LA GÉOMÉTRIE TRAITE-T-ELLE DES ILLUSIONS D'OPTIQUE ?

QUATRE ÉLÈVES AUX PRISES AVEC LE TRIANGLE APLATI

Ruhal FLORIS [1]
FPSE, Université de Genève [2]

Tu sais donc qu'ils se servent de figures visibles et raisonnent sur elles en pensant, non pas à ces figures, mais aux originaux qu'elles reproduisent ; leurs raisonnements portent sur le carré en soi et la diagonale en soi, non sur la diagonale qu'ils tracent, et ainsi du reste ; des choses qu'ils modèlent ou dessinent, et qui ont leurs ombres et leurs reflets dans les eaux, ils se servent comme autant d'images pour chercher à voir ces choses en soi qu'on ne voit autrement que par la pensée.

Platon, La République VI.

L'élève : Ben, le trait touche deux fois le rond !
Le maître : Non ! La droite et le cercle ont deux points d'intersection.

En classe.

I. A PRIORI

I.1. Rappel épistémologique

Cette étude concernant le "triangle aplati" prolonge celle que Gilbert Arsac a proposé aux lecteurs du n° 37 de Petit x (Arsac, 1994 ; voir aussi Arsac et al., 1992). Rappelons qu'il s'agit de la question de l'existence d'un triangle propre (non "plat") ayant

---

[1] Adresse de l'auteur en fin de volume. E-mail : floris@fapse.unige.ch.

[2] Pour cette étude, nous avons bénéficié du travail effectué par les participants aux ateliers des Journées Didactiques de La Fouly de 1994. Nous les remercions. Les actes de ces journées sont en cours d'édition. On pourra y trouver la retranscription complète des échanges du groupe de quatre élèves que nous avons observés.

pour mesures de côtés a, b et c avec c = a+b. Rappelons aussi qu'il n'est pas possible de se prononcer sur la base d'un dessin, même très précis [3], mais que "l'intuition" ou une "expérience mentale" peut convaincre certains élèves qu'un tel triangle n'existe pas [4]. Le point de vue épistémologique étant traité de façon approfondie dans l'article cité, nous le prenons comme point de départ. On touche ici aux fondements de la géométrie, avec une histoire complexe et pluri-millénaire. "Qu'est-ce que la géométrie ?" est bien la question qui se pose : science de l'espace, des propriétés des objets spatiaux et des relations entre eux ou ensemble de théories déductives basées sur des axiomes plus ou moins "évidents" ? Si les mathématiciens ont fait leur choix, celui-ci ne fut pas immédiat, puisque 2000 ans séparent les postulats d'Euclide, justifiés par l'espace, de la problématique formelle déclenchée par la découverte, ou l'invention, de géométries non euclidiennes. On sait maintenant que la non existence du triangle en question correspond à un choix axiomatique. Au congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris, le mathématicien Hilbert présente lui-même une géométrie pour laquelle un tel triangle existe. Mais il faut pour cela renoncer à deux groupes d'axiomes sur cinq, et en particulier au postulat des parallèles d'Euclide (Hilbert, 1971, page 191).

I.2. Une situation fondamentale ?

A première vue, le problème du triangle aplati semble avoir un caractère fondamental au sens de la théorie des situations :

"*Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale...*" (Brousseau, 1976).

Mais dans ce cas, la connaissance en question est un peu particulière puisque la solution est... qu'il n'y a pas de solution et qu'il s'agit donc d'en choisir une de façon arbitraire, par exemple en posant le principe que la droite est le (seul) plus court chemin entre deux points. On peut se demander quel est le jeu mathématique effectif modélisé par le "jeu du triangle aplati". Car l'incertitude n'apparaît que lorsque l'un des joueurs se propose d'effectuer des vérifications empiriques, sur un dessin. Et dans ce cas, ce n'est pas l'exemple de géométrie étudié par Hilbert que l'on modélise. Avec le dessin, ce qui intervient de façon prépondérante, c'est l'épaisseur des traits. Pour le voir, imaginons une "remodélisation" du dessin en considérant comme "points" les carrés d'un quadrillage ou les pixels d'un écran d'ordinateur et comme "droites" l'ensemble des "points" traversés par la droite euclidienne rejoignant les centres des carrés de deux "points" distincts donnés.

---

[3] Ce point peut être discuté mathématiquement. Voir plus loin paragraphe III.2.

