RÉFLEXIONS SUR INÉGALITÉ TRIANGULAIRE ET DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE À PARTIR D'OBSERVATIONS DE CLASSES

Annie BERTÉ
IUFM d'Aquitaine et
LADIST de Bordeaux

Depuis plusieurs années et indépendamment des programmes en vigueur, nous avons relevé en collège et jusqu'en seconde une erreur fréquente. Dans un triangle ABC certains élèves écrivent : AB + BC = AC. S'agit-il d'une faute d'inattention venant de l'oubli des flèches dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$? Mais l'erreur se produit même avant que les élèves voient les vecteurs et, non seulement ils écrivent cette égalité, mais ils calculent effectivement AC en faisant la somme des deux longueurs AB et BC. Pourquoi ne pensent-ils pas à l'inégalité triangulaire? Nous avons fait quelques observations de classe en collège et en seconde sur l'enseignement de l'inégalité triangulaire qui ont confirmé la possibilité d'un questionnement didactique non pas sur l'enseignement de ce concept isolé mais sur celui d'un réseau de concepts : inégalité triangulaire, détermination d'un triangle par les mesures de ses trois côtés, positions relatives de deux cercles et nombre de points communs à deux cercles, distance d'un point à une droite, positions relatives d'une droite et d'un cercle. De nouvelles observations de classe nous ont permis de mettre à jour les conceptions des élèves dans cet environnement de l'inégalité triangulaire, de constater l'amalgame entre objet géométrique et dessin et l'absence de problématisation dans l'enseignement. Trouver une problématique qui permettrait de construire le sens en instaurant des liens entre les différentes questions suppose des choix didactiques sur l'ordre dans lequel on les aborde.

I. Premières observations sur l'inégalité triangulaire

I.1. Observation dans une classe[1] de 4ième

On donne trois séries de nombres aux élèves dans cet ordre:
1ier cas : 7, 8, 9. *2ième cas* : 9, 5, 4 *3ième cas* : 10, 5, 4
Le maître leur demande de dessiner dans chaque cas un triangle dont les côtés ont pour mesure en centimètres ces trois nombres.

Les élèves travaillent en petits groupes et discutent entre eux.

Dans le premier cas, tous les élèves dessinent un triangle avec le compas ou avec la règle pivotant autour du zéro et utilisée comme un compas. *Dans le deuxième cas*, un groupe d'élèves arrive à dessiner un triangle très aplati, mais pas tout à fait. La vérification de la longueur des côtés avec la règle graduée leur paraît exacte. Malgré quelques objections timides des autres élèves, ils s'acharnent, mesures à l'appui, à dire que le triangle existe, en d'autres termes qu'il n'est pas plat. Lors de cette première observation, la discussion sur le deuxième cas a duré très longtemps et, à la fin de la séquence, toute la classe était convaincue que le triangle 9, 5, 4 n'était pas plat! Personne n'avait eu le temps d'examiner le troisième cas.

Le fait que certains élèves tracent un vrai triangle dans le cas limite n'est-il pas un effet du contrat didactique ? (Brousseau 1988). Le maître a demandé de construire des triangles. Les élèves croyant que toute question a une réponse, il est normal qu'ils s'acharnent à trouver un triangle dans le maximum de cas. S'ils étaient arrivés au troisième cas, ils n'auraient pas pu trouver de triangle, de sorte qu'en posant les questions dans un ordre différent (1ier cas, 3ième cas, 2ième cas), on les aurait obligés à voir plus tôt un cas d'impossibilité évidente, certainement avant que la séquence soit finie. Penseraient-ils alors avec moins de réticence au triangle plat ? Il y avait une raison à l'ordre choisi par le maître pour les trois cas: progression formelle allant de l'existence du triangle au cas limite puis à l'impossibilité. Elle n'était pas pertinente dans la situation semble-t-il ! Après avoir identifié cet effet possible dû au contrat, et trouvé un moyen de le réduire, nous avons recommencé l'expérience, car nous pensions que cette explication n'épuisait pas la question. La lecture, quelque temps après, d'un document de l'IREM du Mans (1986) relatant une observation similaire nous a encouragés à continuer, les auteurs de ce document se référant eux-mêmes à un travail antérieur de l'IREM de Lyon[2].

I.2. Observation dans plusieurs classes de seconde[3]

La séquence se passe cette fois en début de seconde. Le maître demande à chaque élève: "Choisissez trois nombres entre 2 et 10 et écrivez-les". Le maître renouvelle sa demande plusieurs fois. Trois ou quatre triplets suffisent car les choix de chacun étant indépendants de ceux du voisin, on a ainsi une variété assez grande. Il est préférable que le maître demande de choisir un triplet, de l'écrire, puis de choisir un autre triplet,

---

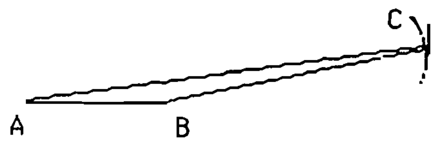
[1] Observation au collège de Cestas (Gironde) (classe de Michel Piquemale) en 1986 et publiée dans le document IREM, Berté et coll., Bordeaux, octobre 87

[2] La pratique du problème ouvert, IREM de Lyon, publication provisoire Document publié ensuite en 1988 : Problème ouvert et situation-problème, Arsac, Germain, Mante.

[3] Ces observations ont été faites au lycée Magendie de Bordeaux, chaque année de 1986 à 1990 (document IREM de Bordeaux, février 92)

de l'écrire, etc...., sans indiquer à quoi cela va servir et en disant qu'il est impossible de changer ensuite. Sinon les élèves gomment, après coup, les choix qui les dérangent. En général, ils prennent uniquement des entiers, mais ce n'est pas gênant, au contraire, car les choix étant ainsi limités pour eux, ils ont davantage de chance de tomber sur les trois cas, particulièrement sur le cas limite. Le maître demande alors : "Dans chaque cas, essayez de construire un triangle dont les côtés mesurent ces trois nombres en centimètres. Faites un bilan de ce qui se passe suivant les cas." Les élèves choisissant eux-mêmes les données, l'effet de contrat est moindre. Les choix sont individuels, puis les élèves se mettent par groupes de 4. Chaque groupe a ainsi un stock suffisant de triplets pour débattre du bilan à tirer. Nous avons là des élèves plus grands que des 4ième, qui ont normalement déjà vu cela au collège. Dans ces conditions, si certains tracent encore un vrai triangle dans le cas limite, on est en droit de penser qu'il existe un problème réel. Or cela se reproduit à chaque observation. Les élèves trouvent facilement deux cas - le triangle existe ou le triangle n'existe pas, et la condition d'existence stricte - si a est la mesure du plus grand côté et b et c celle des autres, le triangle existe si a<b+c. Mais en classe de seconde environ 50% des élèves, et parmi eux, certains, repérés par le professeur comme "bons", tracent encore un vrai triangle quand ils ont choisi eux-mêmes des triplets de nombres donnant le cas limite de l'alignement.

Un élève de seconde a choisi les nombres 2, 5 et 7, dans cet ordre, et il a de ce fait commencé par tracer AB = 2. Il a obtenu un vrai triangle en plaçant la pointe du compas en A puis en B.



Intrigué par le dessin d'un camarade qui, avec les mêmes nombres, ne trouvait pas de triangle, il a recommencé son dessin en traçant d'abord le côté de 7 cm. Il a alors trouvé un triangle complètement plat ! Il en a conclu le "théorème" suivant :

"Si on commence par 2, le triangle existe, si on commence par 7, le triangle n'existe pas"[4].

C'est parce que, sur une longueur de 2 cm, une erreur sur la place de la pointe du compas est relativement plus forte que sur une longueur de 7 cm, ce qui permet d'obtenir un triangle dans le premier cas et pas dans le second.

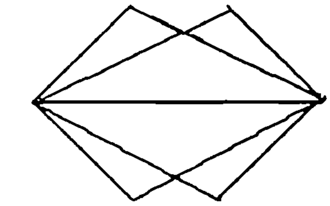
II. Conceptions des élèves sur la détermination d'un triangle par ses trois côtés

Le fait que des élèves pensent que l'ordre du tracé des côtés influe sur le résultat peut s'expliquer à double titre par leurs conceptions :

1- Cela peut être une manifestation de l'obstacle des directions privilégiées : un côté horizontal de 2 cm ne peut donner le "même" triangle qu'un côté horizontal de 7 cm.

