

REPRESENTATION D'ASSEMBLAGES DE CUBES AU CYCLE MOYEN ET EN CINQUIEME *

«deuxième partie»

Annie BESSOT
Madeleine EBERHARD
Mise au point pour la cinquième par Marie-Thérèse CHABROULET
I.R.E.M. de Grenoble

PARTIE II : VUES ET DESSINS CODES D'EMPILEMENTS.

Matériel.

Des cubes à faces lisses (non emboîtables). Chaque cube est de 3 couleurs, les faces opposées étant de même couleur.

Avec un tel matériel, les seules constructions possibles avec la contrainte 1 sont des empilements.

– Objectifs.

Le codage numérique mis en place dans la séance précédente permet aux élèves de représenter simplement et de manière univoque n'importe quel empilement. Cette représentation, qui revient à donner l'emplacement des piles de cubes et leur hauteur, est très efficace pour communiquer ; mais elle met peu de propriétés géométriques en évidence. C'est pour cela que nous avons voulu faire travailler les élèves sur les «vues», représentation plus complexe.

– Cette représentation impose à l'observateur des changements de point de vue dont il doit rendre compte. Cette activité nous semble une expérience essentielle pour «voir dans l'espace».

– Les «vues», en conservant et en privilégiant certaines propriétés géométriques font des empilements un objet géométrique plus riche : elles permettent aux élèves de travailler implicitement sur des notions telles que parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale...

* La première partie de cet article a été publiée dans «petit x» n° 2. Pour ce qui concerne le C.M. cet article a été publié dans «Grand IN» n° 26, Ed. IREM-CRDP de Grenoble

Il nous a semblé important, également, d'amener les élèves à passer d'une représentation à l'autre (vues et dessins codés) et de provoquer ainsi leur comparaison à travers leur fonctionnement.

Séances 4 et 5 : Mise en plan de la notion de «vue». (7 et 23 mars).

★★★ DEFINITION DE CONTRAINTES SUPPLEMENTAIRES QUE DEVRONT RESPECTER LES EMPILEMENTS:

Chaque enfant reçoit 6 cubes de 3 couleurs (jaune, rouge et bleu).

Après que les élèves avaient remarqué que 2 faces opposées d'un cube ont la même couleur, M. introduit une nouvelle contrainte.

M : «Les faces jaunes doivent être parallèles au plafond. Construisez un assemblage comme cela».

Le mot «parallèle» ne soulève pas de difficulté dans ce contexte.

Puis M. ajoute des contraintes de disposition pour les faces rouges (parallèles au tableau) et donc pour les faces bleues (parallèles aux fenêtres).

★★★ PRECISION SUR LA LEGENDE DES DESSINS CODES (codage numérique).

M : «La dernière fois, on a remarqué qu'il y avait une façon assez simple de décrire certains assemblages. Puis en discutant, on est arrivé peu à peu à cette description» :

2	1
1	2

(M. fait ce dessin au tableau et rappelle la signification des nombres).

M : «Chacun va construire cet assemblage avec ses cubes. Essayez de mettre vos cubes comme on l'a dit : les faces jaunes parallèles au plafond, les faces rouges parallèles au tableau...».

Les enfants réalisent sans problème la construction. Puis M. fait remarquer : «la plupart d'entre vous avez, devant vous, à votre droite, une tour de 2 étages et, à gauche, vers le tableau, une tour de 2 étages» et elle ajoute au dessin codé du tableau des indications supplémentaires de position :

tableau

2	1
1	2

élève

M. commente : «Avec ces indications, il faut respecter l'orientation».

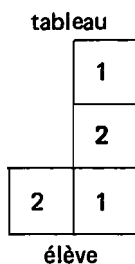
Les élèves rectifient, si c'est nécessaire, la position de leur construction.

★★★ INTRODUCTION DE LA NOTION DE VUE.

Chaque élève reçoit la fiche suivante.

VUES D'UN ASSEMBLAGE DE CUBES

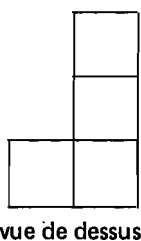
Voici le codage d'un assemblage de cubes :



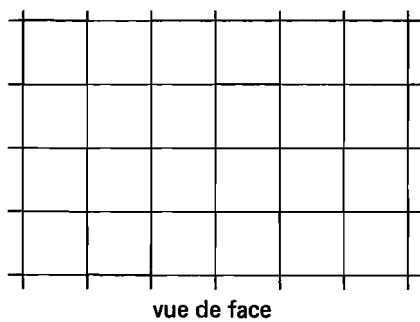
1. Réalise cet assemblage en plaçant chaque cube de la manière suivante :

- les faces jaunes parallèles au plafond,
- les faces rouges parallèles au tableau,
- les faces bleues parallèles aux fenêtres.

