend comme solution aux deux questions. Le professeur reprend en fin de séance la responsabilité de façon à expliciter ses premières exigences et attentes sur la démonstration et sur les connaissances mathématiques en jeu dans la situation.

Les théorèmes sont décontextualisés de la situation et écrits dans le cahier de cours.

Cette phase est centrée sur la validation des raisonnements, des solutions et de certaines écritures mathématiques. Elle est délicate à gérer dans la mesure où le professeur essaie de rester au maximum en retrait par rapport à l'évaluation des propositions des élèves. En général la classe (les élèves) a pu argumenter correctement et se mettre d'accord sur la démonstration des questions. A partir d'un certain moment le professeur a fait usage de sa responsabilité pour faire le point sur le raisonnement déductif et pour trancher sur certains résultats, notamment pour les réponses attendues sur le cosinus et soulever le problème des valeurs approchées. Cette dernière question sera retravaillée tout le long de l'année.

IV.2.3. Troisième séance

• Phase 5 (une heure)

objectif

Continuer le travail sur le sens de la démonstration en centrant l'activité sur les problèmes de rédaction de démonstrations.

Donner de l'importance à la rédaction de la démonstration et la détacher du temps de recherche.

Mesurer l'impact des phases précédentes et faire émerger certains critères indispensables (voir II.) à une bonne rédaction d'une démonstration.

déroulement

Quatre rédactions d'élèves de certaines questions sont retenues (annexe 6).

Dans cette phase le travail se fait d'abord en groupe, puis en classe entière.

La tâche des élèves est de discuter des conditions d'acceptation ou de refus des rédactions.

La situation aurait pu se terminer après le bilan de la phase précédente, mais il nous a semblé important de travailler un autre aspect, la présentation de la solution. En effet on constate régulièrement dans les classes que c'est une difficulté importante pour de nombreux élèves. De plus la rédaction est généralement négligée car les élèves s'arrêtent souvent à la solution sans chercher à la mettre en forme. Même si pendant les phases précédentes de notre situation, le problème de la rédaction de solutions est intervenu plus ou moins explicitement, une phase explicitement centrée sur ce problème nous semble nécessaire.

Si nous ne souhaitons pas imposer de modèles de rédactions, nous préciserons certaines exigences en rapport à nos positions et choix sur la démonstration (voir paragraphe II). Cet aspect sera bien entendu repris selon les besoins dans d'autres séances.

Le choix de la rédaction 1 est dû au fait que toutes les conditions d'accès au théorème sont incomplètes au début et elles sont complètement oubliées dans l'enchaînement des pas.

Dans la rédaction 2 ne figure aucune condition d'accès qui justifierait l'utilisation d'un théorème.

La rédaction 3 correspond à nos critères (malgré un léger oubli concernant la condition d'accès au premier théorème - se placer dans le triangle ABD), même si la lisibilité et la présentation peuvent être améliorées. Enfin dans la rédaction 4 les élèves ont oublié le deuxième théorème. On n'a pas choisi des rédactions trop mauvaises, car elles seraient trop facilement rejetées. Celles-ci pouvaient être acceptées par les élèves ou du moins amener une confrontation importante entre les divers points de vue.

V. Analyse de quelques productions d'élèves

Les questions suivantes ont été proposées par les élèves :

- Calculer la longueur des segments [AF], [EF], et des côtés du triangle BFG ?
- Calculer le périmètre du triangle BFG ?
- Les droites (FG) et (CD) sont-elles parallèles ?
- Calculer l'angle ABD ?
- Calculer l'angle ADB?
- F est-il le centre du cercle circonscrit à ABD ?
- Quelle est la nature du triangle BCD ?

V.1. Le calcul de AF (4 élèves, Chal, Pers, Bois, Mat)

La méthode choisie repose sur le fait que [AF] est un rayon du cercle circonscrit au triangle rectangle ADB et sur le calcul du diamètre DB. Il n'apparaît pas d'erreur de contenus ou de calcul. En particulier l'utilisation du théorème de Pythagore est correcte et les élèves utilisent convenablement le radical pour conclure. Cela les conduit au bon résultat pour DB.