[4] Emma Castelnuovo nous a dit qu'elle a fait la même observation avec de jeunes élèves en Italie. Nous avons publié ceci dans un document IREM de Bordeaux (février 92). Nous avons trouvé confirmation de notre observation dans *"Initiation au raisonnement déductif au collège"* par Arsac et collaborateurs - Presses universitaires de Lyon (février 92)

2- Certains élèves, même en seconde, ne disposent peut-être pas du troisième cas d'isométrie des triangles qui n'est plus institutionnalisé au collège. Ils ne voient pas de raison pour que deux triangles qui ont leurs trois côtés respectivement de même longueur soient "les mêmes". Après tout c'est faux pour deux triangles ayant leurs trois angles respectivement égaux.



Si les triangles ont un côté commun, on peut avoir quatre triangles se déduisant l'un de l'autre par symétrie. S'il y a eu action de translations ou rotations sur l'un d'eux, l'isométrie n'est plus évidente.

L'apparition de ce "théorème - élève" sur l'influence de l'ordre dans le tracé est favorisée par les choix didactiques actuels. Les maîtres demandent souvent au collège, avant la quatrième, la construction d'un triangle en imposant les mesures des trois côtés (toujours dans des cas où c'est possible car on laisse l'inégalité triangulaire pour la 4ième) mais sans demander dans chaque cas de donner le nombre de solutions à une isométrie près. Depuis 1978, on n'ose plus prononcer au collège le mot "isométrie" qui se trouvait dans les programmes de 1970. Donc il est normal que les élèves ne s'engagent pas dans la réflexion sur l'influence du procédé sur le nombre de triangles. On le découvre fortuitement au moment du triangle plat quand le changement dans l'ordre du tracé fait basculer, pour une raison de précision, de l'inexistence à l'existence de la solution. Le professeur peut institutionnaliser "en catastrophe" au cours de la séquence le troisième cas d'"égalité" des triangles. Arsac et coll.(1992) notent que, "*quand le problème de l'ordre des côtés est soulevé, le professeur propose de contrôler sur un exemple et institutionnalise pour tout triangle l'indépendance de l'ordre dans lequel est fait le tracé*". Les auteurs soulignent que c'est insuffisant et les élèves doutent que ce soit vrai pour le "triangle exceptionnel" (5,9,4). Nos observations ont donné le même résultat. Un travail sur l'ordre dans le tracé et plus largement un travail sur le troisième cas d'isométrie des triangles est nécessaire dans une séance spécifique avant celle-ci, avec la recherche d'une démonstration, même partielle par les élèves. Est-ce suffisant pour que le débat sur l'inégalité triangulaire aboutisse ? Non car à ce stade, les élèves qui pensent que le triangle n'existe pas doivent avoir les moyens d'argumenter pour convaincre les autres de la justesse de leur conjecture. Faire choisir les nombres par les élèves eux-mêmes évite que le débat tourne à l'avantage de l'erreur, car ils ne supposent plus a priori l'existence d'une solution sur la base du contrat. C'est un progrès. Néanmoins si les élèves n'ont pas construit auparavant le savoir nécessaire à l'argumentation, les deux camps restent sur leur position.[5]

III. Examen des preuves d'alignement

III.1. Trois preuves accessibles aux élèves de 4ième

Lors de notre première observation en seconde, le professeur, qui ne voulait pas que la séquence se termine sans conclusion, a pris la décision de donner lui-même une preuve en s'appuyant sur une piste lancée par un élève. Comment prouver que le triangle est plat ?

---

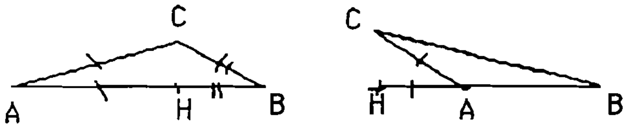
[5] Même conclusion dans le texte déjà cité de Arsac et collaborateurs

Soient A, B, H trois points alignés. On prend AC = AH et BC = BH. Supposons C $\neq$ H.

Mathématiquement il y a trois possibilités, utilisant des notions vues en 6ième et 5ièmeet donc connues en début de 4ième.

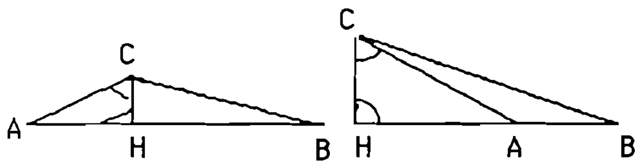
III.1.1. La médiatrice

AC = AH donc A $\in$ médiatrice de [CH]
BC = BH donc B $\in$ médiatrice de [CH]
(AB) est donc la médiatrice de [CH]
or H $\in$ [AB] donc C = H.



III.1.2. Les angles des triangles isocèles

Le triangle ACH est isocèle
donc ACH = AHC
Le triangle BCH est isocèle
donc BCH = BHC



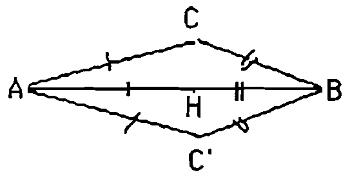
Deux cas de figure : ACB = BCH + ACH = AHC + BHC = AHB = 180°
ou ACB = BCH - ACH = BHC - AHC = 0°

Dans les deux cas on peut conclure que le triangle est plat.

Il faut envisager deux cas de figures, car ici, selon la position de H, la démonstration change. Ce n'était pas le cas pour la démonstration précédente et ce ne sera pas le cas pour la suivante qui se lisent avec l'une ou l'autre figure.

III.1.3. L'unicité du cercle déterminé par trois points

S'il existe un point C, sommet du triangle hors de (AB), par raison de symétrie, il y en a un autre C' symétrique de C par rapport à (AB). Donc il existe trois points C, C' et H à la même distance de A et à la même distance de B.



Donc il existe deux cercles différents, l'un de centre A et l'autre de centre B passant par les trois points C, H, et C'. Ces cercles sont d'ailleurs ceux tracés avec le compas quand on construit le triangle. Ceci est en contradiction avec l'unicité du point de concours des médiatrices d'un triangle donc avec l'unicité d'un cercle passant par trois points.

Donc C = H = C'.

Il y a une quatrième voie pour montrer que cette figure est impossible, en utilisant le fait que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, résultat qui n'est pas vu aujourd'hui avant la quatrième. Nous en parlons au paragraphe V.

Lors de notre première observation en seconde, le professeur a donné la troisième preuve à partir de la proposition d'un élève de montrer que les cercles avaient le seul point H commun. Nous en avions pris l'idée dans un ouvrage de Lucienne Félix[6]. Nous avons constaté que, même si la démonstration n'a pas été construite par les élèves mais formulée par le maître, la preuve a été accueillie avec soulagement par eux, autant par ceux qui étaient persuadés que le triangle n'existait pas que par ceux qui avaient une opinion contraire, car elle a mis fin à une tension entre les deux parties. Si ceci doit être traité en quatrième, on peut se demander si cette preuve "par l'absurde" n'est pas trop difficile pour les élèves. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'ils l'utilisent spontanément : "Vous dites que j'étais absent à votre cours, mais ce n'est pas vrai, car si j'avais été absent, je n'aurais pas telle chose dans mon cahier."... Même les enfants tout petits s'en servent. Nous pouvons supposer, jusqu'à démenti contraire que, quand la rigueur répond à un besoin, cette preuve n'est pas plus difficile qu'une autre, et que les difficultés ne viennent pas uniquement de là.

III.2. Tentatives de preuve par les élèves et blocages

En observant cette leçon plusieurs fois, dans des classes de seconde, où les élèves s'expriment mieux qu'en 4ième, nous avons pu voir pourquoi ils ont des difficultés à conclure par une preuve.

III.2.1. Le point H doit apparaître

Les élèves qui trouvent un vrai triangle non plat dans le cas limite, n'ont pas sur leur dessin le point H sur (AB) et ils n'ont pas les cercles entiers en général. Ils ont seulement deux petits arcs et le point C à leur intersection. Le débat avec leurs camarades qui trouvent le triangle plat leur permet de prendre conscience de l'existence du point H. Par exemple sur un segment [AB] de mesure 9, on a nécessairement un point H avec AH = 4 et HB = 5 ou bien si AB = 4 on a hors de [AB] un point H avec AH = 5 et HB = 5 + 4 = 9. La simple découverte de l'existence de ce point, plus facile à voir quand le grand côté est horizontal et tracé en premier, peut conduire les élèves peu sûrs d'eux et persuadés qu'un problème ne peut avoir qu'une solution, à éliminer leur point C trouvé hors du segment sans plus d'examen. Mais une partie d'entre eux résiste : ce qui est construit avec les "bonnes" mesures doit être exact ! Ceci permet au débat de se poursuivre. On se trouve donc avec les deux points C et H.