[4] Dans son article, G. Arsac précise les caractéristiques de cette expérience mentale (pp 14-15) :
1) L'affirmation soutenue par une expérience mentale est plus forte qu'un résultat contradictoire obtenu par la pratique graphique.
2) Cette affirmation est mise en relation avec l'égalité entre la longueur du plus grand côté et la somme des longueurs des deux autres (c=a+b).
En ce qui concerne l'intuition, nous nous référons à Gonseth.

Fig. 1a : côté AB

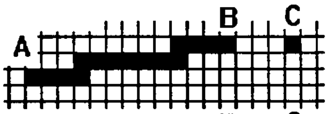
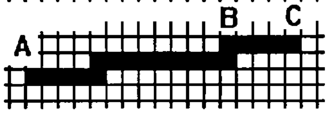


Fig. 1b : côté AC



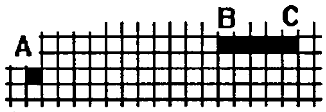


Fig. 1c : côté BC

Figure 1

Les schémas ci-dessus nous montrent alors les trois côtés d'un triangle dont tous les sommets appartiennent à la "droite" définie par les "points" A et C (Fig. 1b) mais tel que le côté AB ne soit pas contenu dans cette droite (comparer les pixels correspondant au segment AB sur Fig. 1a et Fig. 1b). Dans cette "géométrie", les points A et B appartiennent à deux "droites" différentes, (AB) et (AC) ! L'un des axiomes de base de toute géométrie n'est pas vérifié. Finalement, le jeu du triangle aplati est donc plus complexe que prévu, puisque l'expérience matérielle nous emmène dans une géométrie très curieuse où l'axiome non vérifié n'est pas celui qu'on croit. Quant à l'expérience mentale, elle donne une réponse unique et il n'y a rien à savoir, donc aucun axiome à poser. Il en résulte qu'au moins deux jeux fort différents sont possibles [5].

I.3. Quelle analyse a priori ?

On vient de voir que le problème dépend fortement du rapport au dessin de celui qui le traite. Il dépend aussi de l'institution dans laquelle il est posé. Est-ce en classe, en groupe, à des élèves seuls ? L'analyse a priori doit en tenir compte, en utilisant la typologie des situations, ainsi que la structuration des milieux proposés par Guy Brousseau. Cette structuration nous permet de distinguer en particulier le niveau de l'action, quasiment "psychologique", où l'élève est seul face au problème - qui est peut-être une simple tâche à réussir, d'un niveau réflexif par rapport à l'action, avec vérification du résultat par lui-même (niveau adidactique) ou par le maître (niveau didactique) [6].

I.4. Le problème posé

Nous prenons en considération les énoncés suivant :

E1 : Existe-t-il un triangle de côtés a, c, b ?
E2 : Peut-on construire un triangle de côtés a, c, b ?
E3 : Construire un triangle de côtés a, c, b.

Il s'agit toujours d'un triangle tel que a+b=c. Nous discuterons plus loin du choix des valeurs de a, b et c. Pour l'instant, nous poursuivons l'analyse sur la base de

---

[5] Le logiciel Cabri-Géomètre traite explicitement ce problème en assujettissant les tracés sur l'écran aux règles d'une géométrie axiomatique. Même si ce n'est pas le cas si l'on considère les pixels de l'écran, avec ce logiciel, deux cercles ne peuvent avoir que deux, un ou aucun point d'intersection. Et lorsque l'on parvient à faire afficher les mesures 4, 7 et 11 comme celles des côtés d'un triangle, il s'agit là d'une question d'arrondi.

[6] Nous concevons ces différents niveaux emboîtés comme des constructions théoriques nous permettant de "lire" la situation didactique.

l'énoncé E3.

I.5. Le jeu isolé de l'élève

Si les règles régissant l'action de l'élève sont uniquement celles correspondant à la suite de gestes à accomplir pour tracer/construire un triangle, s'il ne peut pas s'appuyer sur d'autres connaissances ou sur une modélisation mentale, la réponse à la question E1 ne dépend que du résultat du tracé et la réponse la plus probable est oui, étant donné la manière standard de pratiquer avec une règle et un compas, en commençant par le plus grand côté, avec des mesures d'écartement prises sur la règle graduée (Verkerk, 1990). Thomas, un des élèves que nous avons observé est confronté à ce résultat, qui pour lui fait problème :

Avec un compas, 7 et 11, ils sont plus grands qu'avec une règle... 11 et 4 ! *(Thomas est troublé. Il s'agit en fait de 7 et 4)*

Mais lorsque l'élève a les moyens de prendre du recul sur son action, de l'anticiper d'une manière ou d'une autre, on peut constater que son jeu se caractérise par un rapport plus souple envers les tracés effectifs, renonçant parfois à certains traits. Il y aura plus souvent des schémas que des constructions respectant les mesures données. Et dans ce cas l'élève répond non. A l'instar du mathématicien, il fait référence à une figure "idéale", se plaçant dans une problématique théorique.

