LA VALEUR ABSOLUE *

Difficultés majeures pour une notion mineure

Alain DUROUX
I.U.T. Génie Mécanique
Bordeaux

I – INTRODUCTION

Face à une notion comme la valeur absolue, qui de façon évidente pose problème aux élèves, de la 6ème à la Faculté, en tant qu'enseignant je serais tenté d'essayer de modifier la présentation de la notion, de multiplier les exercices de renforcement. En tant que militant de l'I.C.E.M. (pédagogie Freinet) je pourrais mettre en cause le cours magistral, le mépris de la parole des élèves.

Si ces attitudes me paraissent tout à fait normales (ce sont les miennes depuis plusieurs années), force m'est de constater qu'il manque un élément pour rendre efficace mon enseignement sur cette notion. Ce «chaînon manquant», nécessitant un «pas de côté» par rapport à ma pratique, c'est l'analyse des conceptions à propos de la valeur absolue, en tant que produits de situations d'enseignement, c'est-à-dire l'analyse didactique du phénomène.

Le but de cette étude (qui n'est qu'une première étape) est donc de définir une problématique d'analyse des conceptions à propos de la valeur absolue : délimitation du champ conceptuel, dépistage des indices de difficulté, mise en évidence d'obstacles, analyse de ce qui est officiellement enseigné (à travers les programmes, les commentaires, les manuels) et plus généralement étude des régulations du système d'enseignement.

La pertinence de cette démarche peut être évaluée, moins par une analyse statistique plus ou moins fine des phénomènes d'enseignement que par la mise au point de situations d'apprentissage engendrant des conceptions «controlées» et aboutissant

* NdlR le texte publié ici est celui d'un mémoire de D.E.A. de didactique des mathématiques préparé à l'Université de Bordeaux sous la direction de Guy Brousseau et soutenu le 30 juin 1982.

«petit x» n°3, pp. 43 à 67, 1983

à une réelle acquisition du concept de valeur absolue. Cette deuxième étape reste pour le moment à l'état de projet.

Pourquoi la valeur absolue ? Le sous-titre de cette étude n'est pas qu'un simple jeu de mots. La notion de valeur absolue occupe une place tout à fait à part dans l'enseignement. Elle est introduite très tôt, souvent dès la 6ème, mais de façon très brève, bien que répétée jusqu'à la 2ème.

Cette répétition est peut être due à l'importance mathématique de cette notion et à la constatation de la persistance des erreurs à ce propos. Ainsi voit-on des étudiants de premier cycle de Faculté commettre des erreurs sur une notion introduite en 6ème !

Nous sommes donc en face d'un véritable paradoxe : un concept dont la définition prend deux lignes avec un vocabulaire élémentaire, et cependant cette notion «sème la terreur» chez la plupart des élèves et ce jusqu'à un stade avancé de leurs études.

C'est à une tentative d'explication de ce paradoxe que cette étude est destinée.

II – LE «TERRITOIRE» DE LA VALEUR ABSOLUE.

1. Notion de champ conceptuel.

Si nous donnons comme critère d'acquisition d'un concept mathématique le fait que chez l'élève il sert de solution à une situation-problème, notre premier travail sera de répertorier tous les types des situations associées à la notion de valeur absolue. Dans son article sur les orientations de la didactique des mathématiques, G. Vergnaud [1981] rappelle ce qu'il entend par champ conceptuel. Dans la mesure où la didactique prend pour point de départ le contenu des connaissances, il est essentiel de découper à bon escient des contenus afin d'en faire l'analyse didactique : «il n'est pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de concepts (et de procédures), qui, dans les situations rencontrées et traitées par l'élève, sont difficilement dissociables».

D'autre part, pour pouvoir analyser l'évolution d'une conception chez un élève sur une période suffisamment longue, il faut que le découpage des contenus donnent des domaines assez larges.

A partir de ces deux points, G. Vergnaud donne la classification suivante : «un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion».

Le répertoriage des situations en correspondance avec un concept peut s'élaborer de plusieurs façons. L'étude mathématique de la notion permettra bien évidemment un premier balisage. Cependant, ce travail peut être complété par l'étude historique du concept : quelles situations l'ont rendu nécessaire, quels problèmes nouveaux a-t-il permis de résoudre ? A ces deux types d'étude est intimement liée une recherche sur ce que peut être la génèse de l'acquisition du concept chez un sujet, à savoir les prérequis indispensables, dans la mesure où l'apprentissage nécessitera un temps relativement long.

En ce qui concerne la valeur absolue, ce travail reste à faire. En effet, dans ce premiers temps de la recherche, je n'ai pas établi une liste exhaustive des types de situations où le concept de valeur absolue entre en jeu. Cependant une rapide étude mathématique et historique donnera quelques repères pour l'établissement d'une telle liste.

2. Etude mathématique de la valeur absolue.

2.1 Définition.

La valeur absolue d'un réel est associée à la structure additive et à la structure d'ordre de l'ensemble des réels. Plusieurs définitions sont possibles.

Définition 1.

Pour tout réel x, la valeur absolue de x est définie par $|x| = \max(-x, x)$.

Définition 2.

Pour tout réel x, la valeur absolue de x est définie par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$,
$|x| = -x$ si $x < 0$.

Il faut remarquer que dans ces deux définitions, la valeur absolue apparaît comme une application sur l'ensemble des réels, la différence venant du fait que dans la première définition la valeur absolue de x est déterminée par une expression unique ce qui n'est pas le cas pour la seconde définition.

L'équivalence des deux définitions se démontre à partir de la compatibilité entre l'addition et la relation d'ordre sur IR :

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, [x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z].$$

En effet, si $x \geqslant 0$ alors $x + (-x) \geqslant -x$ donc $0 \geqslant -x$ et par transitivité de la relation d'ordre $x \geqslant -x$ ce qui donne $\max(-x, x) = x$.

Par contre si $x \leqslant 0$, $x + (-x) \leqslant -x$, $0 \leqslant -x$ et $x \leqslant -x$, donc $\max(-x, x) = -x$.

Les propriétés fondamentales de la valeur absolue sont :

- $\forall x\ [x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0]$
- $\forall x \forall y\ [x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\ |x + y| \leqslant |x| + |y|]$
- $\forall x \forall y\ [x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\ |xy| = |x|\ |y|]$

Notons cette différence entre l'addition et la multiplication (inégalité dans un cas, égalité dans l'autre) qui ne sera pas sans provoquer des erreurs comme nous le verrons plus loin.

2.2 Valeur absolue et module.

La restriction de l'application valeur absolue de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ peut se définir de façon intrinsèque en utilisant comme précédemment les propriétés de groupe totalement ordonné de ces deux ensembles. Ceci n'est pas possible sur $\mathbb{C}$ qui n'a pas de relation d'ordre compatible avec l'addition et prolongeant celle de $\mathbb{R}$ (ceci amène à faire une distinction entre valeur absolue et module). Par contre l'application valeur absolue se prolonge sur $\mathbb{C}$ avec le module.