III.2.2 Les voies possibles

1 - Certains élèves commencent souvent en disant qu'il faut prouver que (CH) est perpendiculaire à (AB) ou, quand ils ont tracé des cercles entiers, que C, C' et H sont alignés, affirmations sur lesquelles on ne sait rien a priori car le point H se place indépendamment des points C et C'. A ce stade, pour convaincre les autres que le point C n'existe pas, ils doivent penser à la médiatrice de [CH], ou aux angles des triangles isocèles ou aux deux cercles. La difficulté pour les cercles vient du fait qu'ils n'ont souvent que deux petits arcs et ils doivent imaginer ou tracer les cercles entiers.

2 - Ni en seconde ni en 4ième, nous n'avons jamais vu un élève s'engager dans la voie de la médiatrice de [CH]. En effet, penser à cette médiatrice revient à voir qu'elle passe par A et B donc que [CH] n'existe pas. Un professeur a relevé dans sa classe de

---

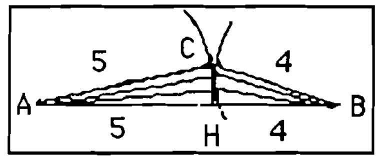
6 *"Initiation à la géométrie"*; Classe de 5ième, Dunod, 1964. Nous avions suggéré cette possibilité aux maîtres dans notre publication IREM de Bordeaux 1987

4ième la deuxième voie, celle des triangles isocèles. Pour que les élèves s'y engagent, ils doivent être bien préparés au niveau du triangle isocèle et des démonstrations utilisant les angles, ce qui était le cas dans cette classe.

3 - Nous avons vu des élèves de seconde s'engager dans la troisième voie en pensant aux deux cercles, (cercles sécants, tangents, intérieurs ou extérieurs selon leur cas de figure). Pour conclure sur le triangle plat, il faut savoir que si deux cercles ont un point commun sur la ligne des centres, ils ne peuvent pas en avoir d'autres, et pour cela il faut savoir que deux cercles ont au plus deux points communs. Mathématiquement l'inégalité triangulaire et les positions relatives de deux cercles ne sont qu'un même problème.

On observe une angoisse chez certains élèves quand ils commencent à s'apercevoir, en imaginant des arcs plus grands, que si deux points existent, on pourrait en trouver beaucoup d'autres, intermédiaires, en faisant descendre C vers H.

Nous interprétons cette angoisse comme une manifestation d'un savoir implicite sur l'impossibilité d'avoir plusieurs triangles de côté commun [AB] et dont les deux autres côtés sont les mêmes mesures,



ceci dans une portion de plan réduite, intérieure au premier triangle presque plat déjà tracé. Imaginer des arcs plus grands n'est pas inutile, car cela conduit à tracer les cercles entiers.

IV. Inégalité triangulaire et intersection de deux cercles

IV.1. Une autre observation en 4ième

Dans les observations faites jusqu'à une date récente, nous n'avions pu voir que deux alternatives : soit les élèves avaient deux petits arcs sécants et ils affirmaient que le triangle existait, soit ils affirmaient que le triangle était plat. En 1994 nous avons fait une observation[7], dans une classe de 4ième où, depuis le début de l'année, le professeur, en accord avec nous, demandait aux élèves de tracer les cercles entiers quand ils avaient besoin de leur intersection (par exemple pour construire au compas la médiatrice d'un segment, un triangle équilatéral, ou tout autre tracé connu depuis l'école élémentaire, mais qui se font généralement avec seulement les deux petits arcs utiles). Nous avons observé dans cette classe les mêmes réactions des élèves à quelques détails près:

1 - Certains élèves contestaient les vrais triangles obtenus dans le cas limite par leurs camarades qui commençaient par le plus petit côté au nom d'une "règle" des années antérieures : "on doit commencer par le plus grand". Un enseignant avait-il donné ce conseil pour éviter trop d'erreurs dans les dessins ?"

2 - Nous avons suivi un groupe où une élève affirmait très fort aux autres que le triangle 3, 5, 8 était plat. Elle avait fait un dessin en commençant par le grand côté.

[7] Collège Émile Combes de Bordeaux dans la classe de Dominique Woillez

Dans ce groupe, le problème de l'ordre n'était pas soulevé. Elle a dit ceci : "Les **nombres** sont alignés donc il n'y a pas de triangle". Nous lui avons demandé: "Pourquoi dis-tu que les **nombres** sont alignés ?" Réponse : "parce que 3 + 5 = 8 " C'est ainsi qu'elle affirmait l'existence du point H. La discussion entre les élèves s'est alors engagée sur les cercles, favorisée par la présence des cercles entiers, et la même élève a affirmé : "il n'y a pas de triangle parce que les cercles n'ont pas d'intersection". Nous lui avons dit alors: "Donc ils n'ont pas de points communs ?" Réponse : "Si, ils ont un tas de points communs, mais pas d'intersection !" Question : "Où sont ces points communs ?" Elle a montré tout le voisinage du point de contact, où, dans l'épaisseur du trait, on pouvait "voir" effectivement pas mal de points communs !

IV.2. Deux constats après cette observation

1 - Un travail sur les positions relatives de deux cercles qui ne figurent pas dans les programmes ni de collège ni de seconde est directement lié à celui sur l'inégalité triangulaire. Pour que ce savoir soit construit, les élèves doivent faire le lien avec la détermination d'un cercle par trois points, c'est à dire le cercle circonscrit au triangle vu en 5ième et le fait que deux cercles différents ont au plus deux points communs. Notre hypothèse est que cela nécessite en outre un travail sur la conception du cercle comme ensemble de points.

2 - Une conviction forte sur l'alignement dans le cas limite n'implique pas nécessairement une conception correcte du nombre de points communs aux cercles tangents. La conviction peut venir :

- d'une conception spécifique de la construction des triangles. Deux petits arcs qui se croisent visiblement donnent le sommet du triangle ; mais si les arcs "se touchent seulement" il n'y a pas de triangle. Si on demande à ces élèves de construire un triangle dont les côtés mesurent 8; 3 et 5,2 par exemple, ils ne trouvent pas non plus de triangle car les cercles "se touchent" sans être sécants.
- d'une conception du cas limite qui peut se développer sans référence à des tracés de cercles : si un nombre est la somme des deux autres, il y a un point sur le segment de sorte qu'une longueur est la somme des deux autres, d'où l'alignement. Le tracé de cercles n'est pas pris en compte, ni aucun lien avec les cercles tangents.

Nous avons donc étudié les conceptions des élèves sur l'intersection de deux cercles.

IV.3. Figure formée de deux cercles

IV.3.1. Cercles sécants

Soient deux cercles se coupant en deux points A et B. En 1976 déjà, nous avions observé qu'en posant à des élèves de 5ième la question : "Quelle est l'intersection de ces deux cercles ?" on obtenait parfois la réponse: "les deux petits arcs AB". Même résultat en 1991 dans le collège[8] où nous avons fait les observations sur l'inégalité triangulaire. Des interviews d'élèves en 1976 nous avaient conduite à postuler deux causes (Berté 1981) :

---

[8] L'observation de 1976 est faite dans un collège de Niamey (Niger) et celle de 1991 au collège Émile Combes de Bordeaux

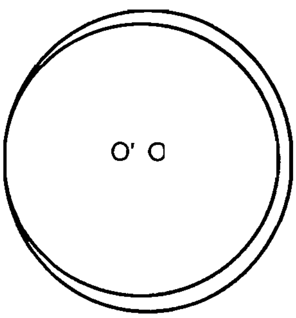
- une référence aux "bords de l'intersection" : les élèves voyaient les parties du plan délimitées par les cercles, en prenaient l'intersection, et le bord de l'intersection était l'intersection des bords. Ceci pouvait venir des diagrammes ensemblistes enseignés à l'époque, mais aussi de la perception des disques. La conception de disque est première par rapport à celle de cercle, ce qui explique que l'observation se répète dix ans plus tard.
- une référence au mot section (verbe sectionner, couper). On dit : "les cercles se coupent". Les élèves nous ont dit: "c'est ce qui tombe, ce qui est sectionné", comme si on avait deux anneaux matériels qui s'interpénètrent.

Dans les deux cas, la conception du cercle comme ensemble de points n'est pas construite, donc la recherche d'un point comme intersection de cercles ne peut pas avoir de sens.

IV.3.2. Cercles tangents

Voici une observation en classe de seconde[9] où rien n'avait été fait auparavant sur l'inégalité triangulaire qui n'est pas dans le texte officiel des programmes de seconde. Le professeur, en accord avec nous, propose d'étudier les positions relatives de deux cercles. Certains élèves disent : "Pour simplifier, commençons par le cas particulier de deux cercles de même rayon" et ils ajoutent: "et de même centre". Ceci s'est reproduit dans les autres classes de seconde à chaque observation. On a alors une infinité de points communs.

