MATHÉMATIQUES ET FORMATION*

Jean-Pierre KAHANE
Université Paris 11 - Orsay
Département de mathématiques

Très brièvement, cet article abordera une immense question : les besoins de formation dans le monde actuel et futur. Puis il se centrera sur les mathématiques : leur image, leur réalité comme science, les tendances qui se font jour dans la recherche et dans leur enseignement, quelques contradictions et paradoxes, exigences et enjeux.

Les besoins de formation

Pour les besoins de formation, une excellente référence est la conférence d'Antoine Casanova au colloque d'Orsay de juin 1993, intitulée «Enjeux et perspectives de l'éducation 1793-1993»[1]. La vue de l'historien éclaire bien les enjeux du présent, et je m'en inspirerai librement.

Les conventionnels, en matière d'éducation, avaient l'héritage de Rousseau, l'apport des encyclopédistes, la contribution de Condorcret. La révolution créait des possibilités et des besoins nouveaux. La première exigence était d'avoir des citoyens éclairés : sans éducation, pas de véritable citoyenneté ; sans éducation, péril pour la République. Une idée de Condorcet surprend par son ambition : il faut que l'éducation rende le citoyen capable d'*anticipation*[2]. Nous y reviendrons. La seconde exigence

---

* Ce texte est la mise en forme d'une conférence donnée le 9 décembre 1993 à l'hôtel du département du Val-de-Marne, à Créteil : il a été publié dans le n° 302 de *la pensée* (Avril-mai-juin 1995). Il est repris dans notre revue avec l'autorisation de l'auteur et des responsables de la revue. Une première version est parue dans le *Journal de mathématique des élèves de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon*, vol. n° 2, octobre 1994.

1 Antoine Casanova, *Enjeux et perspectives de l'éducation* 1793-1993, colloque de Campus 89, «L'enseignement : les grands idéaux des révolutionnaires et leur confrontation avec la société contemporaine et son devenir» (Orsay, 2-5 juin 1993), pp. 91-114.

2 «Vous devez à la nation française une instruction au niveau de l'esprit du XVIII siècle, de cette philosophie qui, en éclairant la génération contemporaine, présage, prépare et devance déjà la raison supérieure à laquelle les progrès nécessaires du genre humain appellent les générations futures. Tels ont été nos principes et c'est d'après cette philosophie libre de toutes les chaînes, affranchie de toute autorité, de toute habitude ancienne, que nous avons choisi et classé les objets de l'instruction

était d'avoir des travailleurs instruits, instruits dans la nouveauté : la Révolution crée le système métrique et, immédiatement, l'enseignement du système métrique. En démocratie, comme disait Montesquieu, «le peuple, qui a la souveraine puissance, doit faire par lui-même tout ce qu'il peut bien faire»[3]. L'enseignement doit lui en donner les moyens.

La Révolution avait brusquement élargi l'horizon de chacun. Cependant, la vie sociale et le travail avaient des cadres assez fixes et étroits : la famille, le village, le quartier. Tel était l'environnement des enfants. Au siècle suivant, l'enfant de Baudelaire rêvait devant les cartes et les estampes. Aujourd'hui, les enfants passent en un instant de leur chambre à des images télévisées de pays lointains et d'exploration spatiale. Leur environnement n'est plus seulement la famille et le quartier : c'est la planète, l'univers et aussi les microbes, le sida, le microscopique et l'invisible. Les changements d'échelle dans l'espace et le temps, les figures et les nombres sont constants. Comment s'y retrouver et comment anticiper ?

Plus évidemment encore, le travail a changé. Les outils actuels exigent moins de force et d'habilité, mais beaucoup d'attention, de vigilance, de responsabilité. Ce qu'ils permettent, et permettront, de développer dans l'avenir est encore inédit. Mais il paraît clair que les aptitudes symboliques, cognitives, imaginatives des hommes seront toujours plus sollicitées. Pour bien faire tout ce qu'il peut bien faire, que ce soit dans le travail ou dans la cité, le peuple d'aujourd'hui a besoin d'une formation bien plus large et plus variée. C'est une condition nécessaire pour tirer parti des informations et des nouvelles technologies.

Les sciences découvrent sans cesse de nouveaux rivages, les technologies sont toujours plus flexibles dans leurs applications et dans leur conception même. L'ambition de la formation générale, initiale comme continue, peut être de permettre à tous les hommes d'être des acteurs dans ces mouvements : de se situer, de comprendre, de prévoir, de se concerter pour agir.