En effet, si $z \in \mathbb{C}$ on définit le module de z par $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$. Or si z est réel $z = \overline{z}$ donc $|z| = \sqrt{z^2}$. Mais la racine carrée d'un réel a positif étant le nombre positif dont le carré vaut a, et les deux réels ayant pour carré z^2 étant z et -z, si $z \geqslant 0$ $|z| = z$ et si $z \leqslant 0$ $|z| = -z$ donc le module de z est la valeur absolue de z. Ceci pourrait donner une troisième définition de la valeur absolue comme restriction à $\mathbb{R}$ de l'application module définie sur $\mathbb{C}$.

2.3 Utilisation de la valeur absolue.

Cette première étude permet de pointer quelques situations faisant intervenir la valeur absolue.

La première comme notation «commode» chaque fois qu'une étude de cas sur le signe d'une expression est nécessaire. Par exemple, quand il s'agit de donner une primitive d'une fraction du type $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$, on prendra $\log u(x)$ là où $u(x)$ est positif et $\log(-u(x))$ là où $u(x)$ est négatif. Nous noterons alors que $\log |u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sans tenir compte du signe de $u(x)$.

Autre exemple : quand nous voulons mesurer l'aire du domaine plan délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe $x'ox$, les droites $x = a$, et $x = b$, nous devons faire l'étude du signe $f(x)$, sur les intervalles où $f(x)$ est positif, calculer $\int f(x)\,dx$ et sur ceux où $f(x)$ est négatif calculer $\int - f(x)\,dx$, puis additionner les résultats obtenus. Toute cette est résumée dans la notation $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Plus généralement, la valeur absolue interviendra dans toutes les propriétés sur les nombres, invariantes par rapport à leur signe.

L'autre utilisation importante de la valeur absolue est celle qui permet de munir IR d'une distance :

$$\forall x \, \forall y \, [x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|]$$

IR devient aussi un espace métrique dans lequel nous pourrons développer toute l'analyse. Sont reliés à cette notion de distance tous les problèmes d'approximation, de placement d'un nombre par rapport à d'autres, d'écart... D'autres utilisations de la valeur absolue existent, importantes comme dans le cas des séries absolument convergentes, où la notion de valeur absolue apparaît comme un cas particulier de la notion de norme qui a un rôle fondamental en mathématiques, en particulier en analyse fonctionnelle.

En conclusion, la valeur absolue qui peut apparaître comme une notion mineure en mathématiques (et c'est ainsi qu'elle est traitée dans l'enseignement), joue un rôle majeur dans un bon nombre de domaines.

3. Quelques remarques sur l'histoire.

Dans aucun livre classique d'histoire des mathématiques, je n'ai pu trouver de traitements spécifiques de la valeur absolue. N'ayant pas eu le temps d'approfondir cette étude, j'en suis réduit à émettre des hypothèses qui me semblent très probables, mais qu'il faudrait vérifier avec plus de minutie.

Il semble banal de dire que l'histoire de la valeur absolue se confond avec celle des nombres négatifs. Dès le moment où des mathématiciens comme Diophante parlent de «ce qu'il y a de manque», il est évident qu'au moins implicitement ils pensent à **combien** il manque, mais ce «combien» n'est pas explicité.

Dans un article sur l'épistémologie des nombres négatifs, Glaeser [1982] met bien en évidence l'histoire mouvementée de ces nombres : «L'introduction conceptuelle des nombres négatifs a été un processus d'une lenteur surprenante. Elle a duré plus de mille cinq cents ans, depuis l'époque de Diophante jusqu'à nos jours !» Glaeser montre, à partir d'extraits d'œuvres de mathématiciens, comment ceux-ci, même s'ils utilisent sans problème les négatifs (essentiellement à partir du XVIIème siècle) se perdent dans de longs discours pour essayer d'expliquer ce que représentent ces nombres. Sur l'exemple particulier de la règle des signes, l'article analyse comment la recherche à tout prix d'un bon modèle de représentation des négatifs empêche de donner une démonstration satisfaisante de cette règle.

Il est clair que jusqu'au XIXème siècle, la notion de valeur absolue est reconnue implicitement par les mathématiciens pour qui les quantités négatives sont formées d'un signe «-» et d'un «nombre», mais nul ne sent la nécessité de prendre comme objet d'étude ce nombre et d'en étudier les propriétés.

Dès lors que les nombres positifs et les nombres négatifs semblent de nature différente, il est impossible de concevoir l'existence de l'application valeur absolue, définie sur leur ensemble, et qui justement, en cela, leur donne leur unité : cette application ne pourra être définie que sur l'ensemble des nombres, sans distinction de signe.

Il faudra attendre le XIXème siècle pour que la notion de valeur absolue soit explicitement reconnue et désignée, sans pour autant que la théorie en soit faite. A cet égard, ce qu'écrit Cauchy en 1821 dans son cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, est caractéristique de l'état de la question :

Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'Algèbre ordinaire, soit à la Trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet Ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paraît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*.

Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou —. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe —, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou — placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur *somme*. Ainsi les deux quantités -10 et $+7$ ont pour somme -3, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. *Ajouter* deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. Enfin, on dit qu'une quantité est *plus grande* ou *plus petite* qu'une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D'après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

En Algèbre, on représente, non seulement les nombres, mais aussi les quantités, par des lettres. Comme on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives, on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A, soit par $+A$, soit par A seulement, tandis que la quantité négative opposée se trouve représentée par $-A$. De même, dans le cas où la lettre a représente une quantité, on est convenu de regarder comme **synonymes les deux expressions a et $+a$, et de représenter par $-a$ la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle la *règle des signes***

La dualité nombre/signe est ici bien mise en évidence, le signe apparaissant comme un simple adjectif modifiant la signification du nombre. Le prolongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ apparaît comme une convention d'écriture : «on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A soit par + A soit par A». Et l'extrait se termine par un bel exemple de la confusion persistante puisque a désignant une quantité, donc déjà un nombre affecté d'un signe, Cauchy convient de regarder comme synonymes a et + a. Que peut bien signifier ce + a ?

Il faut remarquer que Cauchy désigne par valeur numérique ce que nous appelons valeur absolue et qu'il ne fait pas l'inventaire des propriétés de cette valeur numérique. D'ailleurs dans la suite de son cours, il ne l'utilise pas. Il signale cependant le rapport entre module d'un complexe et valeur numérique. D'autre part la valeur numérique de a n'a pas de notation particulière, ce qui est un indice que l'application valeur absolue n'a pas été construite.

Nous pouvons analyser la suite de l'histoire de la valeur absolue à travers les cours successifs de l'Ecole Polytechnique. En 1834, Navier ne fait aucune mention de cette valeur numérique qu'a introduite Cauchy. Dans un ouvrage sur les séries, paru en 1860, Catalan parle de valeur absolue mais ne donne pas de notation. Par contre, en 1898, avec Jourdan, l'application $x \rightarrow |x|$ est construite et utilisée avec toutes ses propriétés. Quelques années plus tard, Humbert essaiera d'introduire la notation mod (x) pour la valeur absolue de x afin de mettre en avant le lien avec le module d'un complexe. Nous savons maintenant que c'est l'inverse qui a été adopté puisque le module de z est noté $|z|$.