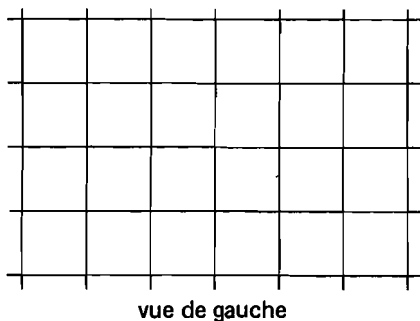
Voici la vue de dessus de cet assemblage. C'est ce que tu vois quand tu regardes par-dessus et que tu ne vois que des faces jaunes.



2. Dessine la vue de face de l'assemblage. C'est ce que tu vois devant toi en rouge.

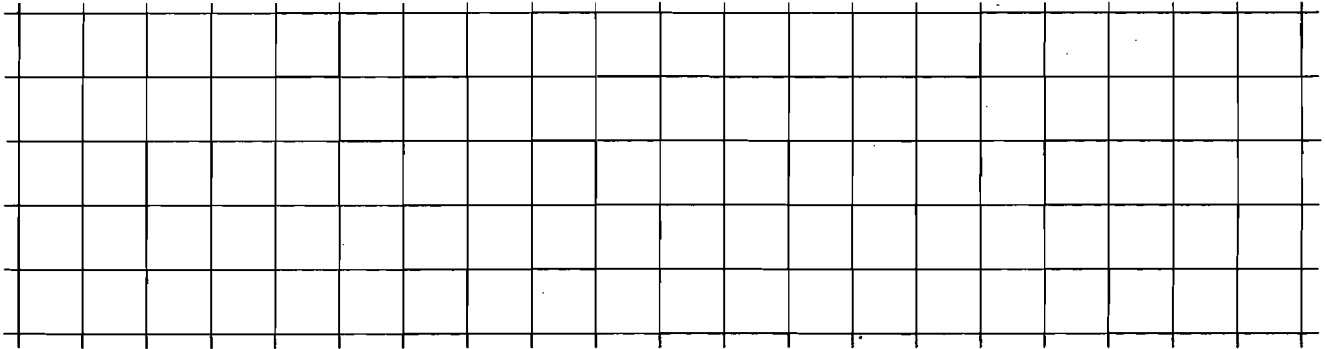
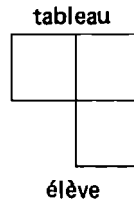


3. Dessine la vue de gauche. C'est ce que tu vois devant toi si tu te mets dos à la fenêtre.



Verso

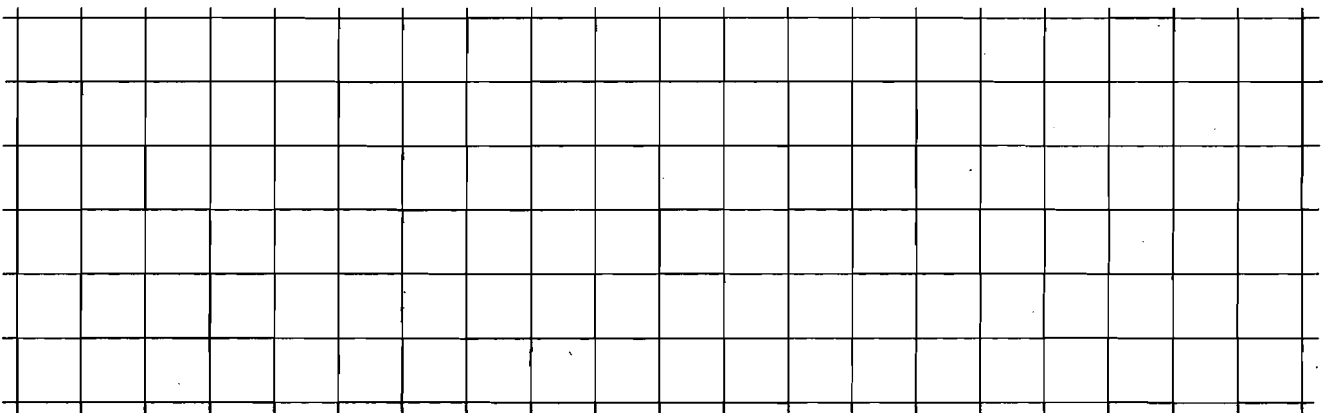
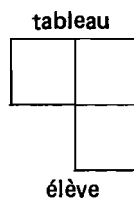
4. Avec 5 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



- a) Quand tu en as trouvé 6, demande la fiche correction et vérifie.
- b) Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
- c) Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :

.....