Est-ce que les mathématiques participent à cette ambition ? Ce sera le thème à explorer.

Les mathématiques et leur image

Chacun a un rapport aux mathématiques, une image personnelle des mathématiques : dégoût ou plaisir, souvenir d'échec, admiration, inquiétude, haine, etc. De plus, le rôle qu'elles jouent dans la formation est dénoncé avec force et de divers bords. Des physiciens comme Hubert Curien[4] et Pierre-Gilles de Gennes[5] ont dénoncé leur tyrannie. Les élèves et parents d'élèves la considèrent comme la matière à sélectionner par excellence. Des questions sont posées : est-ce bien utile ? à quoi ça

---

publique» (rapport de Condorcet à l'Assemblée législative, avril 1792, cité par Antoine Casanova, e.c. p. 100).

3 Charles de Secondat Montesquieu, *L'Esprit des lois*, première partie, II.2 : Du gouvernement et des lois relatives à la démocratie : œuvres complètes, Le Seuil, 1964, p. 533.

4 *Nice-Matin*

5 Pierre-Gilles de Gennes, *Les Objets fragiles*, Plon, 1994.

sert ? Des affirmations font écho à l'opposition faite par Pascal entre esprit de géométrie et esprit de finesse : la mathématique est vieille, aride, morte.

Le rôle sélectif mérite réflexion. Il n'est nullement scandaleux que les mathématiciens sélectionnent les mathématiciens, comme le font les pianistes, les footballeurs et beaucoup de corps de métiers. Les mathématiques jouent un rôle contestable et contesté quand elles servent à sélectionner les médecins ou les architectes ; mais le phénomène n'est pas limité aux mathématiques ; le français joue aussi ce rôle sélectif en soulevant beaucoup moins de passion. Le plus grave me paraît être, non la sélection, mais l'élimination, l'exclusion. Quand l'élève X est déclaré inapte aux mathématiques, c'est la porte fermée, généralement sans appel. La révolte serait salutaire mais elle est rare. C'est le plus souvent la première expérience pour X de l'exclusion acceptée.

Je compléterai cette remarque par deux données. La première concerne l'enseignement supérieur. La plus grand partie des services d'enseignement des enseignants-chercheurs en mathématiques est effectuée auprès d'étudiants qui, non seulement ne se destinent pas aux mathématiques, mais qui ont été considérés, et se sont considérés eux-mêmes, comme inaptes. Or, motivés par leur discipline majeure, trouvant des portes d'entrée qu'ils ne soupçonnaient pas, il arrive très souvent que ces étudiants travaillent bien, réussissent, et même trouvent plaisir aux mathématiques qu'ils découvrent.

La seconde concerne les élèves des collèges et lycées. A l'imitation de la compétition mathématique australienne, qui date de douze ans et qui est une grande manifestation populaire (500 000 candidats pour 15 millions d'habitants), une compétition du même type s'est créée en France, sous le nom de *Kangourou*[6]. Elle en est à la quatrième année et a dépassé, cette année, les 500 000 candidats, sur la base du volontariat aussi bien pour les candidats que pour les organisateurs. Cela semble être la preuve qu'une compétition mathématique peut donner du plaisir.

Leur spécificité

Après ces remarques, je voudrais évoquer un aspect des mathématiques mal connu : la science mathématique comme science vivante, son mouvement, sa spécificité, ses tendances.

Il paraît actuellement, recensés par la revue de référence américaine *Mathematical Reviews*, plus de 100 000 articles de recherche mathématique par an. Il y a 40 ans, c'était 2 500. Le rythme de l'accroissement, exponentiel, dépasse le doublement tous les 10 ans. Cette explosion de papier – que l'informatique, bien employée, peut relayer – s'accompagne de grands changements dans les sujets traités et les méthodes. Des sujets somnolents sont soudain réactivés et conquièrent d'autres sciences (c'est le cas des fractales), d'autres se créent à partir de pratiques actuelles (codes, automates, langages), des problèmes anciens sont résolus, attestant l'efficacité des méthodes nouvelles (le «théorème de Fermat»).

[6] 3615 Kang sur Minitel.