Nous voyons à travers cette rapide étude historique que la construction de la valeur absolue est passée par trois stades. Celui de **l'implicite** où le problème de la valeur absolue n'est pas formulé mais où il est probable que les mathématiciens étaient capables de résoudre les problèmes associés à la distance entre deux nombres. Puis la difficulté essentiellement didactique, posée par le prolongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, a nécessité l'emploi du terme valeur absolue (numérique chez Gauss). Sans que ce sujet ne soit l'objet d'une étude théorique. Il apparaît essentiellement comme un **moyen** de clarifier le problème des nombres négatifs. Ce n'est qu'au dernier stade que la valeur absolue devient réellement une **notion mathématique** sous la forme d'une application ayant les propriétés voulues.

Cette histoire a un côté «clandestin» dans la mesure où je ne connais aucun mathématicien à qui l'on pourrait attribuer la «découverte» de la valeur absolue. Il est donc difficile de repérer les situations qui ont pu provoquer sa construction. Par contre, il semble que son emploi ait permis, par l'aspect distance, de formaliser la métrique de $\mathbb{R}$ et de la généraliser à d'autres espaces.

II – LA VALEUR ABSOLUE, UNE NOTION DIFFICILE.

1. Les indices de la difficulté.

a) Effondrement du taux de réussite.

Ayant enseigné les mathématiques dans des classes de seconde à la terminale, je peux témoigner des «ravages» que provoque l'apparition d'une valeur absolue dans un exercice qui, sans cela, serait considéré comme facile. Une enquête permettrait de montrer que les erreurs subsistent même après le baccalauréat.

Un des indices de la difficulté consiste en l'effondrement du taux de réussite à un exercice avec valeur absolue, comparé à un exercice similaire sans valeur absolue. Par exemple dans un questionnaire posé à des élèves de troisième, qui sera détaillé plus loin, à la question : «si $2a + 3 = 1$, que vaut a» ?, 80% des réponses sont justes ; alors qu'à la question : «si $|a + 2| = 4$, que vaut a ?», seulement 20% des élèves donnent la bonne réponse. Il est d'ailleurs bien connu que nous avons recours à l'emploi d'une valeur absolue pour rendre un exercice plus difficile.

b) **Avertissements aux professeurs.**

Si les commentaires du programme officiel du 1er cycle restent discrets sur la notion de valeur absolue quelques petites phrases des livres du professeur semblent indiquer que cette notion présente quelques difficultés. Ainsi dans le livre de 5ème de la collection M chez Hachette, il est dit que : «tous les professeurs ont constaté combien les élèves avaient des difficultés à manœuvrer la valeur absolue». De même dans la collection Magnard en 4ème on peut lire : «on pourra aller moins vite au III (paragraphe sur la valeur absolue), car les valeurs absolues ennuient toujours les élèves». Il est d'ailleurs remarquable que si la difficulté est signalée, peu de conseils sont donnés pour la contourner. On demandera de faire manipuler l'application valeur absolue avant d'introduire la notation $|x|$ ou on conseillera d'aller moins vite, c'est tout !

En résumé, la difficulté de la valeur absolue est reconnue par tous. Mais, probablement parce que cette notion est considérée comme mineure, son enseignement n'a guère été modifié et, en particulier, a résisté à toute inovation.

2. Typologie des difficultés.

Nous pouvons, à ce stade, essayer d'établir une première liste des difficultés associées à la valeur absolue. Il ne s'agit pas ici d'analyser les causes des erreurs (nous le ferons plus loin), mais d'indiquer ce qui, dans le traitement d'une valeur absolue est l'occasion d'erreurs régulières, étant entendu que ces difficultés se rencontrent dans d'autres situations. Nous pensons que ces erreurs ont un aspect spécifique dû à la valeur absolue, en ce sens que les mêmes difficultés rencontrées dans d'autres types de situations provoqueront des erreurs certes, mais différentes.

2.1 L'étude des cas.

Dans un grand nombre d'exercices sur la valeur absolue (équation, étude de fonction...) la méthode de résolution consiste à «enlever la valeur absolue», c'est-à-dire étudier le signe de l'expression inscrite entre les symboles de valeur absolue et dans le cas où elle est négative la remplacer par l'expression opposée. Il faut signaler que dans le premier cycle, c'est une démarche tout à fait nouvelle. C'est probablement la seule situation où une étude de cas sera faite.

Cette procédure sera l'occasion d'erreurs fréquentes du type :

- Etude du signe de x à la place de celui de l'expression en x.
- Etude du signe de $|f(x)|$.
- Croyance que la fonction $|f|$ recouvre deux fonctions f et $-f$ définies sur le même ensemble que $|f|$.

Nous retrouverons ces erreurs dans l'analyse du questionnaire.

2.2 La non linéarité.

De façon générale, il semble que pour les élèves, il est «naturel» qu'une application soit linéaire. Il serait intéressant de rechercher l'origine de cette croyance. Ce n'est pas l'objet de cette étude. Toujours est-il que dans les situations où se rencontrent des expressions du type $|a + b|$ la tentation est souvent grande d'utiliser l'égalité (fausse) : $|a + b| = |a| + |b|$; d'autant plus que, comme nous l'avons vu dans l'étude mathématique, pour le produit «ça marche !».

Ce type d'erreur est à rapprocher des égalités fausses : $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sin (a + b) = \sin a + \sin b$...

3. Obstacle ou difficulté ?

3.1 La notion d'obstacle.

Dans l'article déjà cité, Glaeser, utilise indifféremment les mots «obstacle» et «difficulté». Il s'en explique d'ailleurs dans une note où il indique qu'il emploie ces mots «naïvement», car il lui semble prématuré de les enfermer dans des formulations trop rigides.

Nous voudrions ici, donner quelques indications pouvant permettre de clarifier cette notion d'obstacle afin de la rendre opérante dans l'analyse didactique.

L'acquisition d'une notion n'est pas instantanée mais, en tant que processus, a une «histoire» au même titre que la production d'un concept dans le monde du savoir savant. Si ces deux processus ne sauraient être confondus (ne serait-ce que par la présence de l'enseignant dans le premier, qui joue en quelque sorte le «deux ex machina» ce qui n'est pas le cas dans le procès de production des connaissances, sauf à croire en une raison supérieure !), il peut cependant être utile d'utiliser en didactique des notions empruntées à l'épistémologie pour analyser un processus d'apprentissage.

Ce pourrait être le cas d'une notion introduite en épistémologie par Bachelard [1938] sous le vocable «d'obstacle épistémologique».

Il reste maintenant à savoir en quoi cette notion d'obstacle, essentielle dans l'analyse du processus de production des connaissances, peut servir dans l'analyse du processus d'acquisition des connaissances.

Brousseau [1976] a tenté ce transfert et a essayé de définir ce que peut être un obstacle en didactique des mathématiques.

