RÉFLEXIONS À PROPOS DE L'UTILISATION DES CALCULATRICES DANS L'ENSEIGNEMENT

(SUITE ET FIN DE L'ARTICLE COMMENCÉ DANS LE N° 39)

Philippe CLAROU
IUFM de Grenoble

V.4. Quelques activités avec calculatrice au collège et en seconde

V.4.1. Approximations

1°) CD Sur un compact-disque, je trouve onze morceaux avec les durées suivantes :

4' 07 ; 6' 50 ; 6' 59 ; 4' 09 ; 2' 37 ; 3' 53 ; 3' 02 ; 6' 43 ; 7' 58 ; 7' 32 ; 6' 18.

1. Évaluez la durée totale du CD sans calculatrice. Expliquez la (ou les) méthode(s) d'approximation utilisée(s).
2. Calculez à l'aide d'une calculatrice, la durée exacte. Expliquez votre méthode.

2°) Note de Super marché

Voici une note de Super marché :

1. Calculez le montant de la note sans tenir compte des centimes.

2. Que pensez-vous du moyen d'approximation suivant :
Au total en francs, j'ajoute 27 x 0,50 ?

3. Comparez le montant exact de la note et le montant obtenu avec l'approximation.

4. Essayez la même méthode avec d'autres notes.

Spéc Laitier	3,20
St Hubert	6,80
Stylesse	9,20
Librairie	24,70
Librairie	24,70
Carte	43,70
Céréales	27,30
Miel mont	19,25
Flan nappé	5,05
Gélifiés x4	4,90
Sachets thé	22,85
Demak up 3/2	14,90
Escalope	11,88
Escalope	23,10
Oeufs	11,80
Chips	4,90
Chipster	10,50
Poireaux	6,45
Mélange 400g	16,80
Pous' recharge	5,80
Golden 80/85	12,35
Carotte	5,35
Cornichons	13,95
Soupl Eco Te	11,15
Malabar	12,95
Persil	3,95
Eau Vals	16,05

V.4.2. Les grands nombres ; notation scientifique

1°) Autour d'un milliard

1 Avez-vous vécu un milliard de secondes ?

2 Un porte-avions coûte environ 8 milliards. Quelle hauteur de billets de 100 F cela représente-t-il ? (un billet de 100 F a une épaisseur de 0,08 mm).

3 À quelle hauteur arriverait-on si chaque être humain se montait sur la tête ? La comparer à la distance Terre Lune (environ 300 000 km) ?

population mondiale environ 5 milliards

2°) Retrouvez la notation scientifique

Pour ces exercices, essayez de répondre dans un premier temps, sans utiliser une calculatrice. Vous pouvez ensuite vérifier votre réponse. En cas d'erreur, essayez de comprendre pourquoi vous vous êtes trompé.

Complète : $121{,}23 \times 10^5 + 4{,}56789 \times 10^4 = 1{,}686789 \times 10^{\cdots}$

$1{,}23 \times 10^5 \times 4{,}56789 \times 10^4 = 5{,}6185047 \times 10^{\cdots}$

$9{,}87 \times 10^{-2} + 6{,}54 \times 10^2 = 6{,}540987 \times 10^{\cdots}$

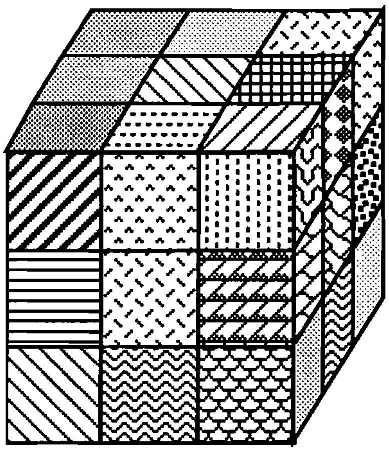
$9{,}8 \times 10^{-2} \times 6{,}5 \times 10^2 = 6{,}37 \times 10^{\cdots}$

$10^{-2} + 2{,}3 \times 10^3 + 4{,}5 \times 10^4 = 4{,}73 \times 10^{\cdots}$

$30 + 45{,}67 = 1{,}27567 \times 10^{\cdots}$ $1230 \times 45{,}67 = 5{,}61741 \times 10^{\cdots}$

$1 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-1} + 4 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^2 = \ldots\ldots\ldots \times 10^2$

3°) Le rubik's cube



(D'après *pour la science*, mai 1981) À l'aide d'un cube hongrois dit "Rubik's cube" on peut obtenir 43 252 003 274 489 856 000 dispositions différentes.

- En supposant que l'on obtienne une disposition différente toutes les secondes, combien faudrait-il de temps pour épuiser toutes les configurations ?
- Comparer le résultat avec l'âge de l'univers : 15 milliards d'année.

(4^e collection Pythagore, éditions Hatier).

4°) Les planètes

Voici le diamètre des planètes du système solaire : Mercure (4 878 km), Vénus ($1{,}21 \times 10^4$ km), Terre (12 756 km), Saturne (12×10^4 km), Neptune (48 000 km), Pluton (3 500 km).

- Rangez-les de la plus petite à la plus grosse.
- Calculez la superficie et le volume de chacune.

aire d'une sphère de rayon r : $4 \pi r^2$; volume : $\frac{4}{3} \pi r^3$

5°) L'échiquier

Pour le remercier de l'invention du jeu d'échecs, un roi des Perses (ou un empereur des Indes) proposa au génial inventeur de choisir une récompense. Celui-ci répondit qu'il ne voulait qu'un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la seconde et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64e case.

- calculer le nombre de grains de blé nécessaires pour la 64e case.
- sachant qu'un m^3 de blé contient environ 15 milliards de grains, évaluer la hauteur d'un grenier de 4 m de large et de 10 m de long assez grand pour entreposer ce tas de blé !
- comparer le résultat avec la distance de la Terre à la Lune (environ 300 000 km).

V.4.3. Séquence de touches

De la séquence de touches à l'écriture mathématique

Dans cet exercice, nous désignerons par $\boxed{M}$ la touche qui permet la mise en mémoire du nombre à l'écran. Sur les calculatrices les plus courantes on trouve $\boxed{M}$, $\boxed{M_+}$, $\boxed{M\,in}$, $\boxed{STO}$ ou ... Vous utiliserez la touche correspondante de votre calculatrice.

Écrivez les expressions mathématiques correspondant à la séquence de touche suivante :

1 taper un nombre x puis $\boxed{M}\boxed{x^2}\boxed{x}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{4}\boxed{x}\boxed{RM}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{=}$.

2 taper un nombre x puis $\boxed{M}\boxed{x^2}\boxed{x}\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{RM}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$.

3 taper un nombre x puis $\boxed{M}\boxed{x^2}\boxed{+}\boxed{(}\boxed{RM}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{)}\boxed{x^2}\boxed{=}$.

4 taper un nombre x puis $\boxed{M}\boxed{3}\boxed{\div}\boxed{7}\boxed{x}\boxed{RM}\boxed{x^2}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{\sqrt{}}\boxed{=}$.

5 taper un nombre x puis

$\boxed{M}\boxed{x}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{x}\boxed{(}\boxed{RM}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{5}\boxed{=}$

6 taper un nombre x puis

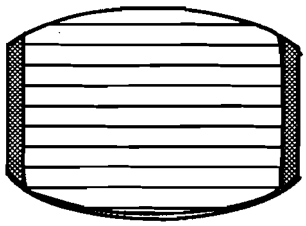
$\boxed{M}\boxed{(}\boxed{RM}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{x^2}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{RM}\boxed{x^2}\boxed{+}\boxed{5}\boxed{)}\boxed{\sqrt{}}\boxed{=}$.