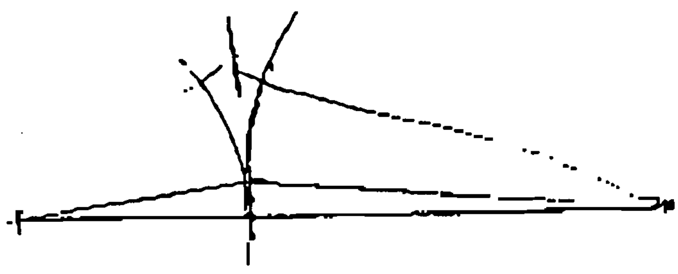


Figure 2. Une construction de Mélanie reprise en schéma par Thomas.

Dans les deux cas envisagés, l'action aboutit donc. Sans impasse, sans questionnement. Telle quelle, la situation peut difficilement favoriser une évolution chez l'élève, par exemple l'apparition d'une éventuelle expérience mentale.

I.6. Quelles sont les variables de commande du jeu de l'élève ?

Nous employons le terme "milieu" au sens de Guy Brousseau : système antagoniste de l'élève, représentant le savoir. Ce système varie selon le type de situation (action, formulation ou validation). En phase d'action individuelle, le milieu est sans doute homomorphe à l'espace de problème qu'étudient les psychologues (Newell, 1972), pour autant que l'on n'oublie pas que cet espace est plongé dans une situation didactique, que le sujet est un élève pour lequel maître et savoir sont toujours potentiellement présents, que la tâche est sous contrat et que ce contrat est partie intégrante du milieu.

Peut-on amener un élève à changer de jeu ? Dans ce but, Gava et Verkerk ont étudié les effets produits par la modification de certaines variables. Gava a proposé la construction d'une série de triangles, constructibles, non constructibles et aplatis, afin de s'appuyer sur la famille de dessins ainsi obtenue pour suggérer un "passage à la limite". De son côté, Verkerk a également proposé plusieurs triangles, dont le triangle (4,31,27), pour lequel le compas habituel est trop petit. L'idée étant de provoquer ainsi certaines anticipations chez l'élève.

Si tous les deux semblent obtenir une certaine évolution chez les élèves, c'est surtout avec l'intervention de l'observateur dans le premier cas, tandis que la demande de construire un "grand" triangle semble bien favoriser une modification du jeu de l'élève (Verkerk op. cit. et Gava, 1988 ; voir aussi Arsac, 1994).

Pour Berthelot et Salin (1992) ainsi que pour Mercier, semble-t-il, le cheminement de l'étude des "dessins" à celle des "figures" devrait nécessairement faire un détour par une problématique de modélisation impliquant en particulier un passage par des schémas, réalisant le choix de certains traits pertinents d'une situation (Mercier, 1992-93). Et dans le cas de l'un des binômes observés par Verkerk, c'est bien dans une certaine mesure à travers une problématique de modélisation qu'évolue le jeu des élèves, lorsqu'ils construisent un triangle (13,5; 2; 15,5) en lieu et place du triangle (27, 4, 31) [7].

I.7. Le milieu-dessin ; vérification

Quelles sont les informations que peuvent renvoyer les différents milieux ? Le milieu matériel du tracé effectif fournit habituellement de nombreuses données, pertinentes ou non. L'élève a tout d'abord appris à donner des réponses par rapport à ce milieu-là, lorsqu'on lui demande par exemple d'effectuer des tracés géométriques élémentaires. Lorsqu'il doit tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, il le fera en utilisant le compas, en appliquant une procédure standard et ce travail sera évalué à travers le contrat didactique (repérage des traits de construction) sans qu'on puisse être sûr que l'élève agisse réellement en joueur mathématique, c'est-à-dire qu'il se soit posé la question de savoir pourquoi le résultat correspond effectivement à une droite perpendiculaire. En outre, le dessin tracé permet aussi de vérifier certains énoncés, souvent en fournissant des contre-exemples.