Rappelons d'abord brièvement ce que sont les procédures d'acquisitions chez un élève (voir Brousseau [1981]). Un savoir est **institutionnalisé** à partir du moment où on fixe conventionnellement et explicitement son statut cognitif. Mais pour cela, il est nécessaire que ce savoir ait fonctionné comme tel dans les discussions entre élèves, comme moyen de **valider** ou de rejeter des assertions.

Ce savoir n'aura un sens, pour celui qui l'utilise, que s'il a servi comme solution à un problème posé, dans des conditions qui lui permettent de construire lui-même cette solution ou de choisir entre plusieurs solutions possibles en dehors de toute intention didactique ou pression culturelle. Ce savoir fonctionnera alors souvent de façon **implicite** et il est nécessaire que l'élève soit amené à **formuler** ses conceptions, par exemple dans une situation de communication.

Nous avons dit plus haut que chaque concept peut être mis en correspondance avec la classe de toute les situations problèmes qui lui donnent un sens, c'est-à-dire dans lesquelles il apparaît nécessaire à leur résolution.

Dans le déroulement du processus d'acquisition pour diverses causes (ne serait-ce que pour un étalement nécessaire) certaines de ces situations sont privilégiées au détriment d'autres, ce qui provoque l'apparition de connaissances locales, opérantes sur des sous-classes du champ conceptuel et pour certaines valeurs des variables des situations concernées. C'est ce savoir local que nous appellerons conception, nous préciserons **conception de l'élève** (par opposition au **concept** du savoir savant) bien qu'il ne saurait s'agir d'analyser les représentations **d'un sujet**, ce qui est du domaine de la psychologie cognitive. Les conceptions de l'élève sont le produit d'un processus d'acquisition des connaissances.

Il y a toujours confrontation entre les conceptions de l'élève et le milieu didactique (physique dans le cas de la géométrie par exemple, réel simulé sur ordinateur, théorique pour les actions sur une structure axiomatisée...). Par leur caractère local, les conceptions de l'élève dans leur confrontation avec le milieu présentent nécessairement des insuffisances. Elles doivent donc évoluer, plusieurs schémas d'évolution étant possibles.

Dans un scénario idéal, la conception s'élargirait progressivement, la sous-classe des situations pour laquelle elle est opérante tendant à devenir le champ conceptuel entier.

Il est très probable que ce schéma ne rend pas compte de la réalité. Il est fréquent que, à propos d'un même concept, plusieurs conceptions, parfois antinomiques, se développent, chacune recouvrant une partie du champ conceptuel. Il est possible également qu'une nouvelle conception apparaisse contre une ancienne et plus généralement qu'il y ait restructuration de l'ensemble des conceptions.

C'est l'analyse de ce dernier scénario que pourra être utile la notion d'obstacle.

Précisons : dans le processus d'acquisition, ce que nous définissons comme obstacle devra répondre aux critères suivants :

1 Il s'agit d'une **connaissance** qui fonctionne comme telle sur un ensemble de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations. Par exemple, à propos de l'article déjà cité de Glaeser, l'inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées ou la difficulté de donner un sens à des quantités négatives isolées ne sont pas des obstacles puisqu'il s'agit d'un manque de connaissances et non d'une conception sur les nombres négatifs. Par contre, la difficulté à unifier la droite numérique, ce qui peut être reformulé en conception des nombres négatifs comme de nature différente des nombres positifs (des mesures à l'envers), opérante sur un certain nombre de situations, peut prétendre au statut d'obstacle.

2 L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou a d'autres valeurs des variables, va provoquer des erreurs spécifiques, repérables, analysables.

3 L'obstacle est une connaissance stable. Dans les situations qui sortent de son domaine de validité, son rejet coûtera plus à l'élève qu'une tentative d'adaptation à tout prix, même si cela alourdit notablement les processus de résolution employés. C'est le symptôme classique de l'élève qui «fait compliqué» alors qu'il pourrait «faire simple».

4 L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des situations spécifiques de rejet et ce rejet sera constitutif du savoir. Par exemple, l'acquisition du concept de convergence d'une suite numérique se fera contre la conception selon laquelle tout nombre a une représentation décimale exacte. Le retour même sur la conception obstacle sera partie intégrante du nouveau savoir.

3.3 Les obstacles à la notion de valeur absolue.

Nous faisons ici, l'hypothèse que les erreurs persistantes à propos de la valeur absolue sont causées par des conceptions-obstacles sur les nombres relatifs. Par conséquent, le concept de valeur absolue (et ceci lui donnerait une très grande importance dans l'enseignement des relatifs) ne pourra être acquis que par le rejet de ces obstacles.

Notre analyse nous a permis de déceler deux types d'obstacles, qui forment d'ailleurs un couple contradictoire, ce qui semble de règle pour des conceptions non confrontées à des situations spécifiques de rejet. Ainsi l'adoption d'une de ces conceptions contre l'autre remplirait le rôle d'un rejet idéologique et non constitutif du savoir.

3.3.1 Le nombre mesure.

Dans sa scolarité élémentaire, ainsi que dans sa pratique sociale, l'élève est amené à concevoir les nombres comme résultats d'une mesure : mesure d'une longueur, du cardinal d'un ensemble, d'un prix... Hormis les utilisateurs des mathématiques (et encore !) bien peu de personnes utilisent les nombres dans un autre but que celui de mesurer.

Cette conception du nombre assimile plus ou moins bien toutes les situations nouvelles auxquelles l'élève est confronté à l'école élémentaire. Il y a parfois des difficultés, par exemple pour les fractions conçues à la fois comme mesure et comme rapport de mesures.

Confrontée aux nombres négatifs, cette conception du nombre mesure va opposer ces derniers aux nombres positifs. En effet, le nombre négatif sera conçu comme une mesure «à l'envers». Ce sera donc un nombre à part constitué de deux parties : un signe «-» et une mesure. L'ensemble des nombres n'étant pas unifié la construction de l'application valeur absolue ne peut pas être acquise. Tout au plus, l'élève concevra une valeur absolue au coup par coup, sur des exemples numériques. Elle ne sert à rien sur les positifs et supprime le signe «-» sur les négatifs.

La conception du nombre mesure fait ainsi véritablement obstacle à la notion de valeur absolue, d'autant plus qu'en 6ème et en 5ème cette conception s'avérera satisfaisante pour résoudre les problèmes posés qui sont du type : «$|-2,5| = ?$» ou «quels sont les nombres qui ont pour valeur absolue 1,72 ?».

3.3.2 Plongement et restriction.

Le rejet de la conception du nombre mesure, s'il n'est pas traité dans des situations spécifiques, va conduire à l'adoption d'une conception des nombres relatifs comme d'une nature autre que celle des entiers naturels. En d'autres termes, le plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ n'est pas conçu. $\mathbb{Z}$ apparaît uniquement sous l'aspect de structure algébrique donnant une grande souplesse aux calculs de type additif et ceci s'accompagne d'une perte de signification du nombre dont se plaignent les professeurs.

