Le musée de «petit x»

L'acquisition des entiers relatifs comme ensemble de nombres est un problème important de l'enseignement des mathématiques. Cette importance est notamment soulignée dans l'article d'Alain Duroux que nous publions dans le présent numéro de «petit x» ; il y montre comment la notion de valeur absolue est dépendante de celle de nombre relatif. L'obstacle à cette acquisition constitué par le «nombre-mesure» (cf. ci-dessus p. 55), qui s'oppose à la compréhension du nombre négatif comme un nombre à part entière, n'est pas le seul fait de nos élèves. Ainsi Georges Glaeser montre-t-il dans un article sur l'épistémologie des relatifs (cf. p. 66) la résistance de cet obstacle dans l'histoire des mathématiques.

Le texte que nous présentons ci-dessous en est une bonne illustration. Dans cet ouvrage* du milieu du XIXème siècle les «quantités négatives» obtenues au terme du traitement d'une équation du premier degré ne sont pas reçues comme solutions mais prennent une valeur heuristique : elles avertissent que l'on s'est trompé dans la mise en équation...

Georges MATHESIS
Institut I.M.A.G.

* Les ouvrages présentés dans «petit x» numéros 1 et 2 étaient issus de collections particulières.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES LYCÉES

ET DES CANDIDATS

AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

H. E. TOMBECK

Agrégé des sciences, ancien élève de l'École normale supérieure
Professeur de mathématiques au lycée Fontanes

Coll. I.R.E.M. de Grenoble
16ème édition, 1878

THÉORIE DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

142. On arrive souvent, en appliquant les règles précedemment données pour la résolution des équations, à des expressions de la forme -5, $-\frac{2}{3}$. Ces expressions, appelées des *quantités négatives*, sont formées de quantités arithmétiques que l'on appelle leurs *valeurs absolues*, précédées du signe —. Comme les symboles singuliers que nous avons déjà rencontrés, on les admet dans les calculs, bien qu'elles n'aient aucun sens par elles-mêmes, et elles fournissent à l'algèbre un des plus puissants moyens de généralisation dont elle dispose.

Par opposition aux quantités négatives, les quantités ordinaires ou arithmétiques, prennent le nom de *quantités positives*.

— Nous allons voir d'abord comment les quantités négatives se présentent dans les problèmes ; nous verrons ensuite

quelles règles on leur applique, et quel usage on en fait, en les introduisant dans les calculs.

Usage des quantités négatives dans les problèmes.

143. 1^er^ Exemple. Proposons-nous ce problème, déjà résolu sur d'autres données :

Un père avait 58 *ans en* 1850; *son fils en avait* 30. *A quelle époque l'âge du père a-t-il été double de l'âge du fils?*

L'énoncé ne nous apprend pas si l'époque cherchée est antérieure ou postérieure à 1850. Supposons-la postérieure, et soit x le nombre d'années écoulées depuis 1850 jusqu'à cette époque.

x années après 1850, l'âge du père était $58+x$, l'âge du fils $30+x$, et d'après l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30+x)=58+x. \qquad [a]$$

En résolvant cette équation, nous trouvons successivement :

$$60+2x=58+x,$$
$$2x-x=58-60,$$
$$x=58-58-2,$$
$$x=-2.$$

Ce résultat privé de sens nous apprend, non pas que le problème proposé est impossible, mais bien que nous avons eu tort de supposer l'époque inconnue postérieure à 1850.

Supposons-la donc antérieure, et soit x' le nombre d'années qui la séparent de 1850. A cette époque, l'âge du père était $58-x'$, l'âge du fils $30-x'$, et en vertu de l'énoncé, l'on doit avoir :

$$2(30-x')=58-x'. \qquad [b]$$

Résolvant cette équation, on trouve successivement :

$$60-2x'=58-x',$$
$$60-58=2x'-x',$$
$$x'=2.$$

Ainsi l'époque cherchée est arrivée deux ans avant 1850.

— Nous pouvons tirer de ce qui précède cette première conséquence :

Quand l'inconnue d'un problème est susceptible d'être comptée en deux sens, si, en résolvant le problème, on arrive à une quantité négative, on est averti par là, au moins en général, qu'on doit changer le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation.

144. Nous pouvons observer de plus que la vraie solution $x'=2$, du problème précédent, n'est autre chose que la quantité négative trouvée en premier lieu, prise en valeur absolue. Or ce n'est pas par hasard que ce fait se présente, et il devait nécessairement en être ainsi.

Pour le faire voir, nous remarquerons d'abord que la quantité négative -2, est solution de l'équation [a] qui l'a fournie, c'est-à-dire qu'en remplaçant x par -2 dans cette équation [a], on obtiendra une égalité vérifiée, pourvu que l'on convienne d'appliquer à cette quantité négative -2, les mêmes règles de calcul qu'aux termes soustractifs des polynomes.

Si en effet nous nous reportons à la suite des calculs faits pour résoudre cette équation, nous voyons que -2 satisfait à l'équation finale $x=-2$, puisqu'en y mettant -2 au lieu de x, on obtient l'égalité évidente $-2=-2$; par suite, -2 satisfait aux précédentes qui n'en diffèrent que par des réductions ou des inversions de termes. Par suite enfin, -2 satisfait à la première de ces équations, c'est-à-dire à l'équation [a].