Comme tout milieu matériel, ce milieu n'est pas un milieu strictement mathématique, mais il donne au mathématicien la possibilité d'effectuer des vérifications avec une bonne approximation dans de très nombreux cas [8]. Un dessin peut bien convaincre que le triangle (3,6,8) n'est pas rectangle, ou qu'un losange n'est pas toujours inscriptible dans un cercle. Même pour le mathématicien professionnel, un tracé relativement précis peut parfois éviter de longs raisonnements inutiles (voir Northrop 1975, p. 97 : tout triangle est isocèle). Le dessin est en quelque sorte presque partout homomorphe à la figure, avec quelques singularités, telles que dans le problème auquel nous intéressons [9]. De là l'instabilité des vérifications obtenues par la pratique graphique (observations de Gava rapportées dans l'article d'Arsac, p. 16 et suivantes).

Il est plus difficile de décrire le milieu où se travaillent les "figures", qui intègre des gestes mentaux, des anticipations, une vision dynamique des tracés, tout ceci étant évidemment plus difficile à observer directement. C'est à travers les déclarations d'élèves que nous devons inférer les réponses de ce milieu.

---

[7] Voir Arsac 1994, page 21.

[8] Ces vérifications se transforment en validations lorsque le dessin est considéré comme le représentant d'une figure.

[9] Parmi d'autres exemples citons l'intersection de deux droites formant entre elles un angle assez aigu (Lerouge, 1993) ou encore l'intersection des médiatrices des côtés dans un triangle (Brousseau, 1987 et Berthelot, Salin, 1992).

I.8. Le milieu didactique

Si à l'école primaire et au début du secondaire une position empirique (P1) permet aux élèves de répondre aux questions qui leur sont posées et de trouver les lois dans la "nature", dans la position officielle à la fin du collège (P2), les élèves doivent considérer les problèmes qu'on leur propose en faisant tout d'abord référence à des règles établies en cours (théorème des milieux, de Thalès, de Pythagore). A défaut, ils reviennent dans une position plus empirique et certains élèves arrivent même à s'y maintenir, mais de façon privée. En Suisse Romande, par exemple c'est en 9ème année (14-15 ans) que l'on "étudie" le théorème de Pythagore. Mais la plupart des exercices demandent le calcul du troisième côté d'un triangle rectangle, les deux autres côtés étant donnés. Il n'y a par exemple dans le manuel utilisé qu'un seul exercice demandant si un triangle de dimensions données est rectangle ou non. Nous avons constaté, en 10ème année, que de nombreux élèves, confrontés à un problème de ce type, construisaient le triangle et utilisaient l'équerre pour répondre. Mais si la position empirique permet ici de donner une réponse partiellement recevable par le maître, il n'en va pas de même dans le cas du triangle aplati.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que le jeu d'un élève particulier, indépendamment du système didactique. Pour le problème considéré, nous venons de voir que le milieu culturel préexistant n'est pas défini a priori de manière univoque. Dès lors que les activités se déroulent dans un contexte d'enseignement, il nous faut considérer le contrat didactique, qui fournit à l'élève de nouveaux critères d'évaluation de son action. Il peut estimer que ce qu'on lui demande, c'est de construire un triangle en le traçant, et se satisfaire du résultat. Ou alors de produire une règle s'appliquant à la situation. Ces deux positions ont d'ailleurs un caractère assez général en ce qui concerne les rapports possibles à la géométrie au collège, si l'on se réfère aux analyses de manuels effectuées par R. Noirfalise (1993). Dans ces conditions, le professeur est contraint de trancher entre les deux positions et s'il veut avoir les moyens d'éviter de le faire, il doit construire un milieu pour la validation de la position choisie (Margolinas, 1993).

Puisqu'un milieu unique commun aux élèves de la classe n'est pas "naturellement" associé à la situation telle que nous l'avons considérée, Arsac et al. (1992) proposent à cet effet un dispositif complexe intégrant travail individuel, puis en groupe, avec rédaction d'une affiche et débat général, les réponses contradictoires devant permettre que le débat fonctionne comme une situation de validation des réponses obtenues en groupe. Mais ce débat peut-il vraiment avoir lieu ? Soit, face à des élèves ne se situant que par rapport au dessin, les élèves raisonnant en fonction d'une figure de type idéal vont avoir de la peine à argumenter, leurs raisons n'étant pas accessibles à leurs camarades : *le moyen principal d'objectivation non mathématisé est encore le dessin, commenté d'un discours, voire de gestes*. Soit, les élèves se contentent d'affirmer l'inexistence du triangle, en se basant simplement sur le fait que $c = a+b$, et cela suffit pour convaincre des élèves ayant reçu un enseignement géométrique car ceux-ci font alors référence à une mémoire géométrique scolaire, milieu de "règles mathématiques" : le statut officiel affaibli des dessins à ce niveau scolaire va interdire l'appel aux réalisations graphiques chez les élèves qui ont "franchi le pas".