Ces quatre élèves ont indiqué que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse.

En revanche au niveau du raisonnement des implicites apparaissent :

- un élève (Cha) considère directement que F est le milieu de [BD] ou que [AF] est une médiane. (voir rédaction en annexe 1)
- Tous les élèves considèrent que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Est-ce dû au statut de la figure, ou bien ce parallélisme leur paraît-il évident avec les hypothèses ? Ce point sera discuté avec les élèves dans le bilan (Phase 4).

Au niveau de la rédaction de la démonstration les principales difficultés sont :

- l'absence du théorème utilisé ;
- le théorème sur le cercle circonscrit à un triangle rectangle (Mat, Chal, Pers) ;
- le théorème de Pythagore (Bois, Mat) ;
- un théorème des milieux (Mat) ;
- la précision des conditions d'accès au théorème utilisé (explicitement ou implicitement) :
- Pour le calcul de DB, on ne précise pas que le triangle est rectangle (Mat, Bois) ;
- Pour montrer que F est le milieu de [DB] (Bois) ;
- l'indication de la question (Chal).

V.2. Le calcul de EF (3 élèves, Ho, Sh, Bes)

Deux méthodes sont repérées :

- utilisation uniquement des théorèmes des milieux dans le triangle et en particulier EF est la moitié de AB (Bes, Ho) ;
- utilisation des théorèmes des milieux pour montrer que F est le milieu de [BD], et ensuite utilisation du théorème de Pythagore dans les triangles ADB et DEF (Sh).

Il n'apparaît pas d'erreur de contenu ou de calcul.

Sh et les théorèmes : L'utilisation du théorème de Pythagore par Sh est correcte, mais il a des difficultés avec les manipulations symboliques et en particulier avec le radical. Les résultats sont cependant corrects pour DB et EF. Signalons qu'il cite le théorème de Thalès au lieu de celui de Pythagore, mais applique bien ce dernier. Pour cet élève le fait que les droites (AB) et (EF) sont parallèles semblent implicites.

Les élèves Bes et Ho ont ressenti la nécessité de démontrer le parallélisme des droites à partir des données sur les droites orthogonales.

Au niveau de la rédaction de la démonstration dans ce groupe tous les théorèmes sont cités, sauf pour le parallélisme de (AB) et (EF).

En effet le théorème portant sur "les droites perpendiculaires à une même troisième" n'est pas cité et on a droit ici à une rédaction de la démonstration dans un code symbolique :

$$\left.\begin{array}{l}(AB)\perp(AE)\\(AE)\perp(EF)\end{array}\right\} AB//EF$$

On peut se demander s'il n'y a pas un effet didactique dû aux corrections au tableau. Y a-t-il cohérence entre la rédaction demandée et la présentation au tableau d'exemple de démonstration ou de correction d'exercices par les professeurs (ou les élèves) ?

La principale difficulté reste la précision des conditions d'accès au théorème utilisé :
- Pour montrer que F est le milieu de [DB] (Sh, Ho) ;
- Pour le calcul de EF , on ne précise pas le triangle et surtout les informations sur les milieux (Bes, Ho) (Voir la rédaction de Bes en annexe 2).

Concernant la difficulté de préciser les conditions d'accès d'un théorème :
On remarque ici que cet "oubli" se manifeste plus fréquemment entre deux pas de déduction, que pour le premier pas de la rédaction de la démonstration.

L'hypothèse que l'on peut avancer est qu'une fois qu'ils ont écrit les données et conséquences de certains pas, les élèves ne ressentent plus le besoin de reprendre à chaque pas les conditions d'accès du théorème utilisé.

Si cela est une exigence pour nous, elle ne paraît pas naturelle et spontanée pour les élèves et doit donc faire l'objet d'un apprentissage.

V.3. Le calcul des côtés du triangle BFG (2 élèves, Gras, Fré)

Cette question nécessite de nombreux raisonnements et calculs, analogues à ceux à la fois des questions a) et b).