Cependant, comparées à d'autres sciences, il n'est pas immédiat d'expliquer de quoi les mathématiques s'occupent. On dit souvent que c'est à cause de l'abstraction des concepts mathématiques. Est-ce bien le cas ? Un quark, que personne n'a jamais vu, est bien aussi abstrait qu'un triangle. Mais le quark s'applique, remarquablement bien, à *une* réalité du monde physique : les particules élémentaires. Le triangle, lui, intervient un peu partout : la reconstitution des champs inondés par le Nil dans l'Égypte ancienne, le percement d'un tunnel à travers l'île de Samos dans l'Antiquité grecque, la triangulation géodésique quand, à l'époque de la Révolution française, on mesurait le méridien terrestre. La méditation sur le triangle et la somme de ses angles est à la base des géométries non-euclidiennes, qui à leur tour fondent la relativité générale, et on pourrait continuer ainsi pendant longtemps. Ce que les mathématiciens appellent un groupe, une variété, une probabilité, est extrêmement général et s'applique à une foule d'objets d'autres sciences ou d'autres pratiques. Ainsi, ce qui apparaît spécifique aux mathématiques, c'est la non-spécificité de leur champ d'application. L'histoire abonde en concepts mathématiques issus d'une science ou d'une pratique et fécondant un champ tout à fait différent. L'efficacité surprenante des concepts mathématiques (le physicien Wigner parle de l'efficacité *déraisonnable* des mathématiques dans les sciences de la nature)[7] est liée, certes, à leur abstraction, mais beaucoup plus à leur généralité. Les mathématiques sont peuplées de sortes de fantômes du monde réel. Mais, dans ce monde de fantômes, elles classent, rassemblent, découvrent des rapport nouveaux, élaborent des rapports de dépendance, élaguent, simplifient, créent au besoin des formes nouvelles. Il n'est pas tellement étonnant, au fond, que la pensée humaine, opérant sur des formes idéalistes de la réalité physique, découvre des formes de la réalité physique non encore idéalisées.

A côté de la généralité, un autre trait spécifique des concepts mathématiques est leur permanence. Le triangle d'Euclide est toujours notre triangle. Arrivés à un certain degré de pureté, et c'est parfois long, les concepts sont fixés, immuables, au point qu'ils semblent appartenir à un monde mathématique existant de toute éternité : c'est l'illusion platonicienne. Ce qui est vrai, c'est que les mathématiques sont beaucoup plus liées à leur histoire qu'aucune autre discipline scientifique. Ce n'est pas seulement parce qu'elles sont anciennes, mais c'est surtout parce que, pour elles, le passé n'est jamais mort. Aujourd'hui, les outils informatiques donnent des moyens nouveaux pour revisiter les mathématiques des siècles passés, et on voit se réactiver des sujets anciens, comme je l'ai déjà dit. Les articles mathématiques comportent souvent des références anciennes, les œuvres des grands mathématiciens figurent dans les bibliothèques, le patrimoine est une ressource vivante.

Enfin, le trait spécifique le plus apparent des mathématiques est leur lien à l'enseignement. C'est vrai au cours de l'histoire. Les *Éléments d'Euclide*[8], les cours de Cauchy à l'Ecole polytechnique[9], le traité de Bourbaki[10], sont à la fois des mises au point, des mises en forme, des synthèses, des ouvrages d'enseignement. C'est plus

---

[7] Eugène Wigner, «The Unreasonable Effectivness of Mathematics» in *The Natural Sciences*, Comment in Pure an Applied Mathematics, 13 (1980), pp. 1-14.

[8] Euclide, *Les Eléments.*

[9] Augustin Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique.*

[10] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématiques.* Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I - Théorie des ensembles. Livre II - Algèbre. Livre III - Topologie générale. Livre IV - Fonctions d'une variable réelle..., Hermann, Paris, à partir de 1940.

évident encore si l'on jette un coup d'œil sur le monde d'aujourd'hui : quelques dizaines de milliers de mathématiciens participant à la recherche, des dizaines de millions d'enseignants, des milliards d'élèves. Aucun autre champ du savoir n'entretient avec la communauté des hommes une relation aussi étendue. L'enseignement des mathématiques est omniprésent, et il nous faudra examiner quelques aspects de sa relation avec la science qu'il est censé transmettre.

Leurs tendances

Auparavant, il nous faudra compléter le tableau par l'évocation des grandes tendances de la recherche mathématique au cours du siècle.