Les analyses précédentes nous montrent ainsi que les élèves peuvent pratiquer au moins deux jeux différents, peu compatibles entre eux. Tout se passe comme si certains jouaient aux échecs tandis que d'autres manipulent leurs pièces en utilisant les règles du jeu de dames. Le jeu à instaurer est ici un jeu à propos des règles du jeu géométrique il faudrait que les élèves décident eux-mêmes de faire porter la discussion au niveau des règles du jeu, ce qui ne semble pas être possible sans une intervention du maître.

Un dispositif en groupes favorise en principe la production et la confrontation de nombreux dessins. Or dans ce problème, ceux-ci peuvent être fort différents les uns des autres, d'où un écart non compatible avec le contrat didactique habituel sur la précision des tracés. Cette rupture de contrat peut ainsi favoriser un premier pas vers la figure comme "quotient" d'une famille de dessins par la relation "dessins produits par les mêmes données numériques". Si cet élément enrichit le milieu et permet de déstabiliser les conclusions fondées sur un seul dessin, il ne permet évidemment pas encore la validation théorique, qui demande un travail de la relation entre système de règles mathématiques et dessin, c'est-à-dire la réalisation conséquente de séries d'expériences graphiques. La difficulté concerne la validation associée à ce jeu-là : comment peut on savoir que l'on a gagné, que les règles choisies sont les meilleures ? La réponse ne viendra que plus tard, lorsque l'on aura pu mener à bien suffisamment longtemps le jeu géométrique pour se rendre compte de l'efficacité des règles de ce jeu. Comme l'écrit R. Noirfalise (1993), il s'agit pour l'élève d'accéder à un monde culturel nouveau : l'entrée dans ce monde peut-elle se faire simplement au travers d'un problème et d'un débat ?

En résumé :

- Il s'agit tout d'abord de faire exister la contradiction entre les points de vue.
- Il est ensuite nécessaire de faire appel au fait qu'en mathématiques on ne peut pas accepter des résultats contradictoires. Par exemple dans une classe dans laquelle est institué un contrat de type "débat scientifique" (Legrand, 1990).

En poursuivant notre réflexion avec l'aide de la théorie des situations, il est une autre question que l'on peut être amené à se poser ici, c'est celle du niveau de la situation adidactique, au sens de Brousseau. S'agit-il d'une situation de *formulation* comme pourrait le laisser croire l'exigence de rédiger une affiche [10] ? La présence de deux réponses différentes n'entraîne-t-elle pas les élèves à devoir trouver des critères de *validation*, au-delà des énoncés qu'ils ont pu produire ? Comment interpréter un énoncé tel que "on ne peut pas construire le triangle car a+b=c" ? Est-ce la formulation d'une règle d'action ou peut-on considérer qu'il s'agit d'une preuve ?

De telles questions mettent de nouveau en évidence la nécessité de distinguer un jeu empirique et un jeu théorique. Dans le premier cas, l'élève dira simplement qu'il suffit de tracer le triangle tandis que dans le second cas sa formulation sera du type de celle que nous venons de citer. Et c'est ici et pour des élèves ayant une "mémoire" géométrique que pourra se faire sentir la pression institutionnelle rendant difficile, en public, la première formulation. Et en cas de désaccord, que peut il se passer ? Si le maître n'intervient pas, l'absence de critères de validité peut alors provoquer un cercle vicieux, du dessin à la figure et de la figure au dessin. L'ingénierie décrite par Arsac et al. (1992) s'appuie explicitement sur la prise de conscience de cette impasse pour faire aboutir la situation en

---

[10] Dans sa thèse, Alain Mercier décrit ainsi la situation de formulation : "dispositifs et gestes se décrivent, le savoir s'énonce, la réussite est déterminée par la référence à l'action qu'elle peut produire".

proposant d'institutionnaliser ce savoir que "en géométrie, le dessin ne suffit pas pour prouver" [11]. En considérant les deux jeux comme les états possibles d'un nouveau jeu, la situation de débat peut être modélisée par une situation d'action (collective) sans issue adidactique et débouchant sur une intervention nécessaire du maître [12].