Pour BF une méthode conduit à montrer que F est le milieu de [BD] et à utiliser le calcul de BD par le théorème de Pythagore. Ensuite pour [FG] on peut utiliser un théorème de milieux comme pour la question b). Ces méthodes semblent bien comprises pour ces deux élèves, mais Gras présente une qualité supérieure de rédaction. On ne note pas d'implicite, ni d'imprécision au niveau des théorèmes ou des conditions d'accès.

Au niveau du symbolisme apparaît chez Gras la difficulté à gérer les notations sur les segments, distances, longueurs ; et des formulations du genre BG = 1/2 de BC.

Rappelons par ailleurs que cet élève a une rédaction très claire et semble bien maîtriser les contenus sous-jacents. Ceci nous interpelle sur les difficultés propres à l'usage des notations.

Faut-il les accepter "encore" en 3ème, amener progressivement les élèves à un usage correct ou bien être intransigeant sur ce point ?

Fré a des difficultés pour présenter sa rédaction (voir annexe 4).

Des implicites apparaissent sur le fait que F est le milieu de [BD]. De plus cet élève semble "tourner en rond" en voulant préciser les conditions d'accès d'un théorème des milieux. Le théorème de Pythagore n'est pas donné.

Dans le calcul de BF il y a des informations inutiles qui semblent, peut être, venir de confusions avec l'usage intempestif des théorèmes de milieux.

V.4. F est le centre du cercle circonscrit à ABD (3 élèves, Sin, Bel, x)

Il y a moins de travail a priori ici car il suffit de montrer que F est le milieu de BD, ce qui a été en général démontré dans les questions précédentes.

Deux élèves ont bien vu que l'exercice repose sur la propriété du centre circonscrit à un triangle rectangle et qu'il faut montrer que F est le milieu de BD. Par contre au niveau du raisonnement l'implicite fort du parallélisme des droites (AB) et (EF) apparaît dans les trois copies et aucun ne fait référence à l'orthogonalité de certaines droites.

Le théorème des milieux est donné, par contre pour la propriété du centre les comportements sont plus variés. Seul Sin cite le théorème, tandis que x ne donne pas de théorème mais l'applique correctement.

Bel ne semble pas percevoir clairement le théorème d'appui de la déduction (voir annexe 4).

Les conditions d'accès sont données en général.

V.5. Le calcul des angles ABD (7 élèves, Dez, Iso, Ana, Bar, y, Cas, Tamb) **et ADB(ou EDF)** (3 élèves, All, Bra, Gran)

La méthode ne semble pas posée de problème à ces élèves. Ils ont tous bien vu que le calcul passait par celui de BD (obtenu sans difficulté par le théorème de Pythagore), celui du cosinus de l'angle considéré. Enfin ils ont conclu en utilisant la touche appropriée de la machine, sauf pour un élève.

La mobilisation du théorème de Pythagore est correcte et les élèves utilisent convenablement le radical pour conclure. Cela les conduit au bon résultat pour DB.

Au niveau de la rédaction le théorème est cité (sauf Tam et Bra) et très souvent énoncé. Un élève (Gra) donne un énoncé imprécis en ne précisant pas les côtés de l'angle droit. Quelques élèves ne donnent pas la condition d'entrée du théorème (Ana, Bar, y, Tam).

Deux des élèves se placent dans le triangle EDF, et fournissent des démonstrations assez longues et laborieuses (Alla, mais surtout Bra).

Le calcul du cosinus des angles ne pose pas de problème. Les élèves laissent parfois les résultats sous forme fractionnaire, parfois donnent l'écriture décimale :

par exemple $\cos(\mathrm{EDF}) = \frac{3}{5}$ ou 0,6.

Par contre peu d'élèves signalent les conditions d'accès à la formule donnant le cosinus (Cas, Tam, All, Bra seulement).

Ils utilisent correctement la machine pour avoir l'angle cherché. Un élève (Gra) explicite le procédé :

"A l'aide de la machine (inverse cosinus) j'obtiens l'angle EDF qui est égal à : 53,13°".

Au niveau des résultats les formulations et valeurs pour l'angle sont assez diverses, et montrent le flou sur ce calcul.