De l'écriture mathématique à la séquence de touches

Écrire la séquence de touches correspondant au calcul des expressions suivantes et vérifier votre réponse en calculant avec les valeurs x = 5 et x = –7 :

- $5x + 3x^2 - 4$
- $(x + 3) \times (4 - 2x) + 3$
- $\frac{3}{4}x - \frac{5}{7}x^2$
- $(\sqrt{7}\,x + 5)^2$
- $\frac{(5x + \sqrt{3})^2}{x + 7}$

3°) Tonneau (d'après 4^e collection Pythagore, éditions Hatier)



Voici quelques procédés de calcul du volume intérieur d'un tonneau :

(1) Formule de Kepler : $V = \frac{\pi L}{12} (2 D^2 + d^2)$

(2) Formule de l'An II : $V = \frac{\pi L}{36} (2 D + d)^2$

(3) Formule de Dez : $V = \pi L \left(\frac{5 D + 3 d}{16}\right)^2$

(4) $V = \frac{\pi L}{36} (5 D^2 + 4 d^2)$

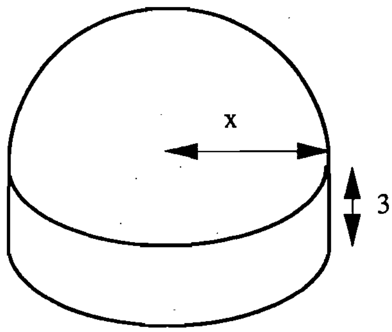
(5) $V = \frac{\pi L}{12} (D^2 + d^2 + D d)$

(6) $V = 0{,}8 L D d$

(7) $V = 1{,}0453 L (0{,}4 D^2 + 0{,}2 D d + 0{,}15 d^2)$

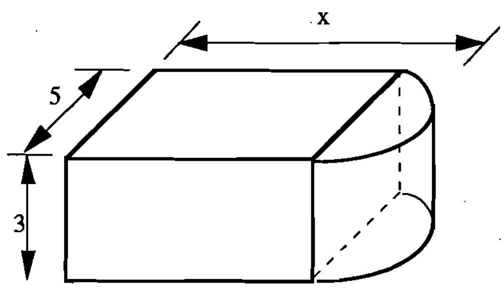
Nous avons mesuré deux tonneaux :
une barrique de 220 litres environ : $L = 80$ cm, $d = 50$ cm, $D = 65$ cm
une demi-barrique de 120 litres environ : $L = 66$ cm, $d = 41$ cm, $D = 53$ cm.
Comparer les résultats obtenus en utilisant les 7 formules.

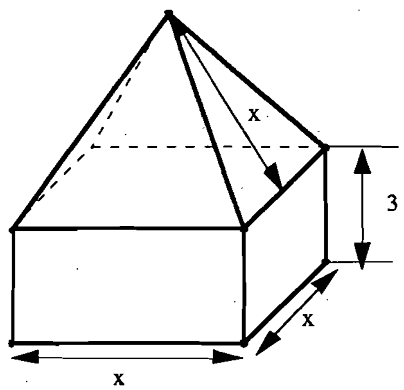
4°) Des aires à découvrir (d'après 4^e collection Pythagore, éditions Hatier).



a) Calculez l'aire totale de chaque solide dans les cas suivants : $x = 2$ et $x = 3{,}5$.

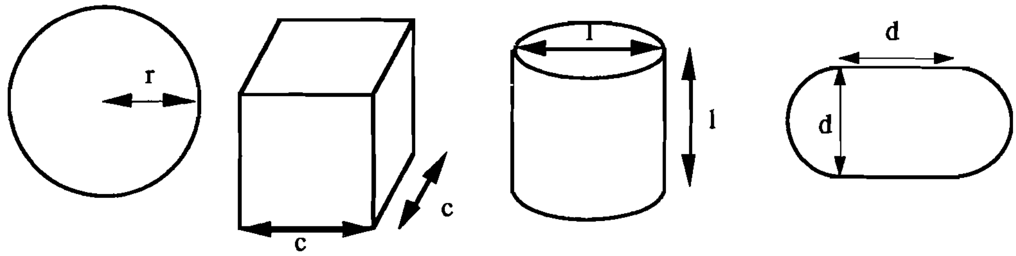
b) Calculez l'aire totale de chaque solide à l'aide de x. Calculez vos expressions pour les valeurs de x précédentes.





5°) Calculatrices et Espace

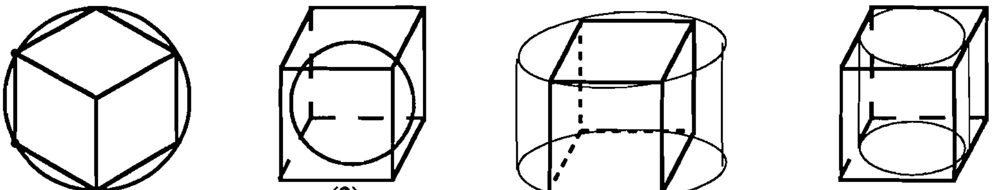
a) On veut une citerne de 1000 l de l'une des formes suivantes :



Quelle dimension doit-on donner suivant la forme choisie ?

Quelle forme doit-on choisir pour obtenir le plus petit échauffement possible de la paroi par l'air ambiant ?

b) Considérons un cube de côté 2 cm.



(1) (2) (3) (4)

Ce cube est inscrit en (1) dans une sphère et en (3) dans un cylindre ; en (2) c'est une sphère et en (4), c'est un cylindre qui sont inscrits dans le cube. Dans chacun des cas, quel est le rapport entre les volumes des deux solides imbriqués.

V.4.4. Calcul exact ou approché ?

1°) = ou ≈ ?

a) Sur une calculatrice scientifique, en mode d'écriture scientifique, pour 543 x 26,987 on obtient 1,4653941 x 10^4. Compléter par le signe approprié = ou ≈ en justifiant la réponse : 543 x 26,987 ...... 1,4653941 x 10^4.

b) Même question : 432,1 x 567,89 ...... 2,45385269 x 10^5.

c) Même question : 12,34 x 98,7654 ...... 1,218765036.

d) Même question : 12,344 x 9,87654321 ...... 1,219160494 x 10^2.

2°) Pour calculatrice scientifique (2e collection spirale, 1990, éditions Belin).

Calculer la valeur exacte de 0,0093786 x 0,00053294.

3°) Multiplication (2e collection spirale, 1990, éditions Belin).

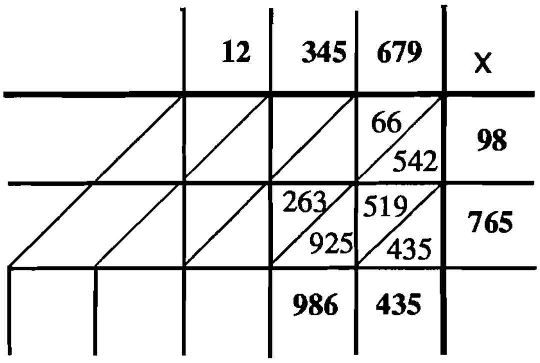
Utiliser les écritures 5247 x 10^3 + 624 et 1872 x 10^3 + 239 pour calculer la valeur exacte du produit 5247624 x 1872239.

4°) Multiplication en multiprécision

Voici une disposition particulière de la multiplication qui permet d'effectuer, en particulier avec l'aide d'une calculatrice, des multiplications pour des grands nombres et d'obtenir les résultats exacts.

a) Compléter l'opération ci-contre et justifier le bon fonctionnement de cette disposition.

b) Effectuer d'autres multiplications.



V.4.5. Valeur exacte ou approchée

1°) Calculer à la calculatrice le produit :

$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$

Ce produit P est-il entier ?

Ajouter 24 au résultat précédent. Pensez-vous toujours que P est entier ?

En regroupant astucieusement les facteurs deux par deux, calculer la valeur exacte de P.