Il est facile de voir comment la conception du nombre mesure prépare celle des relatifs comme structure algébrique, sans signification «concrète». L'élève à qui on a expliqué qu'il était impossible d'enlever 5 billes dans une poche où il n'y en a que 3, voit soudain cette interdiction levée : pour tout couple (a, b) de $\mathbb{Z}^2$, l'écriture a - b a un sens. Le zéro n'est pas le plus petit nombre au-dessous duquel rien n'est envisageable. Il n'est pas étonnant que cette sorte de miracle provoque le refus d'envisager $\mathbb{N}$ comme une partie de $\mathbb{Z}$.

Par conséquent, l'arrivée des nombres négatifs aurait deux effets sur les conceptions de l'élève : une perte de signification des nombres par mise en cause du nombre mesure, une facilité opératoire par introduction du groupe additif.

Or dans le même temps, la valeur absolue s'oppose à ces deux effets. En effet, elle réintroduit l'idée d'ordre de grandeur d'un nombre, abstraction faite de son signe. D'autre part, la facilité opératoire disparait puisque $|a + b|$ n'est pas égal à $|a| + |b|$.

Nous voyons ainsi comment les conceptions induites par le prolongement des positifs dans un groupe vont faire obstacle à la notion de valeur absolue perçue comme une restriction, un retour en arrière.

Les erreurs provoquées par cet obstacle seront bien sûr du type $|a| + |b| = |a + b|$ ou plus subtilement des erreurs du type $|a| < 0$.

III – L'ENSEIGNEMENT DE LA VALEUR ABSOLUE.

1. L'enseignement «officiel».

Selon le programme, la notion de valeur absolue est introduite en 5ème. Cependant, dans beaucoup de manuels, dès le moment où les relatifs sont évoqués (en 6ème), il est fait allusion à la valeur absolue. C'est par exemple le cas dans le manuel de 6ème d'une collection des éditions Hachette. (Bareil-Zehren, 1980, pp. 225-226).

Activité 2 : Nombres relatifs et valeurs absolues

1° Les nombres (+ ...), ou (− ...), que tu viens de voir sont des **nombres « relatifs »** :
Les nombres (+ ...) sont appelés **nombres positifs.**
Les nombres (− ...) sont appelés **nombres négatifs.**
(+0) et (−0) désignent le même nombre. Nous l'écrirons 0.

2° **Tout nombre relatif est composé de** *deux parties* **:**
un *signe* **et une** *«valeur absolue»*.

Exemples pour :

un nombre positif, (+7,5) :		un nombre négatif, (−6,4) :	
• **signe positif**	+	• **signe négatif**	−
• **valeur absolue**	**7,5**	• **valeur absolue**	**6,4**

3° Quelles sont les valeurs absolues de (+17,6), (−29), (+16,3), (−101,7), (+0,5), (−13,1), (+70)?

Notation d'une valeur absolue : La valeur absolue de (−7,5), par exemple, se désigne ainsi : $|(-7,5)|$.

Complète : $|(+16)| = \ldots$; $|(-9)| = \ldots$

$|(-30,5)| = \ldots$; $|(+17,4)| = \ldots$

4° Écris les deux décimaux dont la valeur absolue est 14, puis ceux dont la valeur absolue est 5,63.

5° Représentation d'un nombre relatif par une lettre :
Un nombre relatif peut se représenter par une lettre. **Dans ce cas, le signe n'est pas apparent :** *il est « dans » la lettre.* Par exemple, désignons par x, en degrés, la température à 8 heures, un matin d'hiver. x peut être égale à (+8), ou (+10), ou ... mais x peut être aussi égale à (−5), ou (−10)...
La lettre x peut donc désigner aussi bien un négatif qu'un positif.

Le modèle du nombre comme signe et valeur absolue n'est plus implicite ! Ce qui explique l'artifice du signe caché dans la lettre (l'élève doit avoir du mal à comprendre que dans -a il y a un signe caché).

En 5ème, plusieurs présentations de la valeur absolue sont données. Ainsi dans la collection des éditions CEDIC. (A. Deledicq et C. Lassave, 1982, p. 25).

■ **Définitions :**

> **Si y est un décimal négatif, la *valeur absolue* de y est le décimal positif $-y$.**
> **Si x est un décimal positif, la *valeur absolue* de x est le décimal x lui-même.**
> **La valeur absolue du décimal d est notée $|d|$.**

Exemple : • $|-4{,}3| = 4{,}3$ et $|5{,}8| = 5{,}8$.
$|a|$ peut être égal à a ou à $-a$, cela dépend du signe de a. Mais, dans tous les cas, la valeur absolue de a est un décimal positif.

Propriété :

> **Un décimal et son opposé ont la même valeur absolue.**

■ **Propriété :** ***opposé d'une somme***

> **Pour tous les décimaux c et d on a :**
> $$-(d+c) = (-d) + (-c).$$

Autrement dit : « L'opposé d'une somme de décimaux est égal à la somme des opposés de ces décimaux ».
Attention : La valeur absolue d'une somme de décimaux n'est pas toujours égale à la somme des valeurs absolues de ces décimaux.
Par exemple : $|(-4,3) + 5,8| = |1,5| = 1,5$
$|-4,3| + |5,8| = 4,3 + 5,8 = 9,1.$

Dans la collection des éditions Nathan (y. Bellecave et al., 1982, p. 107) le modèle du nombre relatif comme signe et entier relatif est repris :

Un entier relatif est formé d'un signe moins et d'un entier naturel ou d'un signe plus et d'un entier naturel.
Cet entier naturel est appelé la valeur absolue de l'entier relatif.
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.
Les entiers relatifs de signe moins sont appelés : entiers relatifs négatifs.
L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté $\mathbb{Z}^-$.
Les entiers relatifs de signe plus sont appelés : entiers relatifs positifs.
L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté $\mathbb{Z}^+$.
L'entier relatif $^-0$ est égal à l'entier relatif $^+0$. On le notera 0.

Dans la collection Durrande (éditions Technique et Vulgarisation, S. Such et J.C. Borel, 1982, p. 131), la valeur absolue est liée à la distance sur une droite, mais la définition reste «classique».

nécessaire d'utiliser les relatifs pour coder les points de la droite $(x'x)$; mais comme pour les températures, on peut, pour la demi-droite $[Ox)$, identifier les deux codes (fig. 3).