Contrairement à ce qu'on dit parfois, le lien avec la physique et avec les applications ne s'est jamais rompu. Cependant, il est vrai que la tendance dominante des années cinquante était une réorganisation de l'édifice mathématique sur la base de la théorie des ensembles et des structures. C'était la grande époque des *structures* dans toutes les sciences : structures des langues, structures des sociétés, structures de la matière, structures de la pensée. L'ambition était considérable, la vision totalisante. Les mathématiques modernes étaient portées par l'air du temps. C'était la science des structures par excellence. L'unité de la mathématique résidait dans son fondement, le socle bien établi de la théorie des ensembles, et Bourbaki dessinait les branches maîtresses.

Les choses ont bien changé. Dès les années soixante, la théorie des ensembles apparaissait multiforme et rejoignait les autres théories mathématiques dans la variété de ses présentations et de ses applications. Par contre, entre des branches éloignées se tissaient des relations inattendues. L'unité était faite de ces liens entre les branches et les rameaux, ces interactions nouvelles et imprévues. Actuellement, les maîtres mots sont *interactions* et *modèles*[11]. Les mathématiques interagissent entre elles, et surtout avec les autres sciences, les technologies, les pratiques ; elles intéressent la finance et le militaire. On trouve des modèles dans toutes les sciences, à commencer par l'économie. Grâce aux ordinateurs, les modèles permettent des simulations plus rapides que les observations et expérimentations, des représentations commodes, des prévisions à court terme. Les mathématiques, pour beaucoup, sont devenues la science des modèles. En même temps qu'une efficacité nouvelle, cette tendance aux modèles va de pair avec un rétrécissement des perspectives, des objectifs à court terme, des financements instables, une précarisation des métiers de la recherche.

Une nouvelle tendance me semble se dessiner. Le goût revient de la réflexion et du débat sur la place des mathématiques dans la société. Le premier congrès européen de mathématiques, en 1992 à Paris, consacrait une large place à ce thème[12]. Il s'agit naturellement de l'enseignement, de la vulgarisation, des rapports avec le grand public, de la situation des jeunes filles et des femmes par rapport aux mathématiques, de

---

[11] Rapports de conjoncture du Comité national de la recherche scientifique, 1989 (CNRS 1990), 1992 (CNRS 1993).

[12] Congrès européen de mathématiques - European Mathematical Congress, Paris, juillet 1992, Proceedings, Birkhauser 1994, vol. III.

l'industrie et des services, des autres sciences, de l'histoire, de l'épistémologie. La Société Mathématique de France a décidé en 1993 de deux nouvelles publications : l'une en histoire des mathématiques, l'autre, panoramas et synthèses, pour fournir au public mathématique les moyens de s'informer et de se cultiver. Beaucoup d'ouvrages, quelquefois excellents (je pense d'abord au livre de Mauduit et Tchamitchian, *Mathématiques*[13]), donnent à un public assez large l'accès aux mathématiques telles qu'elles se font. Le débat philosophique reprend sur la nature des objets mathématiques, sur le prévisible et l'imprévisible, sur invention et découverte, sur ordre et chaos. Il est encore souvent naïf, mais c'est un nouveau champ d'interaction qui s'ouvre, et l'élaboration d'une nouvelle pensée théorique.

Leur enseignement ; besoins et tendances

L'enseignement des mathématiques se trouve au carrefour d'exigences contradictoires. Il doit aller au-devant des besoins des individus et des sociétés, qui sont pour une bonne part inconnus et, pour une autre, dévoyés par une demande sociale qui exprime les intérêts des puissants et des nantis. Il doit viser à développer la capacité d'anticipation dont parlait Condorcet, alors que le futur est imprévisible. Il doit apporter une formation toujours plus large et plus variée, alors que les éléments semblent déjà si difficiles à acquérir. Il doit s'ouvrir à la nouveauté de la science tout en assurant l'acquisition des notions permanentes. Il doit séduire et motiver tout en exerçant les élèves à la dure discipline de la rigueur.

On lui reproche parfois son inertie. Le reproche est injustifié. L'introduction des mathématiques modernes, il y a trente ans, a été une erreur scientifique et pédagogique, mais aussi un formidable mouvement pour bousculer les habitudes et faire du neuf ; replacé dans l'époque, c'était la vision des structures - Piaget et Bourbaki s'épaulant mutuellement - mise en œuvre dans l'enseignement. Aujourd'hui, d'autres tendances se font jour. En voici trois qui me paraissent très prometteuses.