2°) Précision des calculs (d'après l'ouvrage de 2e, 1994, éditions Belin)

Soit l'expression :

$A = 1579932 - (1 + \sqrt{3}) - 10\ (1 + \sqrt{3})^2 - 100\ (1 + \sqrt{3})^3 - 1000\ (1 + \sqrt{3})^4 - 10000\ (1 + \sqrt{3})^5.$

a) Calculer A en utilisant la valeur *affichée* par une calculatrice pour $1 + \sqrt{3}$.

b) Calculer A en utilisant la valeur fournie par la machine pour $1 + \sqrt{3}$.

Dans les deux cas, il est intéressant d'utiliser une mémoire.

Quelques commentaires

Nous avons regroupé un certain nombre d'activités, assez classiques et le plus souvent trouvées dans les manuels en usage, pour lesquelles la calculatrice est un outil efficace.

Approximations. Il est intéressant de poser la question de l'ordre de grandeur d'un résultat en ayant la possibilité de comparer avec le résultat obtenu avec une calculatrice. Les deux méthodes ne sont pas considérées en compétition mais elles se complètent.

Pour évaluer la durée totale du compact-disque (figurant heureusement souvent sur la pochette !), on peut ajouter au total des minutes autant de minutes que la moitié du nombre de plages. De même pour la note de supermarché, on peut ajouter autant de francs que la moitié du nombre d'articles. Cette méthode d'approximation se justifie en considérant que les durées en seconde sont en moyenne de 30s et que la valeur des centimes du prix de chaque article est en moyenne de 0,50F. Pour les prix, cette estimation est plus discutable puisque les commerçants prennent soin de proposer des prix comme 14,95F au lieu de 15F.

La plupart des manuels de 6e ou de 5e propose de nombreux exercices de calcul "mental" ou "à faire dans la tête". Il parait intéressant, au lieu d'interdire l'usage de la calculatrice pour ces exercices, de comparer les résultats obtenus par le calcul réfléchi et avec la machine. En particulier, cela pourra mettre en évidence que l'usage des calculatrices peut être lourd (dans le cas des calculs très simples) et s'accompagner d'erreurs de frappe.

Les grands nombres ; la notation scientifique. Ces exemples d'activités ont été choisis pour montrer l'utilité de la notation scientifique.

Séquences de touches. On utilise les calculatrices à l'occasion de certains calculs ou pour l'évaluation d'une formule pour des valeurs données. Il y a ici un certain nombre d'exemples qui devrait permettre d'évaluer une certaine maîtrise de cet outil.

Calcul exact ou approché. Les premiers exercices sont l'occasion de réfléchir au fonctionnement de l'algorithme traditionnel de la multiplication.

V.5. Ordre de grandeur ; opérations sans calculatrice

Pour cette série d'exercices, effectuez les vérifications à l'aide de la calculatrice, essayez ensuite de répondre en utilisant un simple raisonnement ; enfin, vous pouvez éventuellement vérifier vos réponses avec la machine.

1. (d'après 6e Delord, Vinrich, 1994, éditions Hachette)

a) Je dois acheter 24 objets coûtant 1,95F chacun. Ai-je assez avec un billet de 50F ?

b) Le litre d'essence coûte 5,45F. Je mets 41l dans le réservoir. Ai-je assez pour payer avec 200F ?

2. (d'après 6e Delord, Vinrich, 1994, éditions Hachette)

Pour chacun des produits suivants, on vous propose plusieurs résultats. Expliquez pourquoi vous pouvez être sûr que certains sont faux. Vérifiez avec la calculatrice le résultat.

$\boxed{21 \times 98}$	20 518	2 058	2 085	258
$\boxed{0{,}83 \times 47}$	49,01	45,21	39,1	39,01

3. Une tache cache le deuxième facteur du produit donné pour lequel quatre résultats sont proposés. Vous savez que le nombre caché est un nombre entier.

18 x ⬤	3 546	3 465	992	16

a) Sans utiliser la calculatrice ou poser d'opération, pourquoi pouvez-vous dire qu'un seul des résultats proposés est possible ?
b) En utilisant la calculatrice, à quelle condition pouvez-vous deviner le nombre caché ?

4. (d'après 6e Delord, Vinrich, 1994, éditions Hachette)
Connaissant le résultat suivant : 542 – 213,7 = 328,3 et sans utiliser la calculatrice ni faire pratiquement aucun calcul complètez :

328,3 + 213,7 =	542 – 328,3 =
5 420 – 2 137 =	0,542 – 0,2 137 =
1 542 – 213,7 =	742 – 213,7 =
542 – 203,7 =	842 – 113,7 =

Expliquez vos réponses.
Éventuellement, vérifiez avec votre calculatrice.

5. Vérifiez que 38,26 x 1,7 = 65,042
Complètez :

38,26 x 17 = ...	;	3826 x 17 = ...
0,3826 x 170 = ...	;	38,26 x 3,4 = ...
19,13 x 3,4 = ...	;	38,26 x 51 = ...
$\frac{65,042}{1,7}$ = ...	;	$\frac{65,042}{38,26}$ = ...

6. Vérifiez que $\frac{7,12}{1,6} = 4,45$

Complètez :

$\frac{7,12}{16}$ = ...;	$\frac{7,12}{0,16}$ = ...
$\frac{712}{16}$ = ...;	$\frac{7,12}{4,45}$ = ...
$\frac{7,12}{0,8}$ = ... ;	$\frac{7,12}{3,2}$ = ...
4,45 x 1,6 = ...;	8,90 x 1,6 = ...

7. Sans calculer le produit 5,576 x 2,428, essayez de répondre aux questions suivantes :
nombre de chiffres à droite de la virgule : ....
nombre de chiffres à gauche de la virgule : ....
chiffre le plus à droite : ....
chiffre le plus à gauche : ....

8. (d'après 6e Delord, Vinrich, 1994, éditions Hachette)
Pour chacun des quotients suivants :
$\frac{41,5}{10,3}$ $\frac{7,03}{0,98}$ $\frac{6,3}{2,05}$ $\frac{305}{6}$
a) donnez d'abord un ordre de grandeur en expliquant la méthode suivie ;
b) vérifiez à la calculatrice.

9. (d'après 6e Delord, Vinrich, 1994, éditions Hachette)
1°) a) vérifiez avec la calculatrice que 999 x 0,99 est inférieur à 1 000 ;
b) quel raisonnement vous permet de prévoir ce résultat sans faire le calcul avec l'aide de la machine.
c) Et pour 999 x 0,999 999 999 ?
2°) a) vérifiez avec la calculatrice si 999 x 1,1 est plus grand que 1 000 ;
b) même question pour 999 x 1,01 ; pour 999 x 1,001 ; pour ...
c) Quel raisonnement vous permet de prévoir les réponses aux questions précédentes sans effectuer le calcul avec l'aide de la machine ?

Commentaires

Ces exercices peuvent très bien être abordés au niveau 6e.
Ils devraient permettre une certaine réflexion sur l'ordre de grandeur du résultat et plus généralement sur les opérations usuelles. Ils devraient aussi inciter à un certain recul par rapport à la calculatrice puisque l'élève est invité à anticiper par rapport au résultat qu'il pourra lire sur l'écran. Ces objectifs ne seront atteints que si l'enseignant explique bien la consigne, la tâche attendue et s'il prend soin de faire expliciter les démarches de chacun.
La mise en commun des différentes méthodes d'approximation est importante, ne serait-ce que pour donner des méthodes à ceux qui n'en ont pas et qui n'arrivent pas à se dégager des algorithmes opératoires.

Exercice 1. Il est nécessaire de bien préciser la consigne : on essaye de répondre d'abord sans la calculatrice.