5. Avec 6 cubes, trouve et code tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



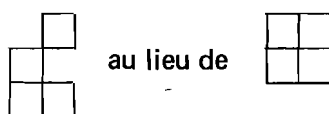
- a) Quand tu en as trouvé 10, demande la fiche correction et vérifie.
- b) Numérote tes assemblages comme sur la fiche correction.
- c) Regroupe les numéros des assemblages qui ont la même vue de gauche :

.....

Les élèves réalisent sans problème la construction du 1. Certains enfants contestent la définition de la **vue de dessus**.

E : «On voit plusieurs vues. On en voit (des cubes) qui sont plus hauts que d'autres et on ne le voit pas sur le dessin».

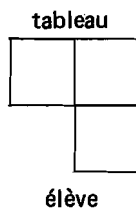
Un autre répond : «On le voit parce qu'on est mal placé : si on est bien placé et si les cubes sont bien placés, on ne le voit pas, on voit comme sur le dessin». Un accord se fait dans la classe sur cette justification et M. s'y réfère à propos de la **vue de face** : «C'est ce qu'on voit de face en mettant la tête presque au niveau de la table ; c'est quand on ne voit que du rouge. Comme pour la vue de dessus, il ne faut pas faire attention aux cubes qui sont plus en avant». Cette convention d'absence de représentation pour les décalages des faces, imposée par le dessin de la vue de dessus, va poser des problèmes au moment de son utilisation : par exemple Jean-Noël propose comme «vue de face» :



Il représente le décalage des faces par la non contiguïté des carrés. On retrouve également cette erreur dans les dessins de vue de gauche.

Nous nous attendions à cette erreur, liée au conflit entre cette convention et la perception ; aussi sommes-nous intervenues immédiatement chaque fois qu'elle est apparue.

Chaque élève va à son rythme mais à la fin de la séance 4 tous les élèves ont trouvé et codé les assemblages différents formés de 5 cubes dont la vue de dessus est :

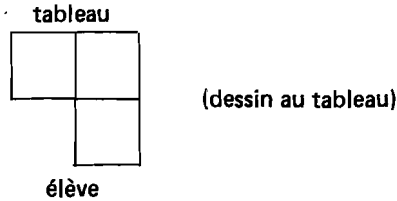


Après avoir comparé leurs propositions avec la fiche de correction fournie par M., certains abordent le même problème avec 6 cubes. Par contre, très peu d'élèves donnent des assemblages ayant même vue de gauche.

Le début de la séance 5 est consacré à des commentaires sur les représentations et à la correction des erreurs relevées par M. sur les fiches des élèves. Durant cette partie collective les élèves n'ont pas leur fiche.

▪ **Sens des nombres du codage numérique.**

M : «J'ai regardé vos fiches. Vous avez cherché tous les empilements de 5 cubes qui avaient pour vue de dessus :



J'ai trouvé ce codage :



Est-ce que ça va ?».

Es : «Non ! il y a 6 cubes».

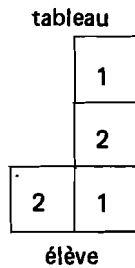
M : «Comment le savez-vous ?».

Es : «On calcule les nombres», «on additionne les nombres».

▪ **Vue de dessus, lien avec le dessin codé.**

Trois élèves ont complété la vue de dessus, coloriée en jaune, par les nombres du dessin codé, confondant les deux notions. Quand il n'y a pas confusion, les élèves explicitent difficilement le lien existant entre vue de dessus et dessin codé, comme va le montrer ce qui suit.

M. dessine au tableau le dessin codé du début de la fiche.



M : «Certains ont dit, c'est facile de trouver la vue de dessus. Pourquoi ?».

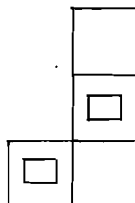
Un seul élève réagit : «On regarde bien au-dessus»

ce qui n'établit pas de rapport entre vue de dessus et dessin codé !

M. fait refaire par chacun la construction. Celle-ci va rester en place durant toute la partie collective.

M : «Comment pourrait-on donner très vite la vue de dessus?».

Un élève propose au tableau :



Nos conventions sur les vues de dessus ne sont pas encore en place ! Nous retrouvons la confusion entre dessin codé et vue de dessus.