En général les élèves donnent l'égalité entre une valeur décimale et l'angle.

On trouve pour l'angle ABD les formulations:

Elève	Dez	Bar	Y	Tam	Ana	Iso	Cas
Valeur	=36,86°	=36,9°	=36,87	=36,8	=36,86 ≈ 37°	=36,86 = 37°	=36°,9

et pour l'angle EDF les formulations:

Elève	Gras	Alla	Bra
Valeur	: 53,13°	≈ 53°	≈ 53,3° L'angle EDF fait 53,3°

Beaucoup d'élèves donnent une égalité avec une valeur approchée. Il est difficile de préciser les critères de choix des valeurs approchées à part le fait d'être entière, ou décimale à une ou deux décimales.

Notons que pour certains l'approximation apparaît quand ils prennent un entier comme résultat. Enfin un élève (Iso) marque l'égalité avec deux valeurs approchées (voir annexe 5). On peut ainsi se demander quel est le statut de cette égalité ou du signe ≈ dans le cadre de cette recherche d'angle.

Cela semble, somme toute, assez normal par rapport au contrat (assez flou) en vigueur en 4ème concernant le calcul d'angle par le cosinus et la calculatrice.

D'ailleurs qu'auraient-ils donné avec le calcul de distance par le théorème de Pythagore si on avait choisi des nombres non carrés parfaits ?

Deux comportements attirent notre attention :

$$\text{(Iso)}\ \frac{AB}{DB} = \frac{8}{10} = \cos(ABD) = 36{,}86$$

$$\text{(Tam)}\ ABD = \cos\frac{8}{10} = \cos 0{,}8 = 36{,}8 = 36{,}86$$

Ces réponses montrent bien la difficulté pour ces élèves de gérer les écritures entre le cosinus et la fonction réciproque (ou plutôt une procédure réciproque) pour obtenir l'angle.

Un certain contrat doit ainsi être précisé en 3ème sur ces questions avec les élèves. Ce contrat va t-il de soi ? Pour les élèves sûrement pas comme on le voit.

Est-il le même pour tous les professeurs ? Il n'est pas certain qu'il en soit ainsi.

VI. Conclusion

Après cette première activité de début d'année des séquences spécifiques sur le théorème de Thalès, la trigonométrie et le calcul littéral ont été abordées. Elles ont pris appui sur ce premier travail de l'année et elles en constituent un prolongement et un approfondissement au niveau des contenus et du raisonnement.

Certaines séances ont été gérées comme celles décrites plus haut et un certain contrat de fonctionnement dans la classe a pu s'établir de sorte qu'elles n'aient pas de caractère anecdotique. D'autres situations-problématiques ont été ainsi proposées aux élèves dans des domaines différents.

Les résultats des élèves trois mois après cette activité et le contrat ainsi établi nous confortent dans notre hypothèse de l'impact d'une première activité du type décrit en tout début d'année:

D'une part elle nous a donnés, dès les premières séances, beaucoup d'informations sur les élèves eux mêmes, leurs acquis et leurs difficultés.
Un travail de fond a été effectué sur le raisonnement déductif et en plus tous les théorèmes important de Quatrième ont été réactivés.

D'autre part cette activité, par sa présentation et son fonctionnement, rompt le "contrat habituel" de la classe pour interpeller les élèves et les faire réagir dans le sens souhaité.

La première rupture vient du type même de tâche qui est proposée aux élèves, énoncer des questions et non résoudre directement des exercices ou faire des calculs comme dans le "contrat habituel".

Au niveau des contenus et du raisonnement le contrat doit aussi se négocier. Les élèves disposent d'une situation avec des informations. Ils sont invités à partir de celle-ci à repérer d'autres informations que l'on peut déduire des précédentes. Ainsi dans une situation géométrique, il y a des éléments données, d'autres qui sont alors "déterminés" et parmi ceux-ci certains que l'on peut connaître par l'usage de théorèmes et de déductions.