Nous reprendrons plus en avant l'analyse didactique, à la lumière de nos observations expérimentales. Dans l'expérimentation que nous avons faite nous nous sommes attachés à faire varier quelques uns des paramètres de la situation. En particulier, nous l'avons proposée à des élèves de 15-16 ans et non de 12-13 ans.

II EN CLASSE

II.1. Questions de recherche et choix d'ingénierie didactique

La première idée est de proposer aux élèves deux questions lors de la même séance, en faisant varier les dimensions du triangle (aplati). En effet, Verkerk a effectué des observations de binômes d'élèves confrontés au triangle (27,31,4) afin d'étudier l'évolution des procédures dans ce cas où la construction standard est difficile, l'utilisation du compas n'étant en principe pas possible, d'où une variation du milieu qui semble effectivement provoquer une certaine évolution. Nous avons donc décidé de proposer un premier triangle, soit (7,11,4) et ensuite le triangle (27,31,4). Nous nous attendions à un mélange de réponses oui et non en ce qui concerne le premier triangle et voulions étudier l'évolution des procédures. Pour ce faire, nous avons décidé d'utiliser un test mis au point par Verkerk, à passer préalablement en classe, afin de constituer des groupes homogènes du point de vue des réponses à ce test. On présente par des exemples une méthode de calcul de l'aire du triangle par dénombrement de carreaux unités, puis en demandant de déterminer ainsi l'aire de divers triangles dont deux aplatis [13]. Nous appelons homogène un groupe dont tous les élèves ont construit au moins un triangle au test, respectivement aucun triangle.

On suppose ici que a+b=c. Arsac et al. 1992 proposent l'énoncé E1. Les énoncés E2 et E3 sont écartés afin de centrer le débat sur la question de l'existence du triangle, et de ne pas renforcer la tendance des élèves à tracer un triangle. Verkerk pense que E1 et E2 sont équivalents du point de vue du contrat didactique, E1 amenant néanmoins les élèves à essayer de construire un triangle (on travaille rarement en classe avec des objets qui n'existent pas).

Nous nous sommes ralliés au choix de E1 en pensant que la constitution de groupes homogènes permettrait de passer le plus rapidement possible à la suite du scénario de telle sorte que nous n'avons pas prévu de phase de recherche individuelle, les groupes étant

---

[11] On comprend mieux maintenant la discussion par Berthelot et Salin (1992, p.60) de l'affirmation d'Arsac selon laquelle les élèves se trouvent dans l'impossibilité de conclure. Car Arsac se réfère dans ce cas à la situation de débat et non au jeu isolé d'un seul élève.

[12] Telle une partie nulle, dite "échec perpétuel", lorsque le roi mis en échec trouve toujours une case libre, où il peut être remis en échec.

[13] Nous avons repris tel quel le test proposé par Verkerk et reproduit en annexe de l'article d'Arsac dans Petit x n°37.

constitués avant que l'énoncé ne soit donné aux élèves. De plus, dans la première phase, aucune justification n'est demandée. La constitution d'un ou de deux groupes homogènes d'élèves "constructeurs de triangles aplatis" devait, pensions nous, favoriser des réponses contradictoires, sur lesquelles le maître pourrait fonder une demande de justification. Proposer un débat dans une second temps seulement devrait augmenter la pression sur les élèves persuadés de la non existence du triangle et donner à ce débat le statut, difficile à dévoluer, de débat pour convaincre les autres et pas uniquement adressé au maître.

En bref, nous voulions traiter les deux questions suivantes :

Q1 : Le dispositif prévu favorise-t-il une évolution, dépendant des variables "dimensions du triangle" et "formation des groupes à partir d'un pré-test" ?

Q2 : Dans quelle mesure y a-t-il dévolution du débat ?

II.2. Déroulement et données récoltées

Nous observons ici surtout un groupe de 4 élèves, groupe "homogène" selon le critère défini précédemment. Les données consistent en un protocole (partiel), les notes de l'observateur et des notes prises lors d'entretiens individuels menés quelque temps après l'expérimentation. Les quatre élèves sont Thomas, Mélanie, Mélodie et Carole. Le test préalable demandait de déterminer l'aire de quelques triangles en utilisant une méthode de calcul par dénombrement de carreaux unités, méthode présentée par deux exemples, des triangles rectangles tracés dans des carrés. Les triangles proposés ensuite étaient de dimension (3,4,5), (9,5,4) et (1,4,5). Mélanie et Carole construisent toutes deux les derniers triangles en utilisant le compas et déterminent des valeurs pour l'aire en "nombre de carreaux" comme défini par l'énoncé du test. Mélodie et Thomas n'utilisent pas le compas. Thomas trace néanmoins un triangle (9,5,4), ne donnant pas de valeur pour l'aire. Il écrit (sic) "impossible de calculer étant donné de triangle non rectangle". Effet de contrat didactique provoqué par le mode de présentation du test : quelques autres élèves de la même classe ont même trouvé une aire de (4x5)/2 "carreaux" pour ce triangle ! Thomas ne trace pas le triangle (1,4,5) tandis que Mélodie, qui a aussi tracé schématiquement le triangle (9,5,4), sans donner de valeur pour l'aire, trace simplement un segment de 1 cm. La passation du test écrit a eu lieu trois semaines avant le travail en classe.