M : «Qu'est-ce que vous en pensez?».

E : «On ne voit pas ce qu'elle a mis dessus. Il faut enlever...».

M : «Ce qui te gêne, ce sont les carrés qui sont à l'intérieur?».

E : «Oui».

M : «En effet, on avait décidé qu'on ne faisait pas attention à la hauteur (des piles)».

M. efface les carrés.

M : «Est-ce que vous n'avez pas une idée qui aurait permis d'aller plus vite?».

Deux doigts seulement se lèvent et M. insiste : «Quand on regarde les deux dessins (vue de dessus et dessin codé) est-ce qu'ils ont quelque chose de semblable?».

Es : «La forme».

M : «C'est étonnant?».

Es : «Non, c'est la même construction».

M : «Comment peut-on passer de l'un à l'autre (du dessin codé à la vue de dessus)?».

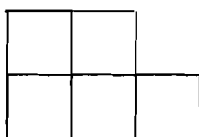
E : «En enlevant les nombres».

Tous les élèves n'en semblent pas persuadés.

▪ Les erreurs concernant la vue de gauche.

1ère erreur.

M. dessine au tableau la «vue de gauche» proposée par 4 élèves :



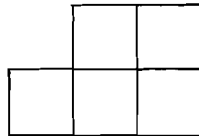
M : «Qu'en pensez-vous ?».

Céline : «Le carré devrait être de l'autre côté».

M : «Quel carré ? Quel côté ?».

Céline : «Le premier carré à droite devrait être à gauche».

On dessine au tableau la proposition de Céline.



M : «Etes-vous d'accord ?».

Les élèves se mettent d'accord sur cette dernière proposition.

M : «Qui peut expliquer cette erreur ?». (M. montre le premier dessin).

E : «Là, c'est la vue de droite».

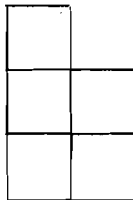
M : «Vérifiez».

E : «Oui, on voit exactement la première solution».

M : «Il faut bien faire attention : certains se sont trompés tout simplement de position».

2ème erreur.

La maîtresse dessine au tableau la vue de gauche (erronée) donnée par 2 élèves.



M : «Qui veut expliquer pourquoi ça ne va pas ?».

Les élèves réfléchissent longuement.

Christine : «On le regarde comme ça (elle penche la tête) : ils ont penché la tête».

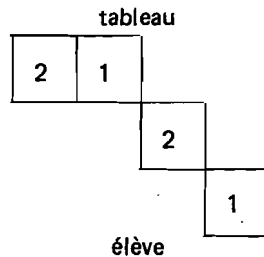
M : «Ils ont tellement penché la tête qu'ils l'ont relevée (la vue de gauche !))».

Christine : «Ils l'ont mise debout».

M. indique par un trait rouge sur la vue de gauche et sur celle qui est «relevée» le dessin des arêtes qui touchent la table : «il faut faire attention que les arêtes qui touchent la table soient horizontales».

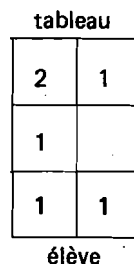
M. fait vérifier la compréhension de la vue de gauche d'un empilement sur deux exemples.

Exemple 1.



C'est la première fois qu'est proposée une telle construction non réalisable d'un seul tenant avec des cubes accrochables.

Exemple 2.



Des explications s'avèrent nécessaires pour 3 élèves qui relèvent encore leur vue de gauche.

★★★ CERTAINES LIMITES DES «VUES».

Une vue ne suffit pas pour décrire un empilement.

Ce problème est abordé au verso de la fiche individuelle, puisque l'on demande aux enfants de déterminer tous les empilements de 5 ou 6 cubes correspondant à une vue de dessus.

Deux vues ne suffisent pas non plus !

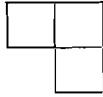
Nous soulevons ce problème (au verso de la fiche) quand nous demandons aux enfants de regrouper les assemblages de même nombre de cubes qui ont même vue de dessus et même vue de gauche. Dans cette partie de la fiche l'élève doit analyser son codage pour regrouper les empilements : en effet, il ne dispose que du nombre de cubes suffisant pour une construction.

Nous verrons par la suite (séance 7) qu'en général trois vues ne représentent par un empilement de façon univoque.