Ce n'est plus l'enseignant qui est le seul pilote, mais les élèves peuvent aussi accéder à un certain niveau de commande en interrogeant et en utilisant le savoir. Par exemple dans la situation ce n'est pas le professeur qui décide que (EF) // (AB), mais c'est le savoir.

Nous avons ainsi tenté une "dévolution" : un transfert d'une certaine responsabilité aux élèves vis à vis du savoir. N'est-ce pas là une condition nécessaire à un apprentissage mathématique ?

Une certaine autonomie doit être acceptée par moments par les élèves, ce qui n'est pas facile à obtenir. Cela nécessite la mise en place d'un certain milieu favorisant ce transfert de responsabilité. La recherche de situations et de conditions favorisantes est une préoccupation constante, et c'est ce que nous avons tenté dans le cadre de nos objectifs, en nous situant parmi certains résultats des recherches en didactique des mathématiques.

Bibliographie

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988) Problème ouvert et situation-problème, *IREM de Lyon.*

BROUSEAU G. (1986) Fondements et Méthodes de la didactique des Mathématiques. *RDM Vol. 7.2, la pensée sauvage.*

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *RDM Vol. 7.2, la pensée sauvage.*

DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics, Vol. 22 - n° 3, pp. 233-261.*

Annexe 1 : rédaction de l'élève "Cha" pour le calcul de AF

CHAI

ABD triangle rectangle en A inscrit ds le demi cercle de Ø DB

[AF] mediane issue de A

Donc AF = DF

Calcul de DB

Ds le triangle rectangle ABD ;
Grâce au théoreme de pythagore :

$BD^2 = AD^2 + AB^2$
$BD^2 = 6^2 + 8^2$
$BD = 36 + 64$; ε Uention
$BD = 100$
$BD = \sqrt{100}$
$BD = 10$ cm

F milieu de [BD] donc (théoreme des milieux

DF = AF = 5 cm

AF = 5 cm

Annexe 2 : rédaction de l'élève "Bes" pour le calcul de EF

Combien mesure EF ?

BES
Patrick

(AB) ⊥ (AE)
(AE) ⊥ (EF) } AB // EF

E milieu de [AD]
AB = 8 cm

D'après le 1er théorème des milieux :
« Si une droite est // à un côté d'un triangle et passe par le milieu d'un autre côté alors elle coupe le 3e côté en son milieu »
→ F coupe [DB] en son milieu

Et d'après le 2e théorème des milieux :
« le segment qui joint les milieux de 2 côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de la longueur du 3e côté »

$\Longrightarrow EF = \frac{1}{2} AB = 4$ cm

Annexe 3 : rédaction de l'élève "Fré" pour le calcul des côtés du triangle (BFG)

FRÉI

Dans le triangle BDC

Calcul de FG

F milieu de [BD] } donc [FG] coupe [BD] et [BC] en
G " de [BC] } leurs milieux

Donc d'après le théorème "un segment ~~Une droite~~ qui passe ~~est~~ par les 2 côtés d'un triangle en leur milieu est égale à la moitié du 3e côté du triangle", [FG] est égale à $\frac{1}{2}$ de CD

donc $FG = \frac{CD}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm FG = 7,5 cm

Calcul de BD :

Dans le triangle rectangle ABD :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$= 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$BD = \sqrt{100} = 10$ BD = 10 cm

Calcul de BF :

Ds le triangle rectangle BDA :

E milieu de [AD] } donc $BF = FD = \frac{BD}{2}$
F milieu de [BD] }

BD = 10 cm donc $BF = \frac{10}{2} = 5$ cm BF = 5 cm

Annexe 4 : rédaction de l'élève "Bel" pour montrer que f est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABD)

Bel
3°

Maths

* Démontrer que F est le centre du cercle circonscrit du triangle ABD ?

[AB] // [EF]
E milieu de [AD]
ABD trian. rect.
d'après le théorème du milieu
donc F est le milieu de [BD]

F est le milieu de [BD]
[EF] ⊥ [AD]
alors F est le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

Th du milieu :
Si une droite est // à 1 côté d'un tri et passe par le milieu d'un autre côté alors elle coupe le 3e côté en son milieu.