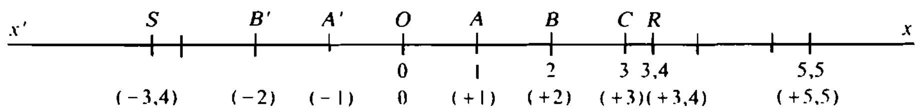

Fig. 3

Donc, comme pour les températures, on identifie :
- **les entiers positifs et les entiers naturels :** $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ $\quad (+3) = 3 \quad (+5) = 5.$
- **les décimaux positifs et les décimaux :** $\mathbb{D}^+ = \mathcal{D}$ $\quad (+5,5) = 5,5 \quad (+3) = 3.$

Valeur absolue d'un nombre relatif

Sur la droite $x'x$ (fig. 3), les points R et S sont équidistants de O. Ils sont repérés par les nombres relatifs opposés $(+3,4)$ et $(-3,4)$; leur distance à O est 3,4. On dit que les nombres $(+3,4)$ et $(-3,4)$ ont pour valeur absolue 3,4.
On écrit $|(+3,4)| = |(-3,4)| = 3,4$ par identification de $\mathcal{D}$ et $\mathbb{D}^+$.
$|(+3,4)| = |(-3,4)| = (+3,4).$
$|x|$ se lit valeur absolue de x.
$|(+4,5)| = (+4,5) = 4,5 \quad |(-3,8)| = (+3,8) = 3,8 \quad |(-2)| = |(+2)| = (+2) = 2.$

Soit x un nombre relatif entier ou décimal. Des deux nombres x et (opp x), l'un est positif, l'autre est négatif.
La valeur absolue de x ($|x|$) est celui des deux nombres x et (opp x) qui est positif.

Si x est positif $\quad |x| = x.$	**Si x est négatif $\quad |x| = \text{opp } x.$**

En 4ème et en 3ème, la notion de valeur absolue est acquise (ou du moins considérée comme telle). La définition est donnée ainsi que les propriétés fondamentales.

Ce qui frappe dans l'analyse de ces manuels c'est l'extrème briévetée du cours sur la valeur absolue (une demi-page, une page au mieux !) alors même que les livres pour les professeurs signalent la difficulté. La notion est présentée comme évidente sur des exemples numériques et la supercherie (involontaire, bien sûr !) consiste à supposer qu'arrivé en 4ème, l'élève connait l'application valeur absolue, alors qu'il ne l'a jamais utilisée comme application.

En ce qui concerne les exercices, en 5ème, ils sont peu nombreux et du type : «trouver la valeur absolue d'un nombre» ou le problème inverse. Quelques exercices permettent de vérifier sur des exemples, l'inégalité triangulaire. De rares exercices sont consacrés à l'approximation d'un nombre et à des inéquations $|x - a| < r$.

Dans les classes de 4ème et de 3ème, la valeur absolue intervient dans des exercices sur des résolutions d'équations ou des études de fonction.

Il faut remarquer que la valeur absolue n'intervient nulle part ailleurs dans le cours et ce jusqu'en Première où sont introduites les premières notions sur les limites.

2. Les régulations du système didactique.

2.1 La notion de régulation.

Nous appelons système didactique l'ensemble des relations entre un enseignant, des élèves et un savoir à enseigner. Nous avons vu comment le processus d'acquisition des connaissances, qui a pour cadre ce système, a pour moteur le conflit entre les conceptions de l'élève et le savoir à enseigner. Je ne reviendrai pas sur l'origine de ce savoir, résultat d'une transposition didactique dont Chevallard [1982] a fait la théorie, c'est la dialectique de ce conflit que je voudrais analyser ici. Pour cela, je m'appuierai largement sur les thèses développées à propos de la dialectique par Lipietz [1979].

Analyser la dialectique de l'acquisition d'une notion, c'est analyser cette notion et les conceptions de l'élève à propos de cette notion d'une part mais c'est aussi analyser l'unité et le conflit de ces deux aspects.

La première étape de l'analyse a été franchie avec l'étude des obstacles, c'est la seconde que nous regardons maintenant.

L'unité entre la notion à enseigner et les conceptions de l'élève signifie d'abord cela : il ne peut y avoir de savoir à enseigner en dehors des conceptions de l'élève. C'est en fonction de ces conceptions qu'une connaissance est décrétée «à enseigner». La technique de la division ne sera pas un savoir à enseigner à un élève de Polytechnique, pas plus que la théorie des variétés différentielles ne le sera pour les élèves de C.P.

De même les conceptions de l'élève s'analysent par rapport aux notions qu'on veut lui faire acquérir.

Mais ces deux aspects ne peuvent exister qu'en conflit : un savoir n'est pas à enseigner s'il fait déjà partie des connaissances de l'élèves !

Nous nous retrouvons donc maintenant avec 2 pôles d'une nouvelle contradiction : l'unité savoir/conception et le conflit savoir/conception. Pour s'en tenir à la dialectique, nous devons donc maintenant analyser l'unité du couple «unité/conflit» et le conflit «unité/conflit». Ce dernier consiste en ce que le conflit peut détruire l'unité par échec de l'enseignement : le processus d'acquisition n'a pas fonctionné, ce qui est une éventualité qui n'est malheureusement pas à négliger. De même l'unité peut venir à bout du conflit dans le cas où le savoir est acquis par l'élève, intégrant ainsi ses conceptions.

Mais ces deux éventualités signifient la fin du système didactique soit par échec, soit parce qu'il n'y a plus rien à enseigner. Il y aura donc nécessité pour le système s'il veut survivre, de maintenir l'unité savoir/conceptions à travers le conflit de ces deux pôles. C'est ce qui constitue l'unité du couple unité/conflit.

Nous appellerons régulation la manière dont l'unité s'impose (de façon relative et temporaire) à travers le conflit. Il y aura donc deux types de régulation : celle qui assure la permanence de l'unité savoir/conception et celle qui assure la permanence du conflit savoir/conception.

2.2 Les régulations associées à la valeur absolue.

2.2.1 La rénovation de l'objet d'étude.

Dans son mémoire sur les équations paramétriques, Schneider [1979] donne comme contradiction motrice du processus d'enseignement le fait que le savoir doit apparaître nouveau à l'élève, pour justifier son enseignement, et en même temps ancien, pour être reconnu par lui. Pour notre part, nous pensons qu'il est plus exact de dire que la contradiction motrice est le conflit entre conception de l'élève et savoir à enseigner et que c'est l'effet de régulation de cette contradiction qui assure la permanence du conflit (le nouveau) et de l'unité (l'ancien). Cela dit, l'effet régulateur de la valeur absolue est tout à fait similaire à celui joué par les paramètres et qui a été analysé par Scneider.

En effet, une fois la résolution de l'équation du premier degré acquise, l'introduction d'équation avec valeur absolue va permettre de «rénover» cet objet, qui sinon serait frappé d'obsolescence, et par là même de relancer le processus d'enseignement. Cet effet régulateur joue aussi dans l'étude des fonctions, car en 3ème les seules fonctions étudiées sont celles qui sont affines et l'utilisation de la valeur absolue va permettre de diversifier ces études en introduisant des fonctions affines par intervalles qui n'auront pas été définies de façon artificielle.

Nous avons vu en analysant les exercices sur la valeur absolue que c'était là les principales utilisations de cette notion et ce jusqu'en Première. L'enseignant dispose là d'un moyen économique, en ce sens que la définition de la valeur absolue ne nécessite que peu de connaissances, pour rénover des sujets risquant de devenir rapidement obsolètes.

2.2.2 L'adaptation de l'objet d'étude.

Après l'étude de l'effet régulateur **par** la valeur absolue, nous regardons maintenant les régulations du conflit **sur** la valeur absolue. L'une d'elles consiste à adapter l'objet d'étude.