Exercice 2. Pour 21 x 98, le résultat est évidemment de l'ordre de 2000. Sans effectuer l'opération, on peut être sûr que le résultat n'est pas 20 518 ni 258. On peut écarter aussi de façon sûre 2 085 à cause du chiffre des unités ou de sa parité. Donc, seul, 2 058 est vraisemblable. Mais attention, il faut faire le calcul pour être certain que le produit vaut bien 2 058.
Pour 0,83 x 47, les arguments sont un peu différents. On peut prévoir que le résultat est inférieur à 47 puisque le premier facteur est inférieur à 1 ; 49,01 est donc écarté. Ce produit doit comporter deux chiffres après la virgule puisque 7 x 3 = 21. Il est plus difficile d'écarter 45,21 : on peut considérer que le produit cherché est inférieur au produit 0,9 x 50 qui vaut 45.

Exercice 3. Le résultat doit être pair, nul ou supérieur ou égal à 18, multiple de 9. On peut donc écarter 3 465, 16 et 992.

Exercice 4. C'est l'occasion ici de réfléchir au sens de la soustraction, au lien avec l'addition et sur les algorithmes des opérations avec les décimaux.

Exercices 5 et 6. Mêmes remarques à propos cette fois de la multiplication et de la division.

Exercice 7. Le résultat est compris entre 5 x 2 et 6 x 3 c'est à dire entre 10 et 18 : le chiffre le plus à gauche est donc 1.

V.6. Au delà de l'écran de la calculatrice

1. Quel est le chiffres des unités de 2^{1995}.

2. 1°) Quel est le 1995ième chiffre après la virgule obtenu dans la division de 1 par 7 ?
2°) dans la division de 10 par 97 ?
3°) dans la division de 10 par 51 ?

3. (D'après "plus fort que ma calculatrice" brochure Modules en 2nde, Irem de Strasbourg).
1°) Quelle est la valeur exacte de 7^{12} ?
2°) Celle de 9^{11} ?

4. Rallye de la réunion 1991.
Quel est le nombre de chiffres de 300^{300} ?

5. Différence de deux carrés.
1°) Calculez, sur votre calculatrice, $1234567890^2 - 1234567889^2$.
Le résultat vous parait-il exact ? Argumentez votre réponse.
2°) Comparez le résultat obtenu avec plusieurs modèles de calculatrice.
3°) Factorisez l'expression et calculez sa valeur exacte.
Comparez avec les résultats obtenus précédemment.

6. Encore une différence de deux carrés.
1°) Calculez, sur votre calculatrice, $1\,000\,000\,025^2 - 999\,999\,975^2$.
Le résultat vous parait-il exact ? Argumentez votre réponse.
Comparez le résultat obtenu avec d'autres modèles de calculatrice.
2°) Calculez, sur votre calculatrice, $9\,999\,999\,925^2 - 9\,999\,999\,875^2$.
Le résultat vous parait-il exact ? Argumentez votre réponse.
Comparez le résultat obtenu avec d'autres modèles de calculatrice.
3°) Développez $(a + b)^2 - (a - b)^2$.
Appliquez le développement précédent aux expressions du 1°) et du 2°) pour trouver leurs valeurs exactes.

Commentaires

Exercice 1. Il s'agit de remarquer et d'utiliser la périodicité des chiffres des unités dans la suite des puissances de 2.

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 6 \arrow[u] & 8 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Exercice 2. Il s'agit ici de remarquer et d'utiliser la périodicité des approximations décimales d'un rationnel. Pour les deux premiers exemples, on peut "voir" la période sur l'écran de la calculatrice. Pour le troisième exemple, pour $\frac{10}{51}$ on obtient, sur l'écran d'une calculatrice comportant un affichage de dix chiffres, 0,196078431. Attention, la période n'est pas 19607843. Elle est beaucoup plus longue : 1960784313725490.

Tout l'intérêt de l'activité réside dans la recherche des différents moyens pour trouver les différents chiffres après la virgule. C'est très facile avec une calculatrice possédant la division euclidienne. On effectue la division entière de 10 par 51. On note le quotient 0. On multiplie le reste par 10 et on effectue à nouveau la division entière par 51. Et ainsi de suite ...

Exercice 3. Sur une calculatrice scientifique ayant 10 chiffres à l'affichage (c'est le cas de la majorité des machines), on obtient la valeur exacte de 7^{11}. Pour 7^{12}, on obtient le résultat en écriture scientifique ce qui nous donne les 9 premiers chiffres. En multipliant 7^{11} par 7 on trouve facilement tous les chiffres de 7^{12}.

$7^{11} = 1977326743$ $\quad 7^{12} \approx 1{,}38412872 \times 10^{10}$ $\quad$ comme $7 \times 43 = 301$ on a :

$7^{12} = 1{,}3841287201 \times 10^{10}$.

Attention, on obtient $9^{11} \approx 3{,}138105961 \times 10^{10}$ et $9^{11} = 3{,}1381059609 \times 10^{10}$.

Exercice 4. On a $300^{300} = (3 \times 100)^{300} = 3^{300} \times 10^{600}$.

$3^{300} = (3^{150})^2 \approx (3{,}6998848 \times 10^{71})^2$

$\approx 13{,}689147 \times 10^{142}$. 300^{300} a donc 2 + 142 + 600 chiffres.

Exercice 5. Sur une calculatrice scientifique, on obtient généralement 2 500 000 000 ou 2 469 000 000.

Puisque $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$ on trouve $2 \times 1234567889 + 1 = 2\,469\,135\,779$.

Exercice 6. Il est intéressant d'utiliser l'identité $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 4ab$.

On trouve donc pour la première expression $4 \times 10^9 \times 25 = 10^{11}$. Les calculatrices donnent généralement ce résultat.

Pour la deuxième, le calcul donne : $4 \times 9{,}9999999 \times 10^9 \times 25 = 3{,}9999996 \times 10^{11}$. Avec une calculatrice, on obtient généralement 10^{12}.

V.7. Défi

Pour relever chacun des défis suivants, il faut trouver une séquence de touches permettant d'effectuer le calcul donné en respectant les contraintes indiquées.

Précisez bien le type de calculatrice avec laquelle vous relevez le défi (calculette, calculatrice scientifique ou bien calculatrice avec éditeur d'expression).

Comparez votre résultat avec celui de vos camarades.

1. Allumez votre calculatrice et affichez simplement 7 à l'écran.

Comment obtenir à l'écran un nombre supérieur à 10^{20} en appuyant seulement sur deux touches ?

(la touche $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{\text{Shift}}$ ou $\boxed{\text{Inv}}$ ne compte pas ainsi que la touche $\boxed{\text{ENTER}}$ ou $\boxed{\text{EXE}}$ pour une calculatrice avec éditeur d'expression mais toutes les autres comptent en particulier pour une calculatrice scientifique, la touche $\boxed{=}$).

2. a) Sans utiliser la touche $\boxed{\div}$ (ni éventuellement la touche fraction $\boxed{/}$) et sans modifier l'expression,calculez $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

(attention, vous devez trouver 5).

b) Essayez de ne pas utiliser non plus les touches $\boxed{(}$ et $\boxed{)}$.

3. Sans utiliser la touche $\boxed{\frac{1}{x}}$ ni les touches $\boxed{(}$ et $\boxed{)}$ et sans modifier l'expression, calculez $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

4. Sans vous servir des touches $\boxed{y^x}$ et $\boxed{\sqrt[x]{y}}$, calculez 7^{24} en appuyant au plus 7 fois sur une touche.

Commentaires

Défi 1. Sur une calculatrice scientifique possédant la fonction factorielle 7 $\boxed{x^2}$ $\boxed{x!}$ donne $6{,}08281\ldots10^{62}$!!!

Si la calculatrice ne possède pas la fonction factorielle, il y a 7 $\boxed{x^2}$ $\boxed{10^x}$ qui donne 10^{49} !!!

Défi 2. Il suffit d'utiliser la touche $\boxed{\frac{1}{x}}$ et de remplacer la division par le produit de l'inverse.

Le résultat très simple permet là aussi une vérification facile.

Défi 3. Cette fois, il faut utiliser la division et un registre mémoire pour éviter le parenthésage.

Défi 4. En classe de Terminale, ce défi peut être relevé en utilisant les fonctions logarithmes et exponentielles.