Si donc, en substituant -2 à x dans l'équation [a], on lui satisfait, on lui satisfera en substituant $-x'$ au lieu de x, et en faisant après coup $x'=2$. Or, si dans l'équation [a], on met $-x'$ au lieu de x, elle devient :

$$2(30-x')=58-x',$$

c'est-à-dire précisément l'équation [b]. Cette équation [b] devait donc bien admettre la solution $x'=2$.

On déduit de là cette seconde conséquence :

Après qu'on a été averti, par la valeur négative obtenue pour x, *que l'on s'est trompé sur le sens attribué à cette inconnue dans la mise en équation, il n'est pas nécessaire de remettre le problème en équation. Il suffit, au moins le plus souvent, en même temps que l'on compte l'inconnue en sens inverse, de prendre pour sa valeur, la valeur absolue de la quantité négative trouvée d'abord.*

C'est en ce sens que l'on peut dire que $x=-2$ fournit la vraie solution du problème précédent.

D'ailleurs la comparaison de l'équation [b] à l'équation [a], montre que, pour avoir l'équation rectifiée du problème, il suffit de changer x en $-x'$, ou, ce qui revient au même, x en $-x$ dans l'équation primitive.

145. 2ᵉ **Exemple.** *Un particulier a employé un ouvrier pendant 13 jours en été et 17 jours en hiver. Il lui donnait 2 francs de moins par journée d'hiver que par journée d'été. La première fois, l'ouvrier a subi une retenue de 22 francs, et la seconde fois il a mérité une gratification de 28 francs. Sachant que chaque fois il a reçu la même somme, on demande le prix d'une journée d'hiver et celui d'une journée d'été.*

Soit x le prix d'une journée d'été ; $x-2$ représentera le prix d'une journée d'hiver. En hiver, l'ouvrier a reçu $17(x-2)$ francs, pour prix de 17 journées de travail, plus une gratification de 28 francs ; en tout, une somme représentée par $17(x-2)+28$. De même, en été, il a reçu une somme représentée par $13x-22$. Ces deux sommes étant égales d'après l'énoncé, on doit avoir :

$$17(x-2)+28=13x-22. \qquad [c]$$

Telle est l'équation du problème.

En la résolvant, on trouve successivement :

$$17x-34+28=13x-22,$$
$$17x-13x=34-28-22,$$
$$4x=34-50,$$
$$=34-34-16,$$
$$=-16,$$
$$x=-4.$$

Ce résultat privé de sens ne tient pas, ici, à ce que nous nous sommes trompés sur le sens dans lequel il fallait compter l'inconnue, car le prix d'une journée de travail n'est pas susceptible d'être compté en deux sens. Le résultat $x=-4$ indique donc l'absurdité du problème proposé.

Cependant, il peut nous mettre sur la voie des modifications à faire subir à l'énoncé pour en faire disparaître l'absurdité.

Pour le faire voir, nous constaterons d'abord qu'ici encore, si nous faisons sur la manière de traiter la quantité négative -4 dans les calculs, les mêmes conventions que précédemment; si nous convenons en d'autres termes de lui appliquer les mêmes règles qu'aux termes soustractifs des polynomes; si nous admettons de plus que deux quantités négatives sont égales quand elles ont même valeur absolue, nous pouvons dire que -4 satisfait à l'équation [c].

En nous reportant, en effet, à la suite des calculs qui ont servi à résoudre cette équation, nous voyons d'abord que -4 satisfait à l'équation finale $x=-4$, qui devient par là $-4=-4$; puis par suite à l'équation précédente $4x=-16$ qui lui est équivalente; puis de proche en proche, à l'équation [c] elle-même.

Mais dire que -4 satisfait à l'équation [c], c'est dire que $-x'$ lui satisfait, pourvu que l'on fasse après coup $x'=4$. Mettons donc $-x'$ au lieu de x dans l'équation [c]; il viendra :

$$17(-x'-2)+28=13(-x')-22,$$

ou, en changeant les signes des deux membres:

$$17(x'+2)-28=13x'+22; \qquad [d]$$

et cette équation sera satisfaite par:

$$x'=4.$$

Or, si nous regardons x' comme représentant le prix d'une journée d'été, il est aisé de voir que cette équation [d] est la traduction du problème suivant :

Un particulier a employé un ouvrier pendant 13 *jours en été et* 17 *jours en hiver. Il lui donnait* 2 *francs* de plus *par journée d'hiver que par journée d'été. La première fois, l'ouvrier a mérité une* gratification *de* 22 *francs; la seconde fois il a subi une* retenue *de* 28 *francs. Sachant que chaque fois il a reçu la même somme, on demande le prix d'une journée d'hiver et le prix d'une journée d'été.*

Et nous serons sûrs que ce problème admet la solution $x'=4$.

146. Nous pouvons conclure des considérations précédentes que, *lorsque, dans la résolution d'un problème, on arrive à une solution négative, si l'inconnue n'est pas susceptible d'être comptée en deux sens, il faut rejeter le problème proposé comme absurde.*

Toutefois, si l'on veut rectifier l'énoncé de ce problème, *il suffit de changer* x *en* — x', *ou, ce qui revient au même,* x *en* — x, *dans l'équation primitive, et de traduire la nouvelle équation dans le sens le plus conforme à l'énoncé proposé.*

Mais ne perdons pas de vue que cette rectification est purement facultative, et que d'ailleurs il est tel problème où elle n'est pas possible.

ACHEVÉ D'IMPRIMER EN NOVEMBRE 1983
SUR LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE
LIENHART ET Cie A AUBENAS D'ARDECHE
N° 2135 - *Imprimé en France*
DEPOT LEGAL : NOVEMBRE 1983