En effet, pour que ce conflit n'aboutisse pas à un échec généralisé sur l'enseignement de la valeur absolue, des tentatives vont être faites pour réduire la distance entre les conceptions de l'élève sur les nombres et la notion de valeur absolue. Ces adaptations vont être, par exemple, faites au niveau de l'écriture. Puisque des erreurs fréquentes semblent être causées par la confusion entre le «-» des nombres négatifs et «-» marque de l'opposé, il suffit de modifier les notations. Ce sera par exemple opp(a) pour -a ou 2^- pour -2. Le problème c'est que, pour être cohérent, ces notations doivent être introduites dès que l'on parle de nombres relatifs, c'est-à-dire en 6ème. Mais c'est justement le moment de l'apprentissage où c'est une notion incomplète de valeur absolue qui est donnée puisque utilisée uniquement sur des exemples numériques. Ces notations ne peuvent donc jouer leur rôle de régulation à ce moment là. Et comme la notation -a est trop répandue pour être supplantée par des conventions à l'usage purement scolaire, les nouvelles notations sont rapidement abandonnées. C'est en 4ème, où l'application valeur absolue est utilisée, qu'elles pourraient jouer leur effet régulateur, mais elles n'ont plus cours.

2.2.3 L'algorithmisation.

Dans la mesure où la régulation par adaptation de l'objet d'étude s'avère inéfficace, une autre possibilité consiste à canoniser une procédure sous forme d'algorithme. La régulation consistera ici à «dresser» l'élève à répondre à des problèmes sur la valeur absolue par des algorithmes adaptés.

Dans l'ouvrage déjà cité, Schneider met en évidence l'effet régulateur de l'utilisation d'algorithmes : «l'algorithmisation est un moyen dont dispose le professeur pour «réduire» l'objet introduit à des dimensions acceptables [...]. En général, l'usage d'un algorithme de résolution conduit et contrôle la démarche de l'élève [...]. En prodiguant à l'élève une telle gratification, le professeur peut estimer qu'il a fait sa part du chemin dans la transaction, autrement que par les concessions un peu honteuses qu'il devra quand même consentir au niveau de l'évaluation».

L'algorithme le plus général associé à la valeur absolue est celui de l'étude de cas, qui consiste à supprimer la valeur absolue en étudiant le signe de l'expression en valeur absolue.

Cet algorithme a le mérite de convenir à tous les types d'exercices, mais peut se révéler plus coûteux à l'usage que d'autres.

Par exemple, dans le cas de la résolution de $|ax + b| = c$, l'algorithme général donnera :

Si $c \geqslant 0$ alors
  si $ax + b \geqslant 0$ alors
    résoudre $ax + b = c$
    sinon
    résoudre $-ax - b = c$
  sinon $S = \phi$

Mais nous pouvons employer cet autre algorithme.

Si $c \geqslant 0$ alors
  résoudre $ax + b = c$ et $ax + b = -c$
  sinon $S = \phi$

Ce deuxième algorithme est plus économique dans la mesure où il évite l'étude du signe de $ax + b$ qui est l'occasion de nombreuses erreurs. Ceci est encore plus vrai quand plusieurs valeurs absolues sont «emboîtées». Mais il n'est pas applicable à certains exercices, comme par exemple la résolution de $|ax + b| + |cx + d| = c$.

Dans la mesure où la valeur absolue ne fait pas l'objet d'un enseignement détaillé, ce deuxième algorithme est rarement institutionnalisé.

IV – «UN QUESTIONNAIRE SUR LA VALEUR ABSOLUE».

1. Présentation du questionnaire.

1.1 Elaboration du questionnaire.

A l'origine de cette étude, il y avait un certain nombre d'hypothèses. Simples conjectures, elles n'étaient étayées par aucune réflexion théorique approfondie. Elles ont abouti à un questionnaire volontairement très ouvert, le but recherché étant un matériau de base sur lequel pouvait se développer la théorie. Les hypothèses initiales étaient une liste d'erreurs constatées dans mes classes à tous les niveaux :

– Les erreurs liées à la représentation des réels comme signe et valeur absolue.

– Les erreurs dues au dysfonctionnement des algorithmes employés avec la valeur absolue.

— Les erreurs provoquées par la confusion entre application et expression de l'image.

— Les erreurs dues à la «survivance» de la règle «a - b existe si $a \geqslant b$».

Ce questionnaire a été soumis à deux classes de 3ème du CES de la Brède, en mars 1981. Il est constitué de 10 questions. L'effectif est de 46 élèves.

1.2 Le problème du signe.

Trois questions ont été posées sur la représentation d'un réel comme un signe et une valeur absolue (elles sont notées REP1, REP2, REP3).

La première demande de trouver le plus grand élément d'un ensemble de réels positifs et négatifs. Cette question devait permettre d'observer si l'élève, pour comparer des nombres, n'avait pas tendance à oublier leur signe. Il y a 92% de réponses exactes à cette question.

La question REP2 devait permettre de déceler la confusion entre le signe «-» de l'opposé et le signe «-» du négatif. Le taux de réussite descend ici à 48%.

Si le nombre réel est conçu comme un signe et une valeur absolue, la valeur absolue est ce qu'on obtient en supprimant le signe. Ainsi $|-a|$ doit être égal à a. C'est ce type d'erreur qui devrait être provoquée par la question REP3. Il est remarquable qu'ici le taux de réussite soit seulement de 11% ! Le nombre d'abstentions à cette question est l'un des plus faible, ce qui semble indiquer qu'elle n'a pas été considérée a priori comme difficile.

1.3 Les algorithmes de la valeur absolue.

Nous avons voulu ici étudier la corrélation entre le taux de réussite et la manipulation du nombre de valeurs absolues. Pour cela nous sommes partis d'une simple équation du premier degré (EQU1) pour laquelle 80% des élèves ont donné la solution correcte. Comme nous l'avons déjà dit, l'apparition d'une équation similaire avec valeur absolue (EQU2) fait chuter le taux de réussite à 22%. Ce taux est cependant nettement supérieur à celui de REP3, ce qui tend à montrer que la régulation algorithmique qui joue dans EQU2 (exercice classique de 3ème) est relativement efficace.

La question JUX1 qui consiste à résoudre une équation avec plusieurs valeurs absolues obtient en gros le même taux de réussite (20%), mais si ces valeurs absolues sont emboîtées (JUX2), l'échec est général.

1.4 Application et expression de l'image.

Parmi les hypothèses initiales, nous avons retenu celle selon laquelle l'expression différente de $|x|$ selon le signe de x se heurtait à l'habitude des applications ayant une seule expression d'image. Si la question UNI1 a un taux de réussite honorable avec 34%, la question UNI2 provoque un grand nombre d'abstention avec un taux de 70%.

1.5 Soustraction dans les naturels et dans les relatifs.

Il s'agit, dans la dernière question, de regarder si l'interdiction de l'opération a - b dans $\mathbb{N}$ si $a < b$ qui a été levée dans $\mathbb{Z}$, ne laisse pas des traces quand la valeur absolue fait revenir dans $\mathbb{N}$. Peu d'abstentions à cette question, mais 11% seulement des élèves pensent que $|a - b|$ est positif même si a est un naturel inférieur à b.