Annexe 5 : rédaction de l'élève "Iso" pour le calcul de $\widehat{ABD}$

ISO: Combien mesure l'angle $\widehat{ABF}$?
IVAN

Ds le triangle ABD pour calculer $\widehat{ABD}$.
Cos $\widehat{ABD}$: [AB] = 8 cm et [DB] = ?

[AB] // [EF] et E milieu de [AD] donc ds le triangle rectangle ABD selon les théorems des milieux F milieu de [BD] et $[EF] = \frac{AB}{2} = 4$ cm
donc ds le triangle EDF rectangle en E selon le théorem de Phytagore :

$FD^2 = ED^2 + EF^2$

$FD^2 = 9 + 16$

$FD = \sqrt{25}$

FD = 5 cm donc BD = 10 cm

Calcul de $\widehat{ABD}$:

$\frac{AB}{DB} = \frac{8}{10} = \cos\widehat{ABD} = 36,86$

$\widehat{ABD} = 37°$

Annexe 6 : Les rédactions retenues pour la phase 5

Combien mesure EF ? (1)

[AB] ⊥ [AD] assez Bonne redaction
[EF] ⊥ [AD] Nous avions pensé comme vous.
Donc [AB] // [EF]
E milieu de [AD]
D'après le théorème des milieux :
(1) Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle et si elle coupe un des deux autres côtés en son milieu alors elle coupe le 3ème côté en son milieu
Donc : F milieu de [DB]

(2) Un segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est égal à la moitié du 3ème côté.
Donc : $EF = \frac{AB}{2}$

AB = 8 cm
Donc : $\boxed{EF = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}}$

Question : Calculer la mesure de AF. (2)

1. Calcul de DB avec le th de Pythagore (⇒ le carré de l'hypothénuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés d'un triangle rectangle)

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = 8^2 + 6^2$
$BD^2 = 64 + 36$
$BD^2 = 100$ $BD = \sqrt{100}$ $BD = 10$

2. Avec le th des milieux ~~(qui dit que~~ la droite passant par le milieu d'un des côtés parallèlement à un des côtés coupe le 3ème en son milieu) on démontre que F milieu de [BD] donc milieu de l'hypothénuse)

3. Th ⇒ Ds la un triangle rectangle le milieu de l'hypothénuse est le centre du cercle circonscrit.
Donc avec ce th on montre que le cercle circonscrit du triangle ABD de centre F de diamètre DB et aussi de rayon AF alors BD = 10 = $\frac{1}{2}$ AF = 5
AF = DF = BF = 5 cm
AF = 5 cm

→ nous nous étions servi du théorème de pythagore dans le triangle AEF

3

F centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

Démontrer que F milieu de[BD]
Si une droite est // à 1 côté d'un tri et passe par le milieu d'un autre côté,
alors elle coupe le 3ème côté en son milieu.

(AB) //(EF) } F milieu de BD
E milieu de [AD]

Démontrer que F centre du cercle circonscrit au tri ABD

Démontrer que F est le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

4

1) F milieu de[BD] - Démontrer :
th des milieux :
Si une droite est // à 1 côté d'1 triangle
et passe par le milieu d'1 autre côté alors
elle coupe le 3e côté en son milieu.
[AB] //[EF] } alors F milieu de [BD]
E milieu de [AD]

Si : F milieu de [BD]
et } alors F est le centre
ABD est triangle rect du cercle circonscrit
au triangle ABD.

Annexe 7 : Les informations données par l'élève Bes à la phase 1

Observation d'une figure :

Le triangle DEF est rectangle en E
[AE] = [ED] = 3cm [BG] = [GC] = 6cm
[AD] = 6cm [BC] = 12cm
E milieu de [AD] G milieu de [BC]
[BD] est l'hypothénuse de ADB
DAB est un triangle rectangle en A
(EF) médiatrice de [AD]
(DG) médiane de BDC
(EB) médiane de ADB
(AB) //(EF)
ABFE est un trapèze
[AB] ⊥ [AD] [EF] ⊥ [AD]
AB = 8cm BC = 12cm
AD = 6cm DC = 15cm