Après avoir présenté l'activité et les expérimentateurs, l'enseignant écrit au tableau la répartition en groupes en désignant les endroits où ceux-ci vont s'installer, particulièrement le groupe B qui sera observé et qui travaillera de façon quasi isolée dans une arrière-salle (il s'agit d'un amphi de chimie, et c'est la salle de préparation des expériences...). L'enseignant dévoile ensuite la question en demandant à chaque groupe de répondre par oui ou par non. Les groupes s'installent, et la réponse est très rapide : c'est non pour tout le monde, y compris pour le groupe observé, les élèves donnant la réponse avant d'être installés à leur table.

Il n'était dès lors plus possible de justifier le débat par les réponses contradictoires et nous avions préparé, pour ce cas qui nous semblait relativement improbable, un tracé du triangle, lequel fut présenté aux élèves de façon un peu théâtrale au rétroprojecteur, alors qu'il aurait dû simplement être distribué (voir Fig. 3). L'enseignant demanda alors aux élèves de rédiger une affiche en tenant compte de ce qui leur était montré. Après un certain temps, la séance fut menée comme prévu et le second triangle (4,31,27) fut proposé aux élèves, un bref débat ayant ensuite lieu en fin de séance.

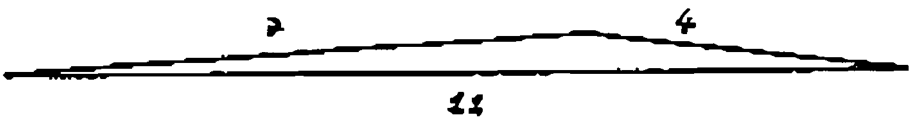


Figure 3

En tant que chercheurs, nous nous retrouvions dans des conditions ne relevant plus des questions que nous nous étions posées, en particulier en ce qui concerne l'étude de la dévolution du débat. Cependant, les données récoltées sont suffisamment riches, selon nous, pour justifier leur analyse. Nous pouvons d'abord rechercher dans les interventions des élèves certains éléments confirmant ou infirmant nos réflexions théoriques. Nous pouvons également reprendre l'analyse a priori en y incorporant les conditions nouvelles, en cherchant à déterminer leur rôle didactique : variables de commande ou faits contingents. Nous ferons les deux, en commençant par relater et commenter ce qui s'est passé dans le groupe choisi, à la lumière de tout ce que nous avons écrit précédemment.

II.3. Le travail du groupe (Carole, Mélodie, Mélanie, Thomas)

II.3.1. Théorie, règles et exceptions

Après la donnée de la consigne par le maître, Thomas et Mélodie affirment tout de suite que le triangle ne peut pas exister. Sur les feuilles individuelles, à la question "existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 7,11,4 ?", les quatre élèves répondent "*Non car 7+4=11*". Cependant, Mélodie et Thomas justifient en écrivant que "*Le chemin en passant par 7 et 4 est plus long que par 11*" (Mélodie) alors que Mélanie écrit *Si on fait la preuve avec un compas, on voit que ça ne se croise pas*" et que Carole ne rédige aucune explication. On retrouve bien ici les positions évoquées dans l'analyse a priori.