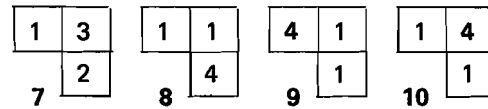
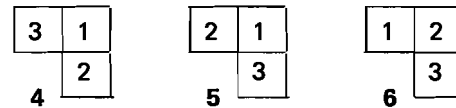
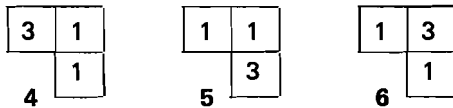
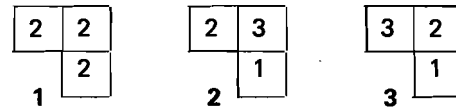
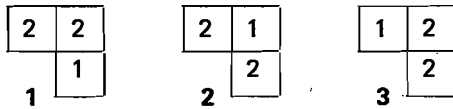
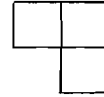
A la fin de la séance, chaque enfant reprend sa fiche, la corrige et la termine.

Voici les fiches solution dont les élèves pouvaient disposer pour vérifier leurs propositions et les numéroter.

Avec 5 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est :



Avec 6 cubes. Voici tous les assemblages différents dont la vue de dessus est



Avec 5 cubes, les numéros des empilements qui ont même vue de gauche sont : 2 et 3 ; 4 et 6.

Avec 6 cubes : 2 et 3 ; 5 et 6 ; 7 et 4 ; 9 et 10.

— Résultats.

24 élèves terminent la fiche sans erreur.

9 élèves laissent leur fiche inachevée : sur ces 9 élèves, 1 seul ne trouve pas tous les empilements avec 6 cubes ; 3 autres ne donnent aucun groupe d'empilements ayant même vue de gauche (avec 6 cubes).

Mais en définitive, tous les élèves ont réussi l'exercice avec 5 cubes.

Séances 6 et 7 (30 mars et 27 avril) – Jeu mettant en rapport vues et dessin codé.

★★★ CONSTRUCTION D'UN EMPILEMENT CORRESPONDANT A 3 VUES DONNEES.

Chaque enfant reçoit 8 cubes de 3 couleurs et la fiche suivante.

NOM :

Prénom :

classe :

FICHE 3

VUE – REVISIONS

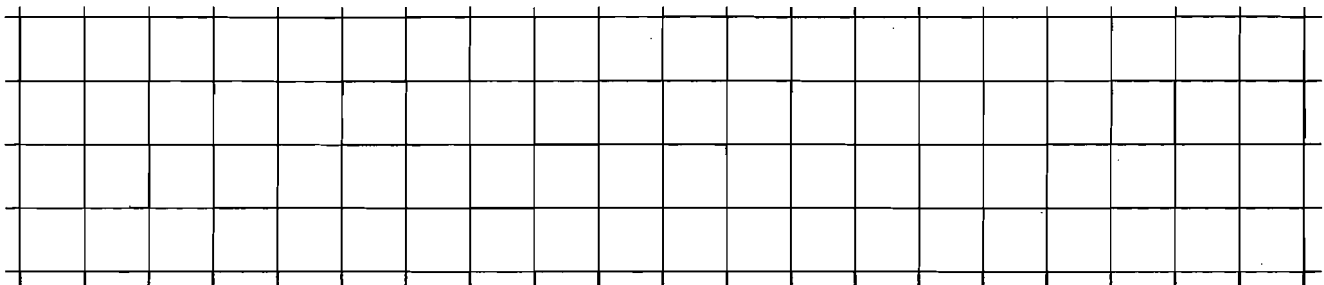
1. Réalise cet assemblage :

tableau

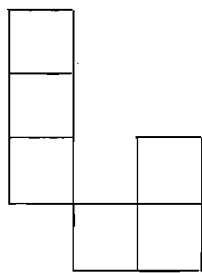
2	1	1
	1	3

élève

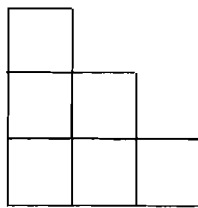
2. Dessine sa vue de dessus (jaune), sa vue de face (rouge) et sa vue de gauche (bleue) :



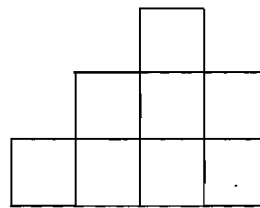
Voici les trois vues d'un assemblage :



dessus



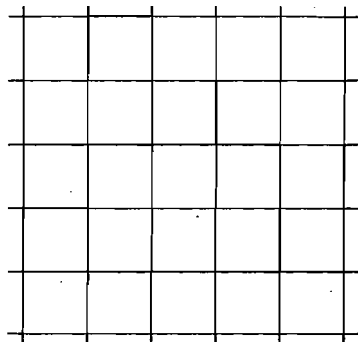
face



gauche

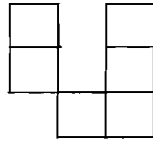
3. Colorie ces vues avec les couleurs qui conviennent.