Ici il suffit de remarquer que 28 = 8 + 16 et de calculer $7^8 \times 7^{16}$ à l'aide d'utilisation successive de la touche $\boxed{x^2}$. Cela donne par exemple :

7 $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$.

V.8. DES CONJECTURES AVEC UNE CALCULATRICE

V.8.1. Avec des carrés

1°) Choisir deux entiers consécutifs (par exemple 7 et 8). Calculer la différence de leurs carrés (ici $8^2 - 7^2$). Le résultat est-il toujours impair ? Effectuer plusieurs essais puis établir la réponse dans le cas général.

2°) Choisir deux entiers ayant pour différence 2 (par exemple 47 et 49). Calculer la différence de leurs carrés. Le résultat est-il toujours un multiple de 4 ? Établir la réponse dans le cas général.

V.8.2. Nombres retournés

1°) Vérifiez que 123 + 456 = 579 et que 321 + 654 = 975. Comparez les termes des deux sommes et les deux résultats.
Faites-vous la même remarque avec 246 + 732 et 642 + 237 ?

2°) Pouvez-vous généraliser votre remarque ? Et avec des nombres de deux chiffres ?

V.8.3. Produit d'entiers consécutifs

Pour chacune des questions vous effectuerez plusieurs vérifications à l'aide de la calculatrice puis vous établirez les résultats dans leur généralité en soignant l'argumentation.

1°) a) Choisir trois entiers consécutifs (par exemple 11, 12 et 13). Effectuer le produit de ces entiers et le diviser par 6.
Le résultat est-il entier : toujours ? jamais ? à condition ... (à préciser) ?
b) Le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 24 :
toujours ? jamais ? à condition ... (à préciser) ?
c) Le produit de quatre entiers consécutifs est un multiple de 24 :
toujours ? jamais ? à condition ... (à préciser) ?

2°) a) Vérifier que $1994 \times 1995 \times 1996 + 1995 = 1995^3$.
b) Sur la calculatrice, calculer $1994 \times 1995 \times 1996 + 1995 - 1995^3$.
puis $\sqrt[3]{1994 \times 1995 \times 1996 + 1995} - 1995$.

V.8.4. Avec des fractions

1°) Vérifier avec la calculatrice puis par le calcul que :

$$\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{3}{2}+1}=\frac{2}{3} \text{ et que } \frac{\frac{7}{5}+1}{\frac{5}{7}+1}=\frac{7}{5}$$

2°) Peut-on généraliser ces résultats ? sous quelle forme ? Justifier la réponse.

V.8.5. Somme des carrés

1°) Vérifier que $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$.

2°) Vérifier que $1^2 + 2^2 + \dots + 11^2 = \frac{11 \times 12 \times 23}{6}$.

3°) Essayer de trouver l'égalité correspondant à $1^2 + 2^2 + \dots + 20^2$ et la vérifier.

4°) Essayer de deviner la formule donnant la somme des carrés des n premiers entiers en fonction de n.

V.8.6. Avec des racines

1°) (D'après 2e collection Terracher, 1990, éditions Hachette)

a) Vérifier que $\sqrt{49} + \sqrt{36} = 49 - 36$.

b) Y a-t-il d'autres nombres pour lesquels la somme des racines est égale à la différence entre les nombres ?

2°) a) Doit-on écrire $\sqrt{325} + \sqrt{52} = \sqrt{637}$ ou bien $\sqrt{325} + \sqrt{52} \approx \sqrt{637}$? Justifier la réponse.

b) Doit-on écrire $\sqrt{833} + \sqrt{612} = \sqrt{2873}$ ou bien $\sqrt{833} + \sqrt{612} \approx \sqrt{2873}$? Justifier la réponse.

c) Essayer de trouver d'autres valeurs pour un exercice semblable.

(D'après de 2e collection Terracher, 1990, éditions Hachette)

Soit A, B et C trois points du plan tels que $AB = \sqrt{325}$, $AC = \sqrt{52}$ et $BC = \sqrt{637}$.

Sont-ils alignés ?

3°) (D'après 2e collection Pythagore, 1994, éditions Hatier)

a) Soit $x = 17 + 5\sqrt{3}$ et $y = 17 - 5\sqrt{3}$.

Vérifier sur une calculatrice si la somme $x + y$, le produit xy et la somme $x^2 + y^2$ sont des entiers.

Essayer d'établir de façon sûre ce résultat sans l'aide de la calculatrice.

b) Faire le même travail avec $x = 23 + 7\sqrt{5}$ et $y = 23 - 7\sqrt{5}$.

c) Peut-on généraliser en considérant les nombres $a + b\sqrt{c}$ et $a - b\sqrt{c}$?

V.8.7. Drôle de produit

1°) Calculer $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})\ (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$. Le résultat est-il entier ? Ajouter 24 au résultat précédent. Pensez-vous toujours que le résultat est entier ?

2°) Mêmes questions pour le produit :
$(\sqrt{23} + \sqrt{17} + \sqrt{10})\ (\sqrt{23} - \sqrt{17} + \sqrt{10})\ (\sqrt{23} + \sqrt{17} - \sqrt{10})\ (\sqrt{23} - \sqrt{17} - \sqrt{10})$.

3°) Essayez sur votre calculatrice avec d'autres nombres puis essayez de généraliser le résultat.

Commentaires

Avec des carrés. Cet exercice peut avoir des prolongements à propos d'identités remarquables.

Nombres retournés. Il s'agit de comparer la somme de deux nombres de trois chiffres avec celle des deux nombres "retournés". Dans les exemples proposés, on trouve 579 et 975 pour le premier et 978 et 879 pour le deuxième. Les résultats sont-ils toujours miroirs l'un de l'autre ? Évidemment non. Cela ne se produit que lorsqu'il n'y a pas de retenue. Il nous parait que cet exercice est l'occasion de revenir sur l'algorithme de l'addition.

Produit d'entiers consécutifs. Même si les notions de diviseurs et les multiples ne sont plus explicitement au programme du collège, une réflexion sur ce thème est intéressante à mener. Il est facile d'établir les résultats demandés en s'appuyant sur les propriétés suivantes : parmi trois entiers consécutifs, il y a toujours un multiple de trois (les multiples de trois se succèdent de trois en trois) ; parmi deux entiers consécutifs, il y a un nombre pair ; parmi deux nombres pairs consécutifs, l'un d'eux est multiple de deux, l'autre de quatre ; parmi quatre entiers consécutifs, il y a un multiple de 4 et un multiple de 2. Pour 2°) il suffit de développer $(n - 1)\ n\ (n + 1)$.

Avec des fractions. Il suffit d'écrire $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ... et de simplifier les termes.

Somme des carrés. Le travail demandé ici est surtout orienté vers la découverte d'une formule en fonction de n. Par contre, il n'est pas prévu de l'établir.

Avec des racines. 1°) L'égalité est vérifiée parce qu'il s'agit des carrés de deux entiers consécutifs. $\sqrt{a^2} + \sqrt{(a + 1)^2} = a^2 - (a + 1)^2$.

2°) Pour avoir une égalité il suffit de considérer n\r(r) + p\r(r) que l'on écrit \r(n2 r) + $\sqrt{p^2\, r}$ d'une part et $\sqrt{(n + p)^2\, r}$ d'autre part.

3°) Il peut être intéressant de ne pas donner la formulation générale mais de la faire découvrir.

Drôle de produit. On a $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}) =$
$a^2 + b^2 + c^2 - 2\,a\,b - 2\,a\,c - 2\,b\,c$.

V.9. Des clés pour des nombres

V.9.1. CCP

Les numéros de compte chèque postaux (ccp) sont formés de 11 caractères comprenant de gauche à droite :
- 7 chiffres pour le numéro de compte proprement dit.
- 1 lettre suivie d'un zéro.
- un code à 2 chiffres désignant le centre de chèques postaux dans lequel le compte a été ouvert (code de 20 à 38).