Une seule fois, en revanche, un élève a poursuivi : "Je déplace le centre du deuxième cercle en O', tout près de O centre du premier, et je diminue le rayon R' de la même quantité OO'." Il avait donc deux cercles tangents intérieurement, mais il refusait de dire que ces cercles n'avaient qu'un seul point commun pour la raison suivante : "On est parti d'une infinité de points, on a modifié un tout petit peu la position. On ne peut donc "tomber" subitement à un seul point commun. Il faut passer par un intermédiaire de 100, 30, 10, points communs".



En s'appuyant sur la perception induite par l'épaisseur du crayon, il s'obstinait à voir un grand nombre de points communs aux deux cercles tangents. Par une évolution "catastrophique" le nombre de points communs passe au cours d'une petite transformation de un à l'infini. Ce pourrait être de zéro à l'infini en gardant le centre fixe et en changeant le rayon. Ceci est contradictoire avec une idée intuitive de continuité qu'on utilise en mathématique dans des conseils heuristiques. L'algèbre permet de comprendre ce qui se passe.

Dans un repère d'origine le point de contact, les équations des cercles sont $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ et $x^2 + y^2 - 2R'x = 0$; ce qui donne pour l'intersection $(R - R')x = 0$. Tous les points sont solution si $R = R'$ et seule l'origine est solution si $R \neq R'$.[10] L'équation du cercle n'est plus au programme de seconde, donc le changement de cadre n'est pas

9 Observation réalisée au lycée Magendie de Bordeaux en 1989

10 Nos remerciements au relecteur de «petit x» qui nous a donné cette rédaction du passage au cadre algébrique. M.F. Coste-Roy nous avait fait la même remarque lors de la sortie du document IREM de Bordeaux (1992).

possible à ce niveau et il faut comprendre dès le collège que deux cercles ont au plus deux points communs.

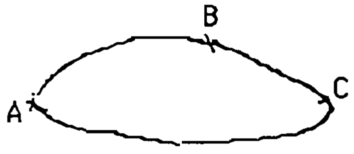
Ceci pose le problème de la confusion entre objet géométrique et dessin. Le professeur a pu convaincre l'élève de seconde en revenant au cercle circonscrit vu en 5ième. Par trois points alignés, il ne passe aucun cercle et un seul par trois points non alignés. Donc si deux cercles ont un point commun sur la ligne des centres ils n'en ont pas d'autres car s'ils en avait un autre hors de la ligne des centres, ils en auraient un troisième par symétrie. Il n'y a pas de raison que le nombre de points communs aux cercles soit plus évident en 4ième qu'en seconde aussi bien pour des cercles tangents extérieurement qu'intérieurement.

IV.4. Cercle déterminé par trois points

IV.4.1. Deux conceptions contradictoires

Dans une classe de terminale D [11] , nous avons demandé aux élèves : "Combien passe-t-il de cercles par trois points ?" 50% des élèves ont répondu : "cela dépend des points".

Pour expliciter, une élève a fait ce dessin en disant :
"Si on veut faire passer un cercle par ces trois points, vous voyez "la touche" du cercle ! " Elle avait placé les trois points de sorte que l'angle ABC soit très obtus.



En seconde, quand les maîtres avec qui nous travaillons ont, à notre demande, posé la question, ils ont constaté que presque tous les élèves pensent que l'existence du cercle dépend de la position des points ! C'est exactement pareil dans toutes les classes, de la 5ième à la terminale, que le cercle circonscrit ait déjà été vu ou non (dans les programmes c'est en 5ième). Si rien n'est fait pour changer les conceptions des élèves, elles restent identiques pour la majorité d'entre eux.

Deux conceptions mathématiquement contradictoires coexistent donc chez les élèves:

1 - Deux cercles dont la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons, peuvent très bien avoir plusieurs points communs au voisinage du point de contact.

2 - Quand on choisit trois points de façon que le triangle qu'ils forment ait un angle très visiblement obtus, aucun cercle ne passe par ces trois points.

La première pose le problème de la différence entre le dessin perçu et l'objet géométrique pensé. La seconde est à relier avec la difficulté des élèves à concevoir le centre du cercle à l'extérieur du triangle, amalgame éventuel avec le centre de gravité qui lui ne sort jamais du triangle. Dans les triangles "typiques" les points remarquables sont toujours voisins. Avant d'aborder l'inégalité triangulaire, les élèves doivent avoir à leur disposition toutes les voies possibles pour conclure le débat sur le triangle plat, d'où la nécessité de prévoir avant une séquence sur le cercle circonscrit.

---

[11] Lycée Bertrand de Born, Périgueux (1990), Observation de Joël Brely

IV.4.2. Observation d'une séquence sur le cercle circonscrit

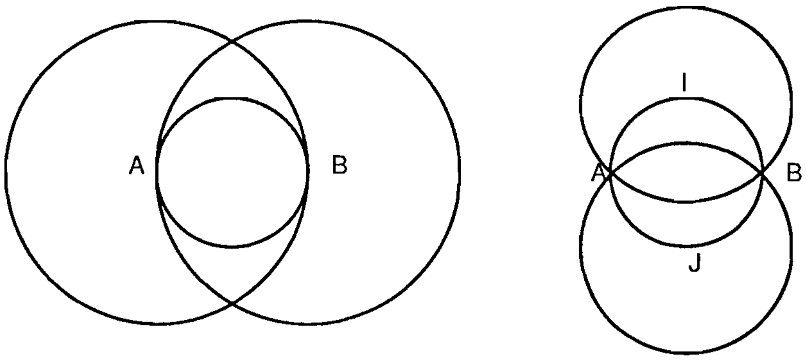
Nous avons fait plusieurs fois cette observation aussi bien en 5ième qu'en seconde[12].

Le maître pose successivement deux questions aux élèves :

1 - Combien passe-t-il de cercles par deux points A et B ?

Jusqu'en seconde, nous avons rencontré des élèves qui répondent: "un seul!" en prenant pour centre du cercle le milieu du segment joignant les deux points, même si le segment n'est pas tracé. Les élèves ne le tracent pas en général, mais cela ne les empêche pas de prendre les points sur une "horizontale" du cahier.

Nous avons vu en seconde des élèves qui disent qu'il existe trois cercles parce qu'ils font l'un ou l'autre des dessins ci-dessous:



Le premier dessin est obtenu en prenant pour centres le milieu de [AB], puis le point A et le rayon AB, puis le point B et le même rayon. Les deux derniers cercles répondent à la question car certains élèves considèrent encore en seconde le centre du cercle comme un point du cercle. Le second dessin est obtenu en prenant pour centre le milieu de [AB] puis les deux autres centres I et J à la fois sur l'axe de symétrie vertical et sur ce premier cercle tracé de manière à obtenir un joli dessin bien équilibré. La médiatrice n'est pas tracée, mais imaginée comme simple axe de symétrie du dessin (Berté, 1993). Un "bilan partiel" permet d'institutionnaliser une infinité de centres et la médiatrice du segment. Le maître peut poser ensuite deux questions équivalentes:

2 - Combien passe-t-il de cercles par trois points? ou bien
Combien passe-t-il de cercles par les trois sommets d'un triangle ?

Même si la question est posée avec le mots "points", les élèves aussi bien au collège qu'en seconde, n'isolent pas deux points pour se ramener au problème précédent. Ils considèrent les trois points dans leur globalité, et donc pour eux ce problème est entièrement nouveau par rapport au précédent[13]. Certains reviennent aux deux points après un certain temps de recherche. Si on a posé le problème en termes de points, les élèves commencent par le cas des trois points alignés. Ils disent que dans ce cas il n'y a pas de cercle, sans justification, et sans que cela donne lieu à débat. Si on a posé le problème en terme de triangle, ils examinent des cas particuliers de triangles (rectangle,

---

[12] A Bordeaux dans les collèges Léonard Lenoir (Annick Appriou) et Émile Combes (Dominique Woillez) et au Lycée Magendie

[13] Observation de Francis Reynès, collège Grand Air, Arcachon (1992)

équilatéral, isocèle et enfin quelconque), et arrivent, grâce au débat, à trouver le cas général (Berté, 1993). Si le problème est posé sans se référer au triangle et surtout si le maître, comme nous l'avons observé dans une classe, pour appuyer sa question, place trois points au tableau, en évitant croyant bien faire les directions privilégiées, l'examen des cas particuliers risque de ne pas démarrer. Les élèves placent les trois points en reproduisant la disposition du tableau, sans les joindre, et ne s'autorisent plus à les faire bouger. Ils font alors des essais de cercles, au hasard, plus ou moins infructueux et peu éclairants, jusqu'à énervement. En revanche, les élèves laissés libres, placent très souvent les deux premiers points sur une même horizontale du cahier, et ils pensent alors seuls en termes de triangle dès qu'ils choisissent l'autre point et surtout ils envisagent des cas particuliers selon ce troisième point. Cela leur permet des conjectures : triangle rectangle et équilatéral dans lesquels le centre du cercle a une position privilégiée, puis triangle isocèle quelconque dans lequel l'axe de symétrie guide la recherche. Le problème se pose sur la place du centre sur cet axe de symétrie, surtout si l'angle au sommet est obtus, ce qui amène la deuxième médiatrice. On arrive ainsi à deux médiatrices dans le triangle quelconque. C'est alors que le maître peut revenir au cas des points alignés et au parallélisme des médiatrices. Pour cette séquence, le savoir sur la médiatrice (définition et propriété caractéristique) doit être disponible. Les professeurs avec qui nous travaillons ont introduit, au moment où le problème se pose pour le triangle quelconque, la situation imaginée par Brousseau (1983). Sur le papier, l'intersection des trois médiatrices est un petit triangle et le maître demande de produire un dessin pour le rendre plus visible. Il s'agrandit quand on passe le dessin à la photocopieuse. En revanche, si on fait le dessin au compas en agrandissant le triangle de départ, la petite tache d'intersection des médiatrices ne s'agrandit pas, au contraire !