4. Réalise l'assemblage et code-le.

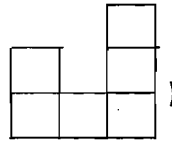


On retrouve dans la première partie, des difficultés (vite aplanies) pour utiliser la convention de non représentation des décalages.

– Par exemple Catherine propose comme «vue de face» :



(au lieu de



Mais c'est la seconde partie de la fiche qui va véritablement poser un problème aux élèves, puisque nous avons été amenées à aider individuellement 9 élèves.

En effet pour trouver un empilement correspondant aux 3 vues, il s'agit à la fois de coordonner les informations fournies par chacune des vues et de prendre conscience du rôle particulier de la vue de dessus qui donne la base de l'empilement.

*De plus, la convention utilisée ici (absence de représentation des décalages des faces) peut être un obstacle à la prise en compte des possibilités de décalages. Par exemple, certains élèves se trouvent bloqués après avoir réalisé un empilement plan respectant la vue de face (

3	2	1
---	---	---

)*

★★★ CONSTRUCTION DU JEU.

Chaque élève reçoit 10 cubes de 3 couleurs et des fiches de bristol (une fiche blanche et une fiche jaune) à petits carreaux (5mm X 5mm).

Au verso de la fiche distribuée en début de séance, figurent les explications pour la réalisation du jeu :

REALISATION D'UN JEU

1. Prépare deux fiches en carton à petits carreaux.

<p>Nom :</p> <p>PROBLEME N°</p>

<p>Nom :</p> <p>SOLUTION</p> <p>du problème n°</p>

2. Réalise un assemblage avec le nombre de cubes que tu veux.
3. Sur la fiche «PROBLEME», dessine et colorie les 3 vues de ton assemblage en représentant une face d'un cube par 4 petits carreaux.
4. Sur la fiche «SOLUTION», code ton assemblage.
5. Fais plusieurs fiches «PROBLEME» – «SOLUTION» et n'oublie pas de les numéroter.
6. **Et maintenant jouons.**
 - a) Prends une fiche «PROBLEME».
 - b) Trouve un assemblage et code-le.
 - c) Compare ton codage à celui de la fiche «SOLUTION».
 - d) Si tu n'es pas d'accord, montre ton codage à ton professeur.
 - e) S'il n'y a pas d'erreur, reproduis ton codage sur la fiche «SOLUTION» et écris ton nom en-dessous.

Les fiches blanches seront les fiches «Problème», les fiches jaunes les fiches «Solution». Un numéro est attribué à chaque enfant pour faciliter le tri et la manipulation des fiches : ce numéro est inscrit à l'emplacement n°.....

A la fin de la séance 6, tous les enfants ont réalisé un problème et sa solution. Certains en ont proposé plusieurs sur des couples de fiches différents ; pour distinguer ces problèmes, ils ajoutent à leur numéro une lettre de l'alphabet différente pour chaque problème.

★★★ REALISATION DU JEU (séance 7).

Chaque enfant dispose de 10 cubes.

Trois semaines se sont écoulées depuis la séance 6 : M. fait rappeler par les élèves ce qui figure sur les fiches jaunes et blanches. Puis, elle rend leur fiche aux 8 élèves qui ont fait des erreurs et les leur fait corriger : 1 erreur porte sur la vue de dessus, 3 sur la vue de face, et 5 sur la vue de gauche.

Pour faciliter le déplacement des élèves (33), le jeu s'organise autour de trois endroits : à chaque endroit sont disposées 2 boîtes, l'une marquée «problèmes» (des numéros 1 à 11 par exemple), l'autre marquée «solutions» (des numéros 1 à 11).

Consigne :

Dans le fond de la classe, il y a 3 endroits où nous avons mis des fiches problèmes et leurs solutions. Vous allez prendre chacun un problème et essayer de le résoudre. Vous écrivez au brouillon le codage de votre construction et vous le comparez à celui

de la fiche solution du problème. Vous avez réussi si vous trouvez le même codage. Quand vous aurez résolu 3 problèmes, je vous donnerai un problème plus difficile que j'ai mis à part.