La lettre est une clé permettant de vérifier la cohérence du numéro. Elle peut être déterminée à l'aide des autres informations de la façon suivante.

a) On calcule le reste de la division par 23 du nombre :
(code du centre) x 10^6 + (n° de compte).

b) A ce reste on associe la lettre de l'alphabet privé de I, de O et de Q suivant la correspondance suivante :

A	B	C	… …	X	Y	Z
0	1	2		20	21	22

1°) Utiliser une calculatrice pour vérifier la clé du compte 1538 47 K0 36.

(avec une TI Galaxy 40, on dispose d'une touche $\boxed{\text{INT÷}}$ permettant de calculer le quotient et le reste d'une division ; il est possible de l'utiliser malgré la longueur des nombres).

2°) Si vous disposez d'un autre numéro de CCP, vérifiez la clé. Essayez d'utiliser au mieux votre calculatrice pour simplifier le plus possible vos calculs.

V.9.2 N° d'identification INSEE

Le numéro d'identification INSEE (que l'on trouve sur une carte de sécurité sociale) est un nombre de 13 chiffres ainsi constitué :
- le chiffre 1 pour un homme ou 2 pour une femme,
- deux chiffres correspondant à l'année de naissance (81 pour 1981),
- deux chiffres correspondant au mois de naissance (par exemple 07 pour juillet),
- deux chiffres correspondant au numéro de département du lieu de naissance,
- trois chiffres correspondant au code de la commune de naissance,
- trois chiffres correspondant au numéro d'ordre sur le registre d'état civil.

Si N désigne le nombre de 13 chiffres du numéro d'identification national, la clé de contrôle C est calculée par la formule :
C = 97 – reste de la division de N par 97.

1°) Vérifiez la clé de votre numéro d'identification.
(En réfléchissant un peu, on peut utiliser avec profit une calculatrice comme la TI Galaxy 40 qui possède une touche donnant le quotient et le reste d'une division entière même si un nombre aussi long ne peut être transcris sur la machine).

2°) Quelle est, à votre avis, l'utilité de cette clé.

V.9.3. Compte bancaire

On peut observer sur un relevé d'identité bancaire (**rib**), qu'un compte en banque est identifié par 23 caractères (la plupart sont des chiffres). Les deux derniers chiffres de droite constitue une clé permettant de vérifier la cohérence du numéro.

Les 21 premiers caractères sont formés par :
- le code de la banque (5 chiffres),
- le code du guichet (5 chiffres) ou de l'agence,
- le numéro de compte proprement dit.

Si l'un des caractères est une lettre, codez-la à l'aide du tableau de correspondance ci-contre.

Code numérique :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	2	3	4	5	6	7	8	9

N désignant le nombre de 21 chiffres défini ci-dessus, la clé de contrôle C est calculée par la formule : $C = 97 -$ reste de la division de $(100 \times N)$ par 97.

1°) Vérifiez la clé du numéro suivant :

Banque	Guichet	Compte	Clé
18207	00071	01170925418	43

2°) En ajoutant à droite les deux chiffres de la clé de contrôle, on obtient un nombre de 23 chiffres. Vérifiez que ce nombre est un multiple de 97 autrement dit que le reste de la division par 97 est nul.

3°) Essayez de trouver un RIB et vérifiez la clé du numéro donné.

Commentaires

Un des intérêts de cette activité est de permettre d'expliquer en partie une pratique auquel chacun a pu être confronté un jour ou l'autre : les clés de saisie informatique.

Cette activité est particulièrement intéressante si on dispose d'une calculatrice donnant le quotient et le reste d'une division entière. C'est le cas notamment de la Galaxy 40 de TI. En effet, cette machine possède une touche . Mais lors de son utilisation, on peut se heurter aux problèmes de limitations d'affichages :
- le nombre donné doit être inférieur à 10^{11} ;
- le quotient ou le reste de la division entière ne doivent pas dépasser 10^{6}.

Ces limitations obligent à revenir sur l'algorithme même de la division. En effet, il suffit de considérer par exemple le nombre formé des 5 premiers chiffres du nombre donné et de chercher le reste de la division de ce nombre. On continue ensuite en prenant le nombre formé par le reste obtenu suivi des 3 ou 4 chiffres suivants du nombre de départ. Et ainsi de suite. Une réflexion sur le fonctionnement de l'algorithme traditionnel de la potence permet de résoudre ces difficultés.

V.10. Avec trois chiffres et une calculatrice

$$\begin{array}{r|l} 547\,547 & \underline{\ 11\ } \\ & \\ 0 & \end{array}$$

1. Choisir un nombre entier **t** de trois chiffres (par exemple : 547).
L'écrire deux fois de suite pour former un nombre entier **s** de 6 chiffres (dans l'exemple on obtient 547547). Chercher des diviseurs de ce nombre **s** (on dit que un entier d est un diviseur du nombre entier n si la division de n par d "tombe juste" et donne un quotient entier).
Trouvez-vous que 7 et 11 sont des diviseurs de votre nombre **s** ?

2. Reprendre la question 1 en partant d'autres nombres de trois chiffres.
Trouvez-vous encore que 7 et 11 sont des diviseurs du nombre de six chiffres que vous avez formé ?

3. Trouver au moins 5 diviseurs de tous les nombres de six chiffres que vous pouvez former en écrivant deux fois de suite un nombre de trois chiffres.

4. Comparez vos résultats avec ceux de vos camarades et essayez d'expliquer pourquoi vous obteniez toujours ces mêmes diviseurs quelque soit le nombre de départ.

5. Pouvez-vous observer les mêmes résultats en partant de nombres de deux chiffres ?
Il y a seulement deux nombres qui sont diviseurs de tous les nombres de quatre chiffres que vous pouvez former en écrivant deux fois de suite un nombre de deux chiffres. Essayez de les trouver.

6. Prolongez vos remarques en partant cette fois d'un nombre de quatre chiffres que vous écrivez deux fois de suite.

Commentaires

Cette activité peut être proposée en 6^{e}. Il est intéressant de la mener en liaison avec des travaux sur la division, le quotient de deux entiers et les multiples.

La calculatrice permet de ne pas se focaliser sur la seule conduite des algorithmes opératoires mais de privilégier la réflexion sur les résultats.
Il est possible de faire découvrir aux élèves que "passer de 547 à 547 547, cela revient à multiplier 547 par 1001". Il suffit alors de remarquer que 1001 = 7 x 11 x 13

pour expliquer le fait que tous les nombres obtenus sont des multiples de 7, 11, 13, 77, 91 et 143.

Le cas des nombres de deux chiffres n'est pas intéressant puisque 101 est premier.

Pour un nombre de quatre chiffres, il y a seulement trois diviseurs constants puisque 10001 = 73 x 137.

V.11. Avec des fractions

1. Soit $F = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$. Essayez de calculer F avec votre calculatrice.

2. Vérifiez que $F = \frac{157}{30}$. Expliquez votre méthode (attention aux erreurs de calcul possible).

3. Cherchez une séquence de touches permettant de calculer F sur votre machine suivant la première expression en utilisant seulement les touches $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{4}$, $\boxed{3}$, $\boxed{2}$, $\boxed{+}$, $\boxed{\frac{1}{x}}$, $\boxed{=}$ et éventuellement les parenthèses.

4. Toujours à partir de cette première expression de F, essayez de trouver une séquence de touches permettant de calculer F en utilisant seulement les touches $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{4}$, $\boxed{3}$, $\boxed{2}$, $\boxed{+}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{=}$ et éventuellement les parenthèses.

5. Il est assez facile de passer de la première écriture de F (avec des sommes d'entiers et d'inverses d'entiers) à une écriture fractionnaire de F. Cherchons à passer de la deuxième écriture à la première.