3. Analyse des comportements.

Nous allons essayer ici de relever parmi les réponses, celles qui nous semblent caractéristiques de comportements annoncés dans les chapitres précédents.

En particulier, dans le fonctionnement de l'algorithme de l'étude de cas, les erreurs provoquées par les obstacles analysés précédemment sont manifestes. A la question EQU2 nous pouvons relever parmi les réponses :

- $|a + 2| = a + 2$ ou $a - 2$ (la valeur absolue change le signe + en signe -).
- Si $a > 0$ $|a + 2| = a + 2$, si $a < 0$ $|a + 2| = -a + 2$ (pour l'élève, seul le signe de a est susceptible de varier, dans la mesure où +2 est positif).
- $|a + 2| = 4$ donc $a = 2$ ou $a = -2$ (là aussi l'élève recherche la valeur absolue de a en résolvant $|a| + 2 = 4$ et ne se prononce pas sur le signe en donnant les deux réponses 2 et -2).
- Si $|a + 2| > 0$ alors $|a + 2| = a + 2$. Si $|a + 2| < 0$ alors $|a + 2| = -a - 2$ (le refus de la restriction aux nombres positifs qu'impose la valeur absolue).

Nous pouvons remarquer que dans les questions EQU2 et surtout JUX1, JUX2, l'algorithme fonctionne à peu près bien mais comme l'élève ne semble pas donner de sens à ce qu'il fait, les erreurs de calcul sont nombreuses et souvent l'exercice est inachevé, probablement par découragement devant la complexité atteinte.

Pour la dernière question, la plupart des élèves répondent que c'est impossible, puisque a est plus petit que b. D'autres précisent même que $|a - b|$ ne peut être égal à 2 avec a plus petit que b, puisque une valeur absolue est toujours positive.

CONCLUSION.

Cette étude est très fragmentaire. Elle contient un certain nombre d'hypothèses qui devraient être vérifiées soigneusement, ce qui n'a pas été fait par manque de temps et de structure d'accueil dans le premier cycle, comparable au centre d'observation de l'Ecole Michelet*.

Rappelons ces hypothèses : la notion de valeur absolue est considérée comme mineure dans l'enseignement et pourtant elle est au cœur de la compréhension des nombres relatifs. Elle persiste ainsi, en quelques lignes, dans les programmes, alors que l'échec sur ces questions est très important. Nous pensons alors qu'il ne s'agit pas de simples difficultés, mais que la notion de valeur absolue se heurte à de véritables obstacles que sont les conceptions du nombre comme mesure et celle des nombres relatifs comme différents des «nombre du Primaire».

Le système didactique réagit à cet échec d'abord en marginalisant la notion, à défaut de pouvoir la supprimer. Ensuite, le système use d'un certain nombre de régulations : l'utilisation de la valeur absolue, pour rénover certains objets d'étude, l'adaptation de la notion par introduction de notations spécifiquement scolaires, l'algorithmisation. Nous avons vu combien ces régulations étaient précaires.

Il serait présomptueux de ma part de préconiser à ce stade de ma recherche un autre mode d'enseignement de la valeur absolue. Nous pouvons tout au plus remarquer qu'il serait nécessaire de conduire une analyse détaillée de l'enseignement des nombres relatifs, similaire à celle qui a été faite sur les décimaux par une équipe de l'I.R.E.M. de Bordeaux. Il est probable que les obstacles signalés sont des obstacles nécessaires à l'acquisition de la notion de nombre. Il s'agit donc de mettre au point de nombreuses situations de rejet de ces obstacles.

Tout ce que nous pouvons dire sur l'enseignement de la valeur absolue, c'est qu'il nous parait tout à fait prématuré (et même trompeur) de l'introduire en même temps que les nombres relatifs. Cette notion ne devrait apparaître qu'au moment où l'élève est capable de la concevoir comme une application sur IR, ayant un certain nombre de propriétés, au même titre que la fonction sinus ou logarithme népérien. Ceci privera peut- être les enseignants d'un moyen commode de «pimenter» quelques exercices mais en regard des grandes difficultés associées à la valeur absolue, c'est un mince sacrifice.

* Il s'agit d'une école élémentaire de Talence, pourvue d'une salle d'observation aménagée pour filmer, enregistrer et réaliser dans de bonnes conditions des expériences didactiques.

Une autre éventualité peut cependant être envisagée : celle de considérer la valeur absolue non pas comme une conséquence immédiate de la définition d'un relatif mais comme une notion centrale pour l'apprentissage de ces relatifs et en particulier du plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. C'est cette dernière hypothèse qu'il faudrait approfondir en s'intéressant à l'apprentissage des nombres relatifs.

BIBLIOGRAPHIE.

BACHELARD (1938) *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Vrin, 1975.

BROUSSEAU (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 1983, Vol. 4 n° 2.

BROUSSEAU (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 2 n° 1, pp. 37-127.

CATALAN (1860) *Traité élémentaire des séries.*

CHEVALLARD (1982) Pourquoi la transposition didactique ? (A paraître).

GLAESER (1981) Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 2 n° 3.

HUMBERT (1898) *Leçons d'analyse de l'Ecole Polytechnique.*

JORDAN (1893) *Leçons d'analyse de l'Ecole Polytechnique.*

LIPIETZ (1979) *Crise et inflation. Pourquoi ?* Paris : Maspéro, 1979.

MACHEREY/BALIBAR Epistémologie. *Encyclopédie Universalis.*

NAVIER (1840) *Leçons d'analyse de l'École Polytechnique.*

PIAGET (1975) *L'équilibration des structures cognitives.* Paris : P.U.F. 1975.

SCHNEIDER (1979) *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en seconde.* Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux.

VERGNAUD (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 2 n° 2.

I.R.E.M. de BORDEAUX

QUESTIONNAIRE SUR LA VALEUR ABSOLUE

Ce questionnaire n'a pas pour but de vous juger, mais d'établir si les questions posées permettent de mettre à jour les problèmes rencontrés dans l'utilisation de la valeur absolue. Merci pour votre collaboration.

REP1 : Quel est le maximum de l'ensemble $E = \{10, -1\,253, 27, -3\}$?

REP2 : Si a est un nombre réel, quel est le signe de $-a$?

REP3 : Si $|-a| = 1$, que vaut a ?

EQU1 : Si $2a + 3 = 1$, que vaut a ?

EQU2 : Si $|a + 2| = 4$, que vaut a ?

JUX1 : Résoudre l'équation $|x + 1| + |x + 3| = 5$

JUX2 : Résoudre l'équation $||2x + 3|-4| = 6$

UNI1 : Simplifier la fraction $\frac{|a|}{a}$

UNI2 : Définir la fonction $f : x \longmapsto |x + 1|$ sans utiliser la valeur absolue

---

GENE : Si l'entier a est inférieur à l'entier b, peut-on avoir $|a - b| = 2$?