Nous avons retiré des lots de problèmes ceux que nous qualifierons d'ambigus ; un problème ambigu est un problème qui peut avoir d'autres solutions que celle proposée par la fiche. En effet, trois vues ne déterminent pas, en général, un empilement unique, même si le nombre de cubes est connu. Dans cette première partie du jeu, il n'y a donc pas de difficultés pour valider la solution proposée.

La principale difficulté du jeu est toujours d'envisager les diverses possibilités d'empilement liées à une même vue : l'aspect ludique de l'activité conduit tous les enfants à la surmonter plusieurs fois.

Exemples de fiche «Problème».

Problème sans ambiguïté.

Nom : Bernard n° 24

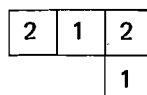
Problème

J	J	J
		J

B	
B	B

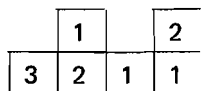
R		R
R	R	R

Solution de Bernard :



Problème ambigu :

solution de Stéphane :



il existe deux autres solutions (avec 10 cubes).

Nom : Stéphane n° 27
A

Problème

R			
R	R		R
R	R	R	R

	J		J
J	J	J	J

face dessus

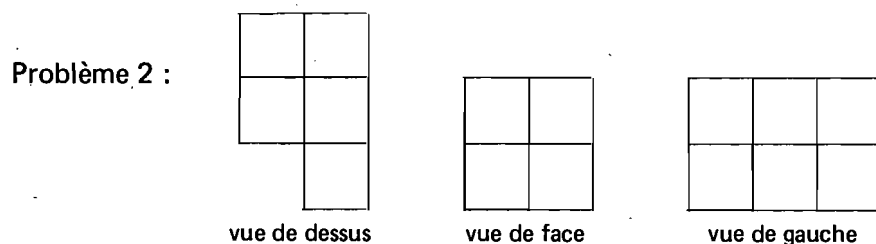
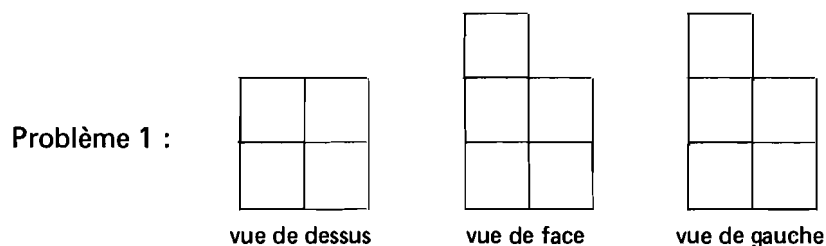
	B
B	B
B	B

gauche

A ceux qui ont résolu 3 problèmes non ambigus, M. donne un problème plus difficile (problème ambigu) : certains élèves trouvent avec surprise une solution qui n'est pas celle proposée par la fiche solution. Il est alors intéressant de demander de rechercher systématiquement les solutions associées à un même problème. C'est ce que nous avons proposé à l'ensemble de la classe.

M. écrit au tableau :

Trouvez toutes les solutions des problèmes suivants (avec 10 cubes maximum).



Pour ces deux problèmes, il y a d'abord un travail individuel puis une représentation collective des solutions. M. suscite de nouvelles propositions tant que toutes les solutions n'ont pas été trouvées : à la fin de la séance, les 2 problèmes sont complètement résolus.

Voici les 5 solutions du problème 1 :

4	2
2	2

4	1
2	2

4	2
2	1

4	2
1	2

4	1
1	2

Voici les 8 solutions du problème 2 :

2	2
2	2
2	

2	1
2	2
2	2

2	2
2	1
2	2

2	1
2	1
2	2

2	2
1	2
2	2

2	1
1	2
2	2

1	2
2	2
2	2

1	2
2	1
2	2

Dans cette dernière partie, nous avons constaté que certains enfants passaient directement des vues au dessin codé, sans construire effectivement d'empilements. Cette intériorisation reste encore fragile puisqu'elle peut conduire à des propositions de dessins codés ne respectant pas la vue de gauche.

Voici les seules erreurs commises par les élèves :

– par exemple, pour le problème 1, Pascal propose :

1	2
4	2

pour le problème 2, Jean-Christophe propose :

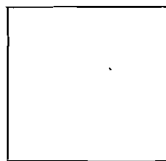
2	2
2	2
	1

PROLONGEMENTS EN CINQUIEME.

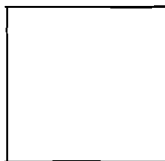
★★★ INTRODUCTION DE NOUVELLES CONVENTIONS SUR LES VUES POUR QU'À UN PROBLÈME POSE NE CORRESPONDE QU'UNE SEULE SOLUTION.