C'est une situation fondamentale à finalité triple:

a - pour passer des dessins matériels aux concepts géométriques. Un point en géométrie est représenté par une petite tache qui ne peut pas s'agrandir par proportionnalité. C'est le problème de la modélisation sur lequel nous reviendrons plus loin.

b - pour déclencher la recherche d'une preuve de l'unicité du centre du cercle. Sans cela les élèves se contentent de deux médiatrices et ne se posent pas le problème de la troisième.

c - pour fonder la preuve géométrique sur une axiomatique sur laquelle on s'accorde, ici la caractérisation de la médiatrice. Si on admet la propriété caractéristique de la médiatrice, l'existence et l'unicité du cercle en découlent nécessairement.

IV.4.3. Conclusion pour les choix didactiques

1 - Ce qui est mis en scène dans les observations que nous relatons est l'énoncé suivant : "si trois nombres a, b, c, vérifient $a<b+c$, $b<a+c$ et $c<a+b$, alors il existe un triangle dont les côtés mesurent ces trois nombres".

et non l'autre énoncé : "dans tout triangle, les mesures a, b, c, des trois côtés vérifient $a<b+c$, $b<a+c$ et $c<a+b$."

Usuellement on nomme théorème de l'inégalité triangulaire le second, que nous appellerons théorème direct. Le premier est sa réciproque, et il se démontre en caractérisant la position de deux cercles sécants. Le triangle existe car le troisième sommet peut être construit par intersection de deux cercles. L'amalgame entre les deux énoncés est fait dans les manuels actuels. Une "activité" des élèves basée sur la possibilité de construire des triangles, donc sur le théorème réciproque sert d'introduction, et c'est le théorème direct qui est institutionnalisé, comme si c'était équivalent.

Si a, b, c, sont les longueurs des trois côtés,

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b < c \\ b - a < c \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow \quad |a - b| < c < a + b$$

Dans l'écriture, on peut toujours éviter la valeur absolue en utilisant une phrase : un côté est compris entre la somme et la différence des deux autres. C'est cette double inégalité qui équivaut à la position de deux cercles sécants de rayons R et R' et de centres O et O' :

$$\text{cercles sécants} \Leftrightarrow |R - R'| < OO' < R + R'$$

Les inégalités correspondant à toutes les positions possibles de deux cercles étant exclusives les unes des autres, la réciproque de l'inégalité triangulaire, c'est à dire la caractérisation de la position des cercles, se démontre par disjonction des cas. Les positions relatives de deux cercles ont disparu des programmes du secondaire, mais sont supposées connues au moins au lycée pour discuter les constructions géométriques.

2 - On ne doit pas conclure de nos observations qu'on ne peut pas admettre l'inégalité triangulaire, directe et réciproque, comme un axiome. Les élèves tirent bien la conclusion correcte dans le cas des inégalités strictes. Mais on ne peut faire l'économie d'une démonstration spécifique dans le cas limite, le seul qui pose problème. Son voisinage en pose également quand on demande ce qui se passe avec des nombres comme 9; 5,2 et 4.

3 - Contrairement à ce qui est supposé par les programmes, les enseignants et toute l'institution, ces savoirs de base (triangle isocèle et angles, cercle circonscrit à un triangle, positions relatives de deux cercles, conception du cercle comme ensemble de points) ne sont pas suffisamment construits au collège pour la majorité des élèves et donc ne sont pas encore disponibles en seconde pour conclure un débat sur l'inégalité triangulaire. Le professeur ne peut provoquer l'ouverture du débat que si les élèves y ont été préparés. Ce n'est pas une question d'âge des élèves. Il faut construire une chaîne de situations dont on connaît les deux bouts. Le point de départ de la chaîne est constitué par des situations pour mettre à jour les différentes conceptions du cercle (Artigue et Robinet, 1984) ; quelque part dans la chaîne il y a la situation du triangle des trois médiatrices (Brousseau, 1983) proposée elle-même en situation de preuve au cours du débat sur l'existence d'un cercle passant par trois points (Berté, 1993), et la fin de la chaîne est le débat sur le triangle plat.

4 - Pour la dernière situation, des hésitations demeurent sur la question à poser qui a déjà pris pas mal de formes selon les auteurs depuis 1986 :

a - Construction géométrique de triangles

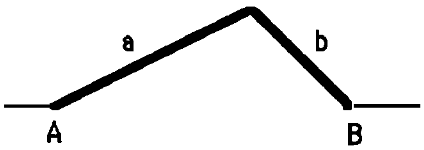
Les auteurs de l'IREM du Mans (1986) se réfèrent à un texte proposé par l'IREM de Lyon : "Étant donné trois nombres positifs, est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ? Si ce n'est pas toujours possible, quelle(s) condition(s) doivent vérifier ces trois nombres pour que ce soit possible ?". Ils font une critique de ce texte qu'ils pensent ne pas satisfaire aux critères d'une situation-problème telle qu'ils la définissent, et proposent pour le collège de la 6ème à la 3ème, le texte suivant : "Choisis trois nombres. Construis un triangle dont les côtés ont pour longueur ces trois nombres. Fais d'autres essais. Note-les dans un tableau." Effectivement, dire dans le texte aux élèves de collège, voyant ceci pour la première fois, qu'il y a des conditions à trouver, didactifie la situation. Notre deuxième observation (IREM de Bordeaux, 1992) se place en seconde. Pour cette raison, sans toutefois prononcer le mot "conditions", nous avons demandé de choisir tous les triplets, sans dire ce qu'on allait en faire, d'essayer de construire les triangles, puis de tirer des conclusions par groupe, ceci pour susciter un débat dans les groupes puis entre groupes. Par notre observation antérieure nous savions bien qu'il y aurait débat. Arsac et coll. (1992) s'interrogent eux aussi sur le choix de l'énoncé et changent la forme donnée par l'IREM de Lyon en 1988 qui était : "Choisis trois nombres a, b, c. Est-il toujours possible de trouver un triangle dont les mesures des côtés soient ces trois nombres ?" Ils adoptent finalement : "Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?"

b - Fabrication de triangles avec un matériel

Une des causes de l'échec dans notre première expérimentation, vient du fait que le maître avait demandé de construire seulement un triangle, puis un autre, alors qu'un stock assez grand de triplets est nécessaire pour tirer des conclusions. Pour arriver à beaucoup de triplets on peut fournir des spaghettis aux élèves. Ils les cassent, au hasard, et essaient de faire un triangle avec trois morceaux. On leur demande de tirer ensuite en groupe les conclusions. Cette situation est différente de la précédente. Elle porte sur le théorème direct et réciproque. Ce n'est pas une situation de construction géométrique avec des mesures choisies. On a à la fois des triangles matériels fabriqués au hasard sur lesquels on doit conjecturer une inégalité entre les mesures des côtés, et des cas d'impossibilité de fabrication à expliquer. Les élèves feront des mesures décimales des bouts de spaghettis avec des incertitudes et ils peuvent trouver uniquement des cas où on sait si le triangle existe ou n'existe pas de façon évidente, ou bien des cas proches du cas limite sans y être exactement. Dans la construction géométrique, les erreurs dans les dessins physiques existent de la même façon, mais les élèves peuvent s'engager en premier lieu dans le débat mathématique car on discute sur des mesures choisies a priori avec au moins un cas limite tranché. Ils peuvent comprendre ensuite que ce qui leur est arrivé dans le dessin provient d'incertitudes de mesures si un travail préalable sur la figure, signe d'un objet géométrique, a été fait (différence entre un point et sa représentation par une tache). Avec les spaghettis, le problème physique en premier plan suppose qu'on l'écarte pour construire d'abord le modèle mathématique, puis qu'on revienne à la modélisation physique des incertitudes plus complexe. En classe de seconde, on peut passer au cadre graphique : couper un spaghetti en trois, nommer a et b la longueur des deux plus petits morceaux, placer le point de coordonnées a et b dans un repère orthonormé. Si on peut construire un triangle avec les trois morceaux, marquer le point en rouge, sinon, marquer le point en bleu[14]. Pour obtenir un grand nombre de triangles, nous avions suggéré aux maîtres des spaghettis ou des baguettes dans notre publication de l'IREM de Bordeaux (1987).