Par exemple $\frac{53}{47}$. On écrit la fraction comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. On écrit cette nouvelle fraction sous la forme de l'inverse de l'inverse et on recommence avec la nouvelle fraction :

soit $\frac{53}{47} = 1 + \frac{6}{47} = 1 + \cfrac{1}{\frac{47}{6}}$; $\frac{47}{6} = 7 + \frac{5}{6} = 7 + \cfrac{1}{\frac{6}{5}}$; $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ d'où $\frac{53}{47} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$

Cette nouvelle écriture de $\frac{53}{47}$ (à l'aide seulement d'entiers et d'inverse) est appelée parfois écriture sous forme de fractions continues.

a) Essayez de retrouver la première écriture de F à partir de $\frac{157}{30}$.

b) Cherchez les écritures en fractions continues de : $\frac{1995}{1981}$; $\frac{31416}{10000}$; $\frac{1414}{1000}$; $\frac{54321}{12345}$.

6. Expliquer comment l'on peut procéder le plus simplement possible, pour trouver l'écriture d'une fraction sous la forme de fractions continues. Comparez votre méthode avec celles trouvées par vos camarades.

Commentaires

Cette activité peut être proposée au niveau 4e. Elle présente aussi un intérêt au niveau de la classe de 2e avec un prolongement possible à propos d'approximation de π en fractions continues et de programmation.

Elle permet de vérifier une certaine maîtrise des calculatrices pour le calcul des fractions.

Question 1. Toutes les méthodes de calcul sont envisageables. Avec certaines calculatrices, il peut y avoir dépassement de capacité si on utilise plusieurs niveaux de parenthésage. Si on utilise une calculatrice permettant le calcul sur les fractions, il faut tout de même organiser le calcul pour qu'il soit possible. La question reste intéressante à traiter.

Question 2. Cette question oblige à envisager l'utilisation de la touche inverse. Il est possible de ne pas utiliser de parenthèses et donc de faire ce calcul avec une "calculette 4 opérations".

Question 3. Cette question permet de faire le lien entre inverse et quotient.

Question 4. Certaines calculatrices (par exemple la Galaxy 40 de TI) permettent d'obtenir très simplement le quotient et le reste d'une division entière. Il est aisé, dans ce cas, de trouver le développement en fraction continue de n'importe quel rationnel.

La détermination de l'écriture en fractions continues de $\frac{31416}{10000}$ suggère l'approximation de π. On peut facilement aller plus loin.

Remarque : Avec une calculatrice programmable, il est assez simple de créer un programme permettant de retrouver l'écriture sous forme de fractions continues.

entrée de a et b
tant que $b \neq 0$
calcul et affichage du quotient entier q de a par b
calcul du reste r de la division entière de a par b
$a \leftarrow b$; $b \leftarrow r$.

V.12. La somme des carrés des chiffres d'un nombre

3 et 7 sont les chiffres du nombre 37.

Le nombre 9 + 49 est bien la somme des carrés des chiffres du nombre 37 puisque $3^2 = 9$ et $7^2 = 49$.

1. a) Observe cette "suite" de nombres. Vérifiez que chaque nombre est bien la somme des carrés des chiffres du nombre qui le précède.

$$37 \longrightarrow 58 \longrightarrow 89 \longrightarrow \bullet\bullet\bullet$$

b) Recopiez et complètez cette suite en calculant les 10 nombres qui suivent. Si vous n'avez pas fait d'erreurs de calcul, vous devez, au bout d'un moment, retrouver les mêmes nombres. Notez votre remarque.

c) Disposez cette suite en forme de "bracelet" !!!

2. Calculez de la même façon les nombres de la suite :

$$7 \longrightarrow 49 \longrightarrow \bullet\bullet\bullet$$

Que remarquez-vous au bout d'un moment ?

3. Essayez de compléter les suites qui commencent par 2, par 3, ..., par 9. On va retrouver certaines suites. Cherchez à adopter une présentation qui évite d'écrire plusieurs fois la même suite.

4. Comparez la suite que vous obtenez à partir de 37 et celle que vous obtenez à partir de 73. Comparez les suites obtenues à partir de 7 et de 70. Quelle remarque pouvez-vous faire ? Complètez la présentation réalisée dans la question précédente en utilisant cette dernière remarque.

5. Il est possible de représenter chaque suite comportant tous les nombres compris entre 1 et 100 en réalisant deux regroupements seulement. En répartissant le travail à plusieurs, cherchez à placer tous les nombres compris entre 1 et 100.

6. Vous avez remarqué que, quelquefois, la somme des carrés des chiffres d'un nombre était supérieure à ce nombre. Cependant, les sommes obtenues pour un nombre de chiffres donné ne peuvent dépasser un maximum.

Trouvez ce maximum pour les nombres de deux chiffres ; pour les nombres de trois chiffres.

Pensez-vous que si vous cherchez les suites à partir d'un nombre de trois chiffres, vous retomberez, à un moment ou à un autre, sur les mêmes nombres. Justifiez votre réponse.

Commentaires

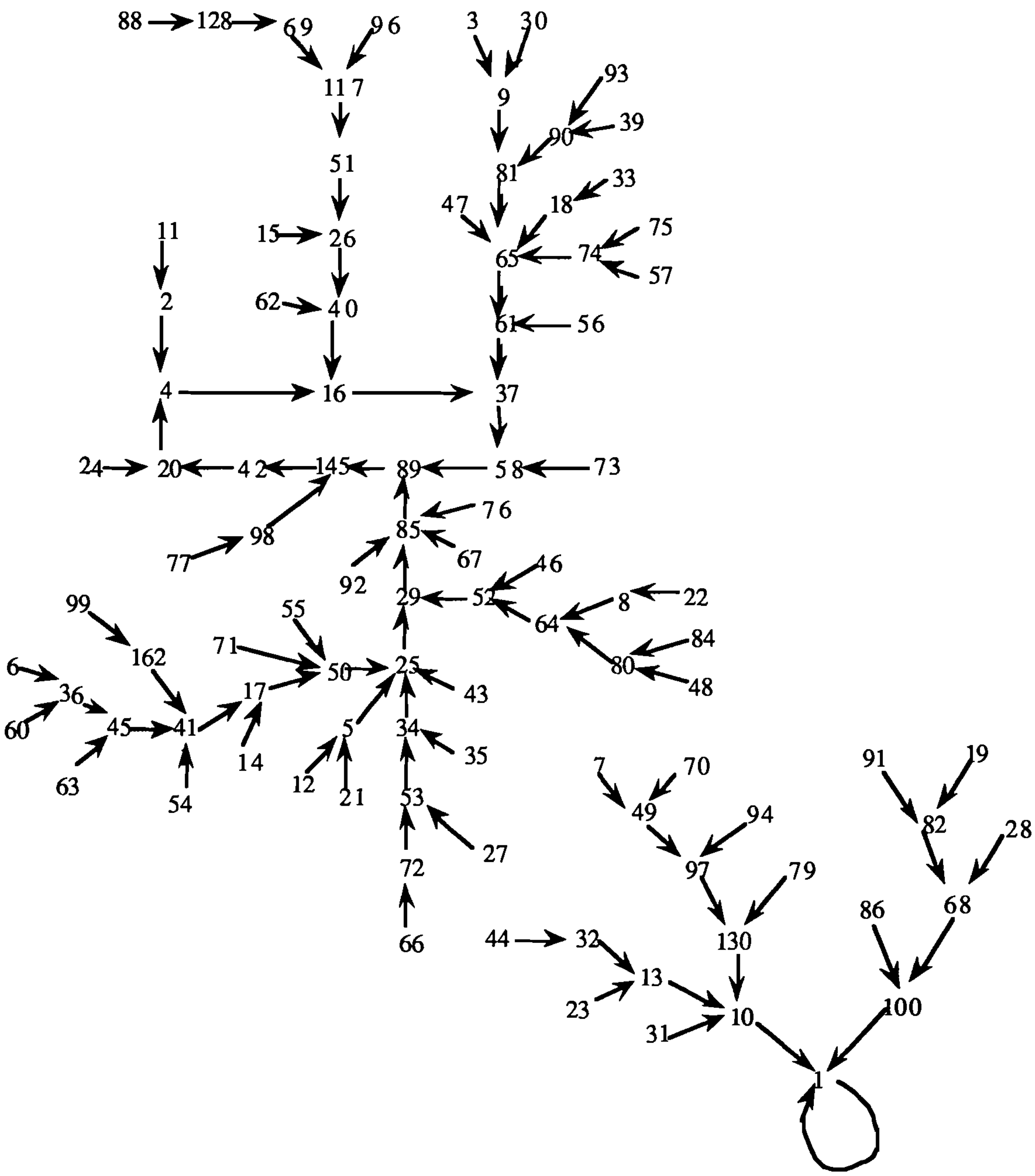
Cette activité peut être proposée dès la classe de 6e. Mais dans ce cas, il faudra peut-être supprimer la dernière question.