1. On part du problème suivant :

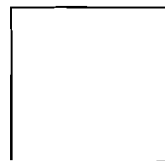
Une face d'un cube est représentée par 1 carré 1 cm X 1cm.



vue de dessus



vue de face



vue de gauche

Ce problème a 7 solutions.

2	2
2	2

2	1
2	2

1	2
2	2

2	2
1	2

2	2
2	1

1	2
2	1

2	1
1	2

On convient de marquer sur les vues les arêtes des cubes qui sont des arêtes du solide que l'on voit lorsqu'on le regarde de dessus, de face ou de gauche.

Vues avec la nouvelle convention

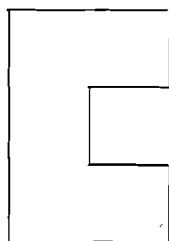
solutions	vue de dessus	vue de face	vue de gauche				
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	2	2	2			
2	2						
2	2						
<table border="1"><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	2	1	2	2			
2	1						
2	2						
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	2	2	2			
1	2						
2	2						
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	2	1	2			
2	2						
1	2						
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	2	2	2	1			
2	2						
2	1						
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	1	2	2	1			
1	2						
2	1						
<table border="1"><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	2	1	1	2			
2	1						
1	2						

Pour ce problème, à chaque ensemble de 3 vues avec la nouvelle convention correspond une seule solution.

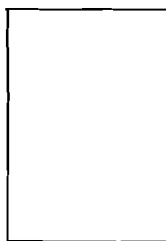
2. Est-ce toujours vrai ?

On étudie alors le problème suivant proposé par un élève.

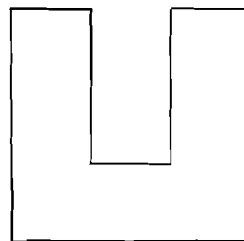
Une face d'un cube est représentée par 1 carré 1cm X 1cm (ou encore 4 carreaux des fiches de bristol !).



vue de dessus



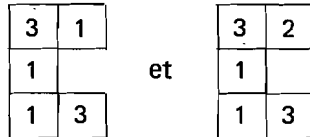
vue de face



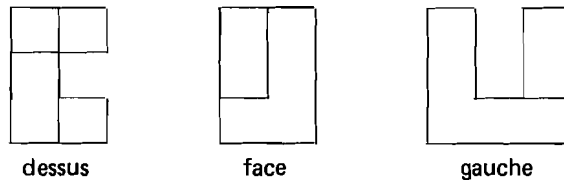
vue de gauche

Le grand nombre de ses solutions conduit certains élèves à organiser leur recherche. Ils trouvent 19 solutions.

Parmi ces 19 solutions, en existe-t-il qui ont le même ensemble de 3 vues avec la nouvelle convention ?

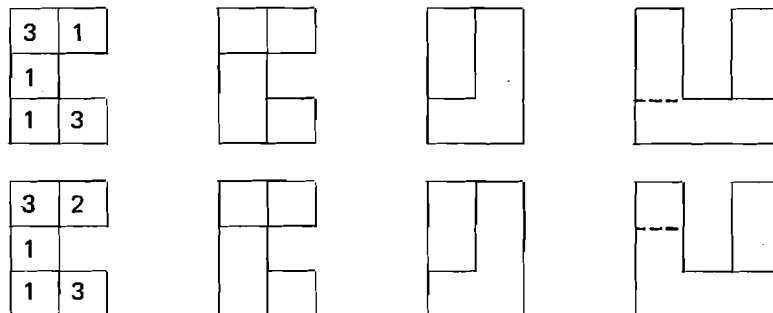


ont les mêmes vues avec la nouvelle convention :



On introduit alors **une convention supplémentaire** qui va différencier les ensembles de 3 vues de chacune de ces deux solutions : on représente en pointillés les arêtes des cubes qui sont **des arêtes du solide cachées** lorsqu'on le regarde de dessus, de face ou de gauche

Avec cette convention supplémentaire on obtient :



On cherche alors si toutes les solutions ont des vues différentes avec les deux conventions concernant les arêtes vues et cachées.

Prolongement pour le lecteur.

Cette dernière convention ajoutée à la première permet-elle toujours d'associer à l'ensemble de 3 vues **une seule solution** ?

Réfléchissez et peut-être trouverez-vous un empilement * pour lequel ce n'est pas vrai...

* Le nombre de cubes dont on dispose n'est pas limité.