D'abord, les calculettes et les ordinateurs sont partout. Les calculs devenant faciles, l'important n'est plus de faire un calcul, mais de savoir quel calcul faire ; c'est une incitation au raisonnement, la possibilité de travailler sur des données réelles, de brancher les mathématiques scolaires sur le traitement des données. Les fautes doivent être repérées ; c'est une incitation au calcul mental, à l'estimation des ordres de grandeurs. A un niveau un peu plus élevé, il faut écrire des programmes, définir des algorithmes, comparer des algorithmes. Un algorithme est un procédé systématique pour la résolution d'une classe de problèmes. La notion est ancienne (on parle de l'algorithme d'Euclide pour le calcul des plus grands communs diviseurs) ; le terme est un hommage à l'algébriste arabe al-Khwarizmi ; mais la modernité tient aux ordinateurs, aux automates, aux robots. Les algorithmes sont le moyen de gouverner les ordinateurs, et, du coup, ils apparaissent aussi comme un bon moyen de gouverner notre propre pensée.

---

[13] Christian Mauduit et Philippe Tchamitchian, *Mathématiques*, collection «La Science et les Hommes», dirigée par Paul Brouzeng, Messidor La Farandole, 1990).

La géométrie est partout également. A l'origine, c'est une mise en forme de notre vision de la Terre et du Monde. Aujourd'hui nous voyons la Terre, le Monde, l'Univers à travers les géométries. La physique, la mécanique produisent et exploitent sans cesse de nouveaux objets géométriques. L'intuition géométrique, l'art de raisonner sur des figures de la pensée, devient une exigence universelle. Les objets géométriques les plus classiques (le triangle, le cercle) sont riches de propriétés merveilleuses. Les bulles de savon, les polyèdres, les anfractuosités naturelles sont une mine de géométries nouvelles. Les changements d'échelles, si constants dans le monde des enfants, se réalisent en géométrie comme une sorte de zoom intellectuel, un va-et-vient entre le global et le local qui découvre les régularités cachées dans le très petit et le très grand. Qui pourrait dire que la géométrie n'est pas actuelle ?

L'évaluation des chances et des risques, les estimations et les contrôles sur échantillons, les statistiques, font aussi partie de notre univers quotidien. Les probabilités, dont la théorie est relativement récente, s'imposent chaque fois qu'il est question de prévision, de risque, d'assurance. Les lois du hasard montrent comment l'ordre peut jaillir du chaos. Le passage d'une activité humaine - serait-ce un jeu du hasard - à sa modélisation probabiliste est un excellent exercice de l'esprit critique. Laplace jugeait déjà nécessaire, il y a deux siècles, que les probabilités fassent l'objet d'un enseignement[14]. Aujourd'hui, l'apprentissage des probabilités par *tous* les jeunes gens me paraît à l'ordre du jour.

Il n'est sans doute pas nécessaire d'insister, et d'aller chercher d'autres exemples en théorie des nombres, en algèbre, en analyse, en logique. Les mathématiques à enseigner ne sont pas un luxe de l'esprit, elles sont en prise avec les besoins fondamentaux de la formation tels que nous les avons définis tout à l'heure.

Contradictions

J'ai parlé d'exigences contradictoires. On peut en effet pointer des contradictions majeures, qui me paraissent à la source des difficultés que rencontrent les enseignants et les élèves.

---

[14] Le premier à demander un enseignement de probabilités, au titre de la *mathématique sociale*, a été Condorcet. Laplace a donné le premier cours de probabilités à l'Ecole normale de l'an III. Cf. Pierre Crépel, *De Condorcet à Arago : l'enseignement des probabilités en France de 1786 à 1830*, SABIX (bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'Ecole polytechnique), n° 4, mai 1989, pp. 29-55. Voici le programme de Laplace en 1795 : «Enfin, on donnera les principes de la théorie des probabilités. Dans un temps où tous les citoyens sont appelés à décider du sort de leurs semblables, il leur importe de connaître une science qui fait apprécier, aussi exactement qu'il est possible, la probabilité des témoignages, et celle qui résulte des circonstances dont les faits sont accompagnés : il importe surtout de leur apprendre à se défier des aperçus même les plus vraisemblables ; et rien n'est plus propre à cet objet que la théorie des probabilités, dont souvent les résultats rigoureux sont contraires à ces aperçus. D'ailleurs, les nombreuses applications de cette théorie, aux naissances, aux mortalités, aux élections et aux assurances, applications qu'il est avantageux de perfectionner et d'étendre à d'autres objets, la rendent une des parties les plus utiles des connaissances humaines». Cf. J. Dhombres (dir.), *L'Ecole normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, Paris, Dunod, 1992, p. 47.