[14] Ce passage au cadre graphique nous a été donné par le relecteur de «petit x»

Imaginons deux baguettes que l'on écarte petit à petit. On a ainsi une infinité de triangles par déformation continue. Il faut imaginer le côté AB variable. Les points A et B s'écartent ou se rapprochent à volonté



Les deux cas limites sont :

Valeur minimum AB = a - b

Valeur maximum AB = a + b

On retrouve :

$|a - b| < c < a + b$

Cette "image dynamique" est parfaitement cohérente avec la transformation des trois inégalités en la double inégalité avec la valeur absolue. On "voit" que, si les deux baguettes sont dans le prolongement l'une de l'autre, pour faire monter le sommet du triangle, il faut pousser pour rapprocher les deux "points" A et B.

Pour aider certains élèves, le professeur peut, après la conclusion du débat sur le triangle plat, montrer deux vraies baguettes matérielles et leur mouvement. Quand on utilise un autre matériel, comme une baguette doublée par un élastique fixé à ses deux extrémités, le triangle "monte" quand on étire l'élastique. Mais quand on est tout près du cas limite, l'inégalité des longueurs n'est pas très évidente, ni avec les baguettes, ni avec l'élastique, ni avec les spaghettis, ni avec les dessins, ni avec quoi que ce soit d'autre. Les mathématiques sont une construction intellectuelle et ne se "voient" pas spontanément dans les objets matériels (IREM de Bordeaux, Berté et coll., 1992).

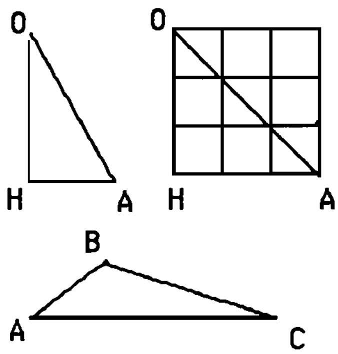
5 - Il ne faut pas croire que si un élève sait une chose, il en sait nécessairement toutes les conséquences. Nous l'avons vu avec les conceptions contradictoires sur les cercles passant par trois points. Il y a un réseau de concepts et dans les débuts de l'apprentissage le réseau n'est pas connecté. C'est un travail didactique du professeur qui permettra à l'élève d'établir ces connexions. Or il y a un des concepts de ce réseau dont nous n'avons pas encore parlé, celui de la distance d'un point à une droite.

V. Distance d'un point a une droite

V.1. Deux erreurs curieusement analogues

Dans un triangle ABC, certains élèves écrivent: AC = AB + BC. Ils écrivent aussi dans un triangle rectangle que la longueur de la perpendiculaire est la même que celle de l'oblique: OH = OA.

Dans les deux cas, l'erreur dans les copies est d'écrire une égalité, et pas toujours quand on semble près du cas limite.

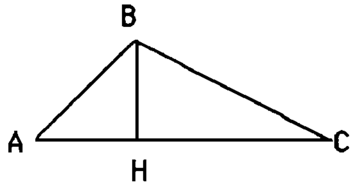


Pour l'oblique, l'erreur est plus fréquente dans le cas d'un triangle rectangle isocèle dessiné sur le quadrillage du cahier: par exemple dans le dessin ci-dessus OH = HA = OA = 3. Le quadrillage découpe la diagonale en trois parties de longueur prise pour unité comme si elle était égale à celle du côté du carré unité. Cela revient à se poser à nouveau le problème sur un petit carreau, à plus petite échelle.

II.2. Liens entre "la perpendiculaire est plus courte que l'oblique" (1) et l'inégalité triangulaire sens direct (2)

II.1.2. L'énoncé (1) permet de démontrer l'énoncé (2)

En effet, dans le cas où la hauteur [BH] est intérieure au triangle :



si AH < AB et HC < BC
alors AH + HC < AB + BC
or AC = AH + HC
donc AC < AB +BC

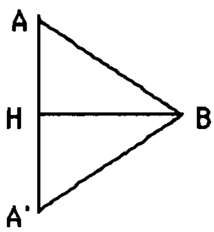
Si on admet que dans un triangle la hauteur relative au plus grand côté est toujours intérieure l'inégalité triangulaire dans le sens direct est démontrée. On peut éviter de le supposer, en envisageant les deux cas de figures. Il faut alors utiliser les mesures algébriques et l'inégalité triangulaire dans : $|\overline{AC}| = |\overline{AH} + \overline{HC}| \leq |\overline{AH}| + |\overline{HC}|$

Cette démonstration avec les mesures algébriques figurait dans les manuels de 1970. Un manuel actuel de l'IREM de Lorraine la reprend sans les mesures algébriques en supposant la hauteur à l'intérieur. Ce manuel s'appuie sur le cosinus d'un angle aigu vu assez tôt en 4ième conformément à l'écriture du programme[15].

On admet que ce cosinus positif est inférieur à 1, et on s'en sert.

II- 2 2. L'énoncé (2) permet de démontrer l'énoncé (1)

On veut montrer que AB > AH. Soit A' symétrique de A par rapport à H :



AB + BA' > AA' donc 2AB > 2AH donc AB > AH

Ceci se trouve dans des manuels actuels différents du précédent et s'explique par l'ordre d'écriture des programmes[16].

D'un point de vue académique la notion de distance entre un point et un ensemble de points (la droite) (1) est plus élaborée que la distance entre points, (inégalité triangulaire) (2). Ceci est-il la raison implicite de l'ordre d'écriture du texte des programmes ? Majoritairement les manuels[17] vont donc prendre (2) comme un axiome, et ensuite, certains, pour la faire vivre, vont s'en servir dans la partie "distance d'un point à une droite", ce qui se traduit par la démonstration de (1) grâce à (2). Beaucoup de manuels admettent à la fois (1) et (2) car rien n'est précisé sur les

---

[15] Le programme de quatrième débute par : "1 - Dans le plan, projection sur une droite selon une direction, projection orthogonale, cosinus comme opérateur de projection orthogonale."

[16] Le programme se poursuit par : "2 - Problèmes de plus courte distance : inégalité triangulaire, distance d'un point à une droite."

[17] Ce n'est pas le cas du manuel de l'IREM de Lorraine qui sur ce point comme sur d'autres prend des initiatives marginales par rapport aux autres manuels.

démonstrations à faire. En revanche, tous les manuels utilisent l'inégalité triangulaire en démontrant que la médiatrice d'un segment partage le plan en deux régions caractérisées par des inégalités, savoir exigée par les commentaires officiels du programme (voir annexe 1). Dans la majorité des manuels on définit le cosinus dans un premier chapitre en admettant ou ignorant qu'il est inférieur à 1, puis après avoir démontré ou admis plus loin que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique on ne fait le lien ni avec le cosinus ni avec le théorème de Pythagore. Le manuel IREM de Lorraine, unique par la progression adoptée, après avoir démontré l'inégalité triangulaire avec le cosinus inférieur à 1, démontre encore que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, dans un chapitre plus loin intitulé distance d'un point à une droite. Il le fait en utilisant le théorème de Pythagore, vu en début d'année, contrairement aux autres manuels et au programme qui le placent plus tard : Si $AB^2 = AH^2 + HC^2$ alors $AB^2 > AH^2$ donc $AB > AH$. C'est, sous une autre forme, la même démonstration que celle utilisée en 1970 où le seul axiome de la symétrie du rapport k de projection orthogonale (ou cosinus) permettait de démontrer le théorème de Pythagore ($k^2 + k'^2 = 1$) et donc que $k \leq 1$ (voir annexe 2)

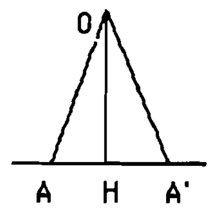
Dans les programmes de 1964 et les programmes antérieurs, l'inégalité triangulaire dans le sens direct était démontrée en supposant que les angles égaux d'un triangle isocèle sont aigus (voir annexe 3). Puis la perpendiculaire plus courte que l'oblique était démontrée par le théorème de Pythagore. La réciproque de l'inégalité triangulaire l'était en caractérisant les positions de deux cercles par disjonction des cas. C'est en 1978, que l'inégalité triangulaire (2) et la distance d'un point à une droite (1), considérées comme évidentes, ont disparu des programmes. Elles y sont revenues en 1987, l'inégalité triangulaire en premiere position dans le texte. Les énoncés (1) et (2) ne sont ni plus ni moins "évidents" l'un que l'autre. Pourquoi les démontrer dans leur généralité plutôt que les admettre ? C'est l'égalité seule qui pose problème aux élèves.