Il nous parait intéressant de bien préciser au départ que l'on peut s'aider de la calculatrice parce que justement, on se rend compte assez vite, qu'il est plus facile de mémoriser le résultat des carrés des nombres de 1 à 9 pour éviter les erreurs et une certaine perte de temps.

Il est important que le travail se fasse en groupe pour confronter les idées de chacun et pour pouvoir répartir le travail. Il faudra veiller à ce que les élèves adoptent des dispositions commodes.

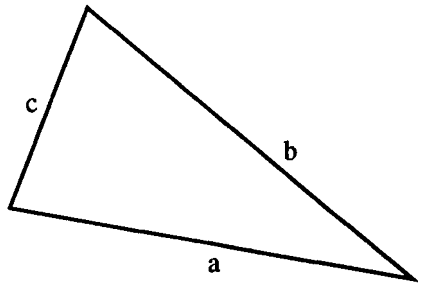
En remarquant que les sommes obtenues pour un nombre de deux chiffres sont inférieures à 2×9^2 soit 162 puis que celles obtenues pour un nombre de trois chiffres sont inférieures à 3×9^2 soit 243, on peut être sûr que, en calculant un certain nombre de termes d'une suite, on "bouclera".

Voici une représentation des suites obtenues à partir des nombres inférieurs à 100 :



V.13. DES FORMULES POUR L'AIRE D'UN TRIANGLE*

Soit un triangle de côtés a, b et c.



L'aire S de ce triangle est donnée par la formule :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^4 + b^4 + c^4\right)}$$

Si p désigne le périmètre de ce triangle, on a aussi :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{p\,(p - 2a)\,(p - 2b)\,(p - 2c)}$$

1°) a) Calculez l'aire du triangle de côtés a = 5 , b = 6 et c = 7 à l'aide de la 1ère formule.

b) Calculez le périmètre puis l'aire du même triangle à l'aide de la 2ième formule.

2°) Soit le triangle de côtés a = 5, b = 4 et c = 3.

a) Pourquoi pouvez-vous être sûr que ce triangle est rectangle ?

b) Quelle est l'aire de ce triangle ?

c) Vérifiez que vous trouvez bien la même aire avec les deux formules précédentes.

3°) Dans le cas où le triangle est équilatéral, c'est à dire si a = b = c,

a) Calculez la hauteur du triangle en fonction du côté a. Quelle est l'aire du triangle ?

b) Simplifiez l'écriture des deux formules en tenant compte des égalités : a = b = c.

Ces formules "classiques" du calcul de l'aire d'un triangle sont un prétexte pour approcher la maîtrise des calculs avec les machines.

Généralement, avec une calculatrice courante, les deux formules donnent le même résultat (leur différence est nulle) !

Attention, avec certains modèles, suivant l'organisation adoptée pour le calcul, on peut aboutir à un dépassement de capacité. Cela nous parait intéressant que l'élève soit confronté aux limites de calculs et soit amené à réfléchir à d'autres organisations possibles.

---

* d'après 2e collection Pythagore, 1994, éditions Hatier

En classe de 3^e ou de 2^e, on peut prolonger cette activité avec un travail sur les expressions algébriques : en développant les deux expressions, il est possible à ce niveau, de montrer l'équivalence de ces deux formules. Il est aussi possible de montrer que les deux formules conduisent à $S = \frac{1}{2}$ b c dans le cas d'un triangle rectangle si on tient compte de l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$.

VI. Conclusion

Tous ces exemples d'activités peuvent être évidemment développés et multipliés.

En guise de conclusion, j'insisterai sur la nécessité d'aider les élèves à acquérir et à entretenir une certaine maîtrise des calculatrices sans perdre de vue qu'ils ne peuvent y parvenir seuls. Cette aide ne doit pas se limiter au collège ; elle doit avoir un prolongement en lycée aussi bien au niveau du calcul que de l'utilisation des calculatrices graphiques[1]. Il manque ici un développement d'activités plus spécifiques montrant les limites de l'utilisation des nombres décimaux, celles de la représentation des nombres dans une calculatrice et plus généralement certaines limites des calculatrices. Il nous a paru nécessaire de donner l'occasion d'une réflexion sur la perception qu'ont les élèves des ensembles de nombres, sujet qui devrait faire l'objet d'un prochain article dans la revue[2].

Bibliographie

BONIN M.(1990). L'informatique en mathématiques au lycée : quelques pistes. *IREM de Grenoble.*

BOUVIER J.P., OLIVIER Y.(1994). Calculatrices en Mathématiques. *CRDP de Poitou-Charentes.*

DIEVAL A., LEULLIER J.L., WARIN S. (1990). La calculatrice au collège, *IREM de Picardie.*

ENGEL A. (1979). *Mathématiques d'un point de vue algorithmique.* Cédic.

KUNTZMANN J. (1987). Calcul mental de 10 à 90 ans. *IREM de Grenoble.*

LOZI R. Activités avec la Galaxy 9, Cycle des approfondissements. *Texas Instruments et Hachette Écoles.*

ORIOL J.C., PAINCHAULT J., ROBERT C. (1977, 1978, 1981). Matchinettes 1, 2 et 3. *IREM de Grenoble.*

---

1 voir par exemple Trouche L. (1994) Calculatrices graphiques : la grande illusion *in Repères n°14*

2 voir Isabelle Jacquier (1994) *Quelles connaissances, quelle maîtrise des nombres.* Mémoire professionnel PLC2, I.U.F.M. de Grenoble

THEPOT E., VERPLANCKE A.(1988). Calculettes en 6^e 5^e : Estimations et stratégies sur différents types de machines. *IREM d'Orléans.*

VAGOST D., VERDIER J. (1991). *Mathématiques au lycée avec la TI-82.* Dunod.

Le lecteur trouvera aussi dans les documents et revues suivants de nombreuses informations à propos des calculatrices

• Brochure APMEP n°31. (1980). Calculatrices 4 opérations.
• Fiches d'Activités pédagogiques avec la Galaxy 9, (1991), Texas Instruments.
• Collectif CIAP Univ. J. Fourrier de Grenoble. (1991). Fiches d'Activités pédagogiques avec la Galaxy 40 UJF. Texas Instruments.
• Collectif (1992). Modules 2^{de}. "plus fort que ma calculatrice !". IREM de Strasbourg.
• Groupe IREM (1982). Activithèmes pour la classe de 2^{de}. IREM de Grenoble.
• (1983) compte rendu de séances d'utilisation des calculatrices dans les classes de 1^{er} cycle. IREM de Lorraine.
• Revue Tangente. Éditions Archimède.
• Revue Hypercube Éditions Archimède.
• Revue 3'33 ; Casio Noblet.
• Revue Hypothèses Texas Instruments.
• Suivi scientifique $6^{ème}$ (85-86), $5^{ème}$ (86-87), $4^{ème}$ (87-88), $3^{ème}$ (88-89). Bulletin Inter-Irem. édités par l'IREM de Lyon.