Première contradiction. On doit tout enseigner, et on ne peut pas tout apprendre. On doit tout enseigner, c'est-à-dire ne rien perdre de la substance des 100 000 articles qui se publient chaque année. Si l'on accepte en principe que des parties substantielles de la production mathématique échappent à toute assimilation sociale, on consent à la situation annoncée prophétiquement par Paul Langevin en 1945 pour l'ensemble de la recherche scientifique et de la société : faute d'un enseignement scientifique assez développé, une avant-garde perdue, une arrière-garde traînante[15]. On ne peut pas tout apprendre, c'est évident. La contradiction, au premier regard, n'est qu'apparente : ce ne sont pas les mêmes étudiants qui vont apprendre toutes les connaissances de pointe. Encore faut-il que la croissance des effectifs étudiants permette la diversification des cursus, et qu'un nombre suffisant arrive au niveau du troisième cycle dans toutes les branches actives. Cela impose, en principe, que les effectifs étudiants croissent à un rythme comparable à la production scientifique, et, en mathématiques, nous en sommes loin. Au second regard, la contradiction demeure : à moins de consentir à un éclatement complet des compétences, il faut assurer à tous une formation reposant sur des acquis relativement récents. Heureusement, la science ne procède pas seulement par accumulation, mais aussi par refonte et simplification. La formule de résolution de l'équation du second degré exprime en une ligne l'essentiel de gros livres arabes du Moyen Age. L'axiomatique de Kolmogorov, en quelques lignes, les règles fondamentales sur lesquelles se base la théorie moderne des probabilités[16]. Les groupes, en quelques lignes aussi, les traits communs à une foule d'objets mathématiques dont les théories s'étaient développées séparément. Un choix s'impose selon les orientations : mais la contradiction ne conduit pas nécessairement à l'éclatement.

La deuxième contradiction, c'est que, si l'on commence par ce qui est le plus simple, le plus général, le plus puissant, on tire parti de la science, mais on trahit sa démarche. Historiquement, le simple est l'aboutissement d'un long processus de distillation, et chaque définition mathématique est en élixir. En prenant la définition comme base, on peut marcher d'un pas sûr et rapide, mais cela n'a rien à voir avec la marche de la découverte. Il en est de même en toute science : on ne peut enseigner la science qu'en trahissant la démarche scientifique. C'est ce qu'on appelle la transposition didactique. On ne peut pas y renoncer (qui recommanderait de ne pas dire aux enfants que la Terre tourne autour du Soleil ?). Mais, pour éviter que la science ne se transforme en dogme, il faut aller assez loin pour que la richesse de la théorie rejoigne l'expérience commune et la variété des connaissances partielles qui, historiquement, lui ont donné naissance. Il faut aussi que, sur des sujets bien choisis, les élèves aient l'occasion d'apprécier l'immense effort qui a abouti aux notions considérées aujourd'hui comme simples et fondamentales.

La troisième contradiction, c'est qu'en mathématiques ce qui est le plus simple, le plus puissant, le plus général, n'est pas accessible d'emblée. On ne peut pas introduire la notion de groupe, malgré sa simplicité formelle, avant que les élèves en aient quelques exemples significatifs. On ne peut pas, bien sûr, introduire les nombres

---

[15] Paul Langevin, «La Pensée et l'action», conférence pour l'Union française universitaire, mai 1946. La conclusion de ce texte est au positif : il faut un enseignement scientifique et un développement social sans avant-garde perdue ni arrière-garde traînante.