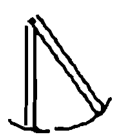
II.2.3. Démonstrations pour le cas limite

Une démonstration semblable à celle du cas limite de l'inégalité triangulaire prouve que la perpendiculaire ne peut être égale à l'oblique :

- soit si OH = OA, et par symétrie OH = OA'

Par trois points alignés A', H, A, passerait un cercle de centre O Ne pas le savoir implicitement est-il en relation avec une faiblesse dans la conception du cercle ? Il faut "voir" que si une baguette pivote autour de O, elle se soulève du sol.





- soit si OH = OA, le triangle OHA est isocèle, donc OHA = 90°.

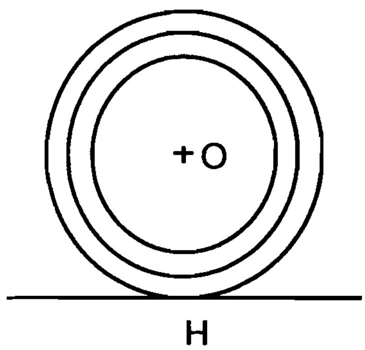
Donc (OH) et (OA) sont parallèles. Ne pas le savoir implicitement, est-il en relation avec une faiblesse sur le triangle isocèle ? (égalité des angles à la base)

A propos de la distance d'un point à une droite, émerge ainsi tout un tissu de relations à construire. On voit en particulier l'importance du cercle conçu comme ligne de niveau ou ensemble de points, du triangle isocèle et de ses angles à la base (déjà utilisé dans la démonstration de l'inégalité triangulaire des années 60) et de la médiatrice dont nous avons parlé à propos du cercle circonscrit. Un travail sur le triangle isocèle est primordial pour les conceptions : selon le problème, on doit considérer la médiatrice comme un axe de symétrie portant le sommet principal équidistant des deux autres avec l'égalité des angles à la base ou le cercle de centre le sommet, les deux autres sommets étant des points du cercle[18].

II.3. Positions relatives d'une droite et d'un cercle en classe de 5ième

Après avoir travaillé le cercle comme ensemble de points, nous avons demandé aux élèves (Berté, 1981)[19] de placer sur une droite (D) un point H le plus près possible d'un point O extérieur à la droite.

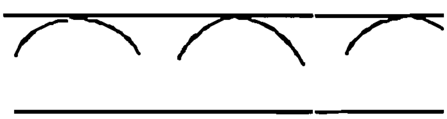
Soit les élèves ont placé le point H sans tracer effectivement la perpendiculaire, simplement dans un voisinage du pied de cette perpendiculaire mais un peu au hasard, soit ils ont pris leur compas et ont tracé des cercles de rayon de plus en plus grand en nous disant : "à un certain moment, un des cercles touche la droite et c'est là que se trouve le point H." Le cercle est conçu ici comme une ligne de niveau (OM = k). Il n'y a pas eu de débat sur l'existence de plusieurs points H possibles. Il a paru évident à tous ceux qui ont proposé cette solution qu'il y avait un seul point H.



Cette observation est à rapprocher de la méthode de certains élèves de 6ième ou 5ième pour tracer une droite parallèle à une droite donnée (D) et à une distance donnée *a* de cette droite.

Ils tracent plusieurs cercles centrés sur la droite (D) et de rayon *a* . La droite cherchée est la tangente commune à ces cercles tracée par tâtonnement.

Cette méthode fournit un dessin de bonne précision



Il est implicite chez les élèves qu'une droite peut toucher un cercle en un seul point. Quand on leur demande de tracer une droite tangente à un cercle donné et passant par un point donné extérieur au cercle, ils disent : "je trace une droite qui frôle le cercle" et le font par tâtonnement sans recourir à la propriété de la tangente d'être perpendiculaire au rayon. Si on demande aux élèves de donner tous les cas possibles pour l'intersection d'une droite et d'un cercle, on trouve sans problème les trois cas : pas de points communs, un point commun et deux points communs. La seule erreur constatée lors de plusieurs observations est l'apparition d'un quatrième cas: trois points communs. C'est le cas où la droite est un diamètre du cercle. Le centre du cercle est le troisième point. Cette conception du cercle comme une ligne et un point au centre est peut-être induite par l'usage du compas, non pas du fait de l'instrument lui-même mais du fait que les maîtres exigent des élèves de marquer le centre avant de poser la pointe du compas. Le dessin obtenu ainsi est toujours un rond avec un point au centre. Nous

[18] Voir l'article : Triangles isocèles et cercles au collège, A.Berté et D. Woillez, «petit x» n°38

[19] Cette observation a été faite dans un collège à Niamey, et répétée dans de nombreuses classes de 5ième en Gironde entre 1990 et 1992

avons déjà signalé une erreur produite par cette conception lors de la recherche des cercles passant par deux points donnés.

Ces observations nous conduisent à penser que, pour les élèves, le fait que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique (1) pourrait être construit simultanément avec les positions relatives d'une droite et d'un cercle, de même que l'inégalité triangulaire (2) pourrait être construite simultanément avec les positions relatives de deux cercles. Un lien académique de cause à conséquence entre (1) et (2) peut être fait, dans un sens ou dans l'autre selon les axiomes choisis. Mais une telle démonstration magistrale est insuffisante pour certains élèves pour créer le tissu de relations nécessaire à la construction du sens. Comprendre que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique semble plus "facile" parce que les positions relatives d'une droite et d'un cercle sont plus simples que celles de deux cercles, ne serait-ce que par le nombre plus limité de cas possibles. Savoir que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique donne aux élèves la possibilité d'une quatrième voie pour se convaincre que les points sont alignés dans le cas limite de l'inégalité triangulaire. Donc les deux résultats sur la distance d'un point à une droite et l'inégalité triangulaire pourraient arriver l'un à la suite de l'autre dans cet ordre et prendre du sens par l'étude des relations entre eux. Ceci suppose une progression différente de celle suivie par la majorité des manuels de la classe de 4ième conformes à l'ordre d'écriture du programme.

III. Quelques hypothèses pour conclure

III.1. Le problème de la modélisation géométrique

R. Berthelot et M-H. Salin (1992) se réfèrent à notre travail à propos de l'inégalité triangulaire dans leur thèse. La reprise qu'ils ont faites de nos publications IREM de Bordeaux (1987 et 1992) nous permet aujourd'hui de préciser nos hypothèses. Nous voulons montrer entre autres la nécessité d'un enchaînement de situations et examiner les problèmes de gestion que cela pose pour enseigner quelques notions de géométrie métrique plane. R. Berthelot et M-H. Salin (1992) ont bien identifié le problème central de l'enseignement de la géométrie, ou comment enseigner la modélisation de l'espace. Cette modélisation implique la compréhension par les élèves de la différence entre les figures dessinées ou les objets fabriqués dans l'espace sensible et les concepts abstraits de la géométrie avec lesquels on construit la théorie.

Ce problème est connu depuis longtemps. Ils font référence à Poincaré et à Fréchet. On l'observe effectivement de façon typique au moment de l'inégalité triangulaire, mais pas seulement. Tous les problèmes de construction géométrique abordés dès le collège, portent en eux la confusion de contrat possible : faut-il produire un dessin dans l'espace sensible (ce que l'élève peut comprendre a priori) ou bien faire une construction géométrique justifiée par les propriétés des objets abstraits ? (Chevallard et Jullien, 1991 ; Reynès, 1991). Le langage usuel ne fait pas la distinction. On dit aux élèves de tracer un cercle, un triangle et non leurs représentations (Artigue, 1984). C'est pour cela qu'un problème de construction avec discussion de cas, quel qu'il soit, ne peut pas être posé sans préparation à une classe dans laquelle trop peu d'élèves ont commencé à comprendre qu'on se trouve dans un autre contrat. Ceci ne veut pas dire qu'il ne doit pas être posé du tout pour travailler le cas limite de l'inégalité triangulaire.