[16] A.N. Kolomogorov (Kolmogoroff), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, Springer, 1933.

complexes avant les nombres réels, ni les nombres réels (qui comprennent les nombres négatifs) avant les nombres positifs. Ainsi, à chaque niveau de l'apprentissage des mathématiques, il y a tout un système de notions acquises, de représentations, de processus mentaux auxquels le nouveau se confronte. Au début, cela crée des blocages, des fautes, un manque de confiance en soi-même et dans les nouveaux outils de pensée. Il y a deux siècles, Lazare Carnot, qui était bon mathématicien, refusait pour cette raison qu'on enseigne les nombres négatifs : ils sont la source de trop de fautes, et Carnot refusait même qu'on les appelle des nombres[17]. Mais aujourd'hui, nous n'avons pas le choix : les enfants connaissent les thermomètres et les ascenseurs, ils ont besoin du concept de nombre négatif, quoi qu'il en coûte. On peut multiplier les exemples : les calculettes, les informations télévisées, les postes de travail imposent un niveau de connaissances inconcevable il y a cinquante ans, qu'on ne peut atteindre que par une difficile et périlleuse ascension en spirale. Les blocages scolaires, en mathématiques, devraient être considérés comme des épisodes aussi naturels qu'une scarlatine ou une entorse. Ils devraient faire l'objet de dépistage, de diagnostic et de soins adaptés.

Jalons pour avancer

Pour amorcer ma conclusion, j'évoquerai un paradoxe de Bertrand Russell et la réponse d'Émile Borel. Russell disait que les mathématiques sont la seule science où l'on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai. Borel répondait que, en mathématiques, on sait toujours exactement de quoi on parle, et on est sûr que ce qu'on dit est vrai. Naturellement, Russell se réfère à la relation des mathématiques au réel, tandis que Borel se réfère à la construction intellectuelle. Dans cette construction, la rigueur est celle des enchaînements : si..., alors... La démonstration est le moyen systématique de passer de l'acquis au nouveau, et elle garantit que, si l'acquis est valable, le nouveau l'est aussi : elle donne donc une certitude conditionnelle. Les démonstrations d'Euclide sont toujours valables, celles de Bourbaki aussi ; c'est le ciment des constructions mathématiques.

C'est aussi un aspect spécifique et majeur du raisonnement mathématique. Certes le raisonnement ne se réduit pas à la preuve, mais la preuve en est la mise en forme, l'ultime mathématisation. Si les mathématiques ne sont pas un catalogue à mémoriser, mais un système coordonné de connaissances, à comprendre, c'est grâce aux démonstrations et au raisonnement hypothético-déductif. Il faut donc s'inquiéter quand, en France, et dans tous les pays du monde, on voit des jeunes gens ayant terminé leurs études sans comprendre ce qu'est un raisonnement mathématique. Fait-on assez, demandait Évariste Galois, pour que le raisonnement devienne une seconde mémoire[18] ? Clairement, aujourd'hui, on ne fait pas assez.

Nous disposons en France d'un atout presque unique au monde. A côté d'une très bonne école mathématique, très liée à toutes les avancées scientifiques dans le monde,

---

[17] Cf. Charles C. Gillepsie et Adolphe P. Youschkevitch, *Lazare Carnot savant*, Prin, Paris, 1979, pp. 141-153 ou les citations de Carnot dans J. Dhombres, dir., *Mathématiques aux cours des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987

[18] Evariste Galois, Sur l'enseignement des sciences, Ecrits et mémoires, édition critique intégrale (R. Bourgne, J.P. Azra), Gauthier-Villars, Paris, 1962, p. 21.

le corps des enseignants de mathématiques des collèges et des lycées est, dans une large proportion, bien formé, compétent et dynamique. J'ai cité l'aventure de *Kangourou*, je pourrais m'étendre sur les rallyes mathématiques, les expositions, les livres, les activités liées à la recherche comme *Math. en jeans*, la foule des initiatives prises dans les classes et les établissements[19]. Face à de nouvelles exigences sociales, cet atout est précieux.

Or de nouvelles exigences se manifestent : c'était l'objet même de cet article. Il faut lever les blocages, multiplier les portes d'entrée vers les mathématiques, montrer les ressorts et les enjeux de la science qui se fait.

Certes les enjeux de la formation des hommes dépassent, et de loin, la formation mathématique. Mais on ne saurait réduire la formation mathématique à une couche d'utilisateurs virtuels. La mathématique est une langue universelle, dont les éléments doivent être connus de tous les hommes ; c'est un sport universel, accessible à tous les enfants ; c'est une science vivante, dont le mouvement, dans ses grandes lignes, doit pouvoir être saisi par tous les citoyens ; c'est la continuation d'une longue histoire, l'annonce d'une histoire future, qui intéresse tous les êtres humains à venir. Elle a sa place, complètement et pour tout le monde, dans la culture de notre temps.

Orsay, le 2 février 1994

[19] Cf. note 12.