En effet, un débat a toujours lieu à ce propos, quelles que soit les observations, dans les nôtres comme dans celles citées plus haut. Donc nous ne nous intéressons pas aux conditions de naissance du débat, qui a toujours lieu, mais nous nous intéressons aux conditions qui permettent son aboutissement amenant ainsi les élèves à entrer dans la géométrie. Certains élèves modélisent avant d'autres. Ce décalage entre les élèves permet l'enseignement.

Notre *première hypothèse* est la suivante : Le passage de l'espace sensible à l'espace modélisé peut se produire ou se renforcer selon les élèves à l'occasion du débat scientifique entre eux au moment de l'inégalité triangulaire, car certains modélisent spontanément et tous sont prêts à le faire quand des conditions précises sont remplies. Ces conditions sont l'objet des deux hypothèses suivantes.

III.2. Le choix de l'ordre d'enseignement

La disparition de certains objets d'enseignement des programmes actuels (isométrie des triangles, positions de deux cercles), la disparition momentanée de certains autres (inégalité triangulaire, distance d'un point à une droite), leur réapparition récente et la façon dont ils vivent, sont des phénomènes de transposition didactique. (Chevallard, 1991) Cela va poser des problèmes aux maîtres plus ou moins explicitement. Notre *deuxième hypothèse* est que les conceptions sur les isométries des triangles, le nombre de points communs à deux cercles, les différentes conceptions du cercle, doivent être travaillées et les résultats institutionnalisés avant l'ouverture du débat sur le triangle plat pour que celui-ci aboutisse.

Notre *troisième hypothèse* est qu'une des conditions à la construction du sens, réside dans la réalisation par le maître d'un enchaînement de situations, donc dans le choix d'un ordre pour aborder les concepts géométriques, de manière que tel obstacle soit franchi avant tel autre, que tel débat puisse être engagé avant tel autre. Plusieurs ordres sont mathématiquement possibles, et ils sont d'autant plus nombreux qu'on décide de choisir une axiomatique surabondante. Avec une très forte axiomatique, l'ordre peut même être quelconque pour les concepts de base. Or des observations de classe, et une théorie didactique, les deux fonctionnant de façon dialectique - une observation, l'interprétation des faits, une deuxième observation en changeant les conditions - nous ont conduits à des nécessités d'enchaînement qui semblent exclure une juxtaposition dans un ordre quelconque et nous ont permis, au cours des années, de poser quelques jalons. Dans notre observation en seconde, le débat sur le triangle plat est conclu par le maître qui apporte la démonstration. La nécessité de cette intervention du maître est venue entre autres du fait que la condition sur l'enchaînement des situations n'était pas remplie. Le débat peut aboutir sans que le maître didactifie si lourdement la situation. Les élèves ont plusieurs possibilités de preuve, ce qui augmente leurs chances de réussite s'ils peuvent s'en saisir. Il suffira au maître de recadrer les arguments ou d'en provoquer la reformulation dans des situations de bilan partiel. Pour cela, il faut que certains résultats aient été institutionnalisés avant, sinon il y aura trop d'implicite, autant pour ceux qui ont des conceptions justes et qui doivent mettre en place une argumentation convaincante, que pour ceux qui ont des conceptions erronées et qui doivent comprendre leurs camarades. Cette condition sur l'ordre est une condition nécessaire.

Un des domaines de la didactique est d'étudier les possibilités des enseignants pour construire et gérer en classe les enchaînements de situations, compte-tenu des contraintes du système : programmes, manuels, habitudes, influences et pressions diverses.

Bibliographie

ARTIGUE M. et ROBINET J. (1982). Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *RDM*, vol. 3/1, Grenoble : La Pensée Sauvage

ARTIGUE M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 7

ARSAC G. CHAPIRON G. COLONNA A. GERMAIN G. GUICHARD Y. MANTE M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon

BERTÉ A.(1981). *Observations dans les classes du développement de l'activité mathématiques des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire.* Thèse de troisième cycle, Université de Paris 7

BERTÉ A.(1989). Rôle et conception des programmes de mathématiques - Enchaînement dynamique de quelques situations didactiques, *Actes de la C.I.E.A.E.M.*, 41 ième Rencontre, Bruxelles

BERTÉ A. (1993). *Mathématiques dynamiques*, Collection Perspectives didactiques, Nathan Pédagogie

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992).*L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université de Bordeaux 1

BROUSSEAU G.(1983). Étude de questions d'enseignement. Un exemple: la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD2-IMAG, Grenoble

BROUSSEAU G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Bordeaux 1

BROUSSEAU G. (1988). Le contrat didactique, le milieu. *R.D.M.*, vol 9/3, Grenoble : La Pensée Sauvage

CHEVALLARD Y.(1991). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné* , Grenoble : La Pensée Sauvage

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M.(1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, *Petit x*, n° 27, IREM de Grenoble

FELIX L.(1964). *Initiation à la géométrie en classe de cinquième*, Dunod

IREM DE BORDEAUX (1987). réédition revue et augmentée en 1992- Berté et coll.: *Enseignement des mathématiques utilisant la "réalité"*, Bordeaux 1

IREM DES PAYS DE LOIRE (1986). *L'enseignement des mathématiques par les situations problèmes au collège*, Le Mans

REYNES F. (1991). Géométrie ou trahison des dessins, *Petit x*, n°26, IREM de Grenoble

ANNEXE 1

Médiatrice et inégalité triangulaire

Propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment [AB]. Le maître peut faire ainsi :

1 - Les élèves dessinent [AB], et plient de sorte que A vienne sur B Pour tout point M du pli, la trace du segment [MA] se superpose à celle du segment [MB]. On admet que tout point de la médiatrice est équidistant de A et B

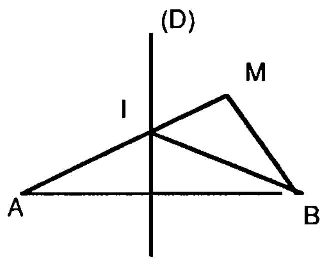
2 - Réciproquement, tracer [AB] et construire au compas dix points équidistants de A et B. Ils semblent alignés. On admet que tout point équidistant de A et B étant à l'intersection de deux cercles de même rayon de centre A et B est sur l'axe de symétrie de [AB]

Dans les manuels avant 1970, on démontrait le point 2 en démontrant sa contraposée avec l'inégalité triangulaire. Soit M n'appartenant pas à la médiatrice de [AB] notée (D) :

$MA = MI + IA = MI + IB > MB$ donc $MA > MB$

En conséquence : $M \notin (D) \Rightarrow MA \neq MB$

donc $MA = MB \Rightarrow M \in (D)$



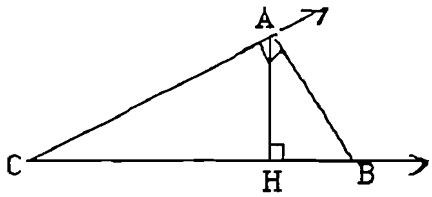
Aujourd'hui ceci ne sert plus à démontrer 2 qui est admis antérieurement. C'est devenu un exercice pour faire vivre l'inégalité triangulaire puisqu'on on la voit après.

ANNEXE 2

Démonstration du théorème de Pythagore au collège
(programmes de 1970)

La démonstration se présente ainsi :
On projette A en H et B en A

$\frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k$ Ceci est un axiome



donc $\overline{CH} = k\,\overline{CA} = k^2\,\overline{CB}$

De même : $\overline{HB} = k'^{\,2}\,\overline{CB}$ don $\overline{CH} + \overline{HB} = \overline{CB} = (k^2 + k'^{\,2})\,\overline{CB}$ donc $k^2 + k'^2 = 1$

C'est du théorème de Pythagore sous cette forme $k^2 + k'^{\,2} = 1$ dont on déduit : $|k| \leq 1$.

ANNEXE 3

Démonstration de l'inégalité triangulaire sens direct
(manuels avant 1970)

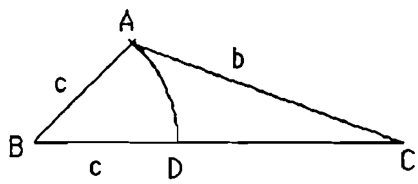
1 - On admet qu'un triangle isocèle a ses angles à la base aigus.

2 - On démontre que dans un triangle ayant un angle *droit* ou *obtus,* le côté opposé à cet angle est plus grand que les deux autres.

BAC obtus ou droit et BC = a

On porte la longueur BD = BA = c

Le triangle BAD étant isocèle, BAD est aigu, donc il se trouve à l'intérieur de BAC. Donc D se trouve entre B et C donc c < a. Idem pour b < a



3 - Soit un triangle quelconque tel que a > b et a > c

On porte la longueur BD = c donc DC = a - c

Le triangle ABD est isocèle donc ADB aigu,

donc ADC est obtus

Dans le triangle ADC, b > a - c donc a < b + c