Nous faisons ici l'hypothèse, confortée tant par les réponses au test, que par leur attitude au début de la discussion, que Mélanie et Carole se rallient simplement à l'avis de Thomas et Mélodie, très sûrs d'eux, et ceci sans en être forcément convaincus. Les entretiens individuels faits après coup confirment cette impression. Carole dit "*J'avais tracé le triangle*". Quand à Mélanie, elle essaye de construire le triangle, mais n'y arrive pas. "*Je fais toujours le plus grand côté. J'ai tiré le premier. Ça ne marchait pas avec le compas.*"

Après la première mise en commun, lors de laquelle tous les groupes répondent de façon négative à la question posée, le professeur relance les élèves en leur demandant de rédiger une affiche justifiant leur position et en présentant, au rétroprojecteur, le tracé d'un triangle ayant des côtés de 4, 7 et 11 et en déclarant "*Je vous soumets une possibilité. Qu'en pensez-vous ?*". De retour à la table du groupe, Mélanie se met au travail et réussit à construire le triangle. Pour Thomas et Mélodie, qui sont persuadés qu'un tel triangle ne peut exister, ceci pose un problème :

Md: "Il existe ou il n'existe pas ? Dans ma tête c'est non ! Je suis sûre qu'il n'existe pas !"

Thomas met en cause la précision de la construction faite par Mélanie. Les élèves finissent par se mettre d'accord pour écrire sur l'affiche que le triangle n'existe pas logiquement mais que la pratique démontre qu'il existe.

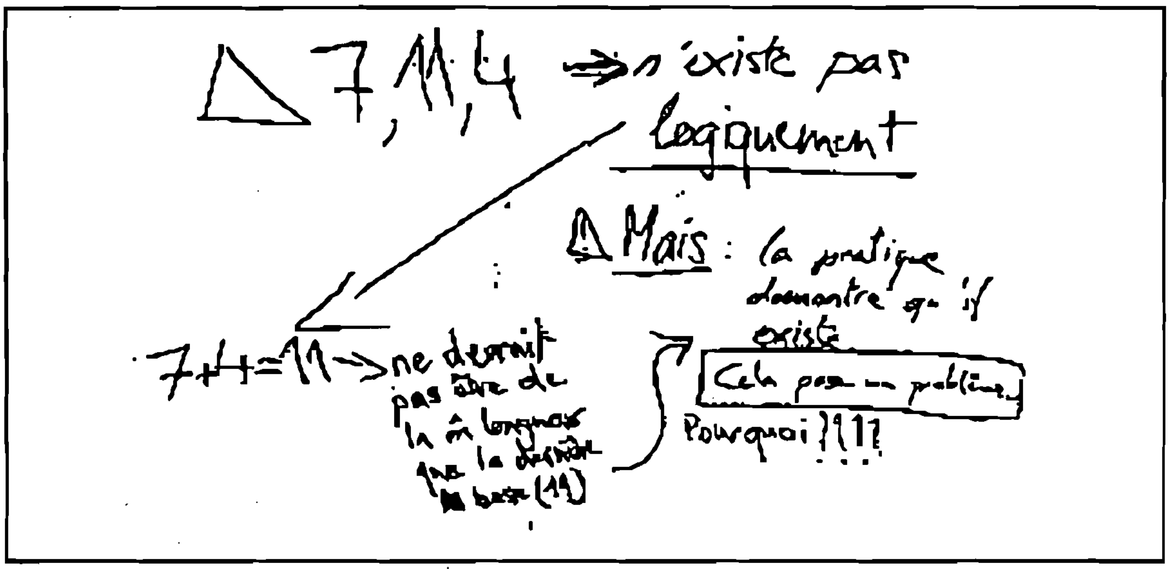


Figure 4. L'affiche rédigée par le groupe (Carole, Mélodie, Mélanie, Thomas).

Même si les quatre élèves semblent plus ou moins d'accord, chaque mot est discuté. Thomas est par exemple réticent à écrire que l'on peut "construire" le triangle. On peut dire que cette phrase est une sorte de compromis que tous acceptent, certains (Mélanie et Carole) semblant plus d'accord avec la fin de la phrase et acceptant le début sur lequel Thomas et Mélodie ne transigent pas. Néanmoins, Mélodie est perplexe :

Md: *Donc problème, comme il écrit le prof de maths.*
El: *Donc jusqu'où va la théorie ?*
El: *Donc c'est une exception. Voilà !*
El: *Ben oui !*
Md: *Mais est-ce qu'il y a un autre triangle comme ça ?*
Mn: *Si ! il y en plein !*
Md: *Attends, on essaye de trouver un autre triangle comme ça. Si tu prends 5, 3 et 8 alors..*

Et un peu plus tard :

Md: *Avec 5, 3 et 8 on peut quand même le faire, alors je ne comprends rien.*

La généralisation à laquelle pense Mélodie n'est pas celle de Mélanie. La première songe à faire varier les valeurs des côtés en maintenant l'égalité a+b=c tandis que Mélanie part du triangle qu'elle a construit et remarque qu'il est possible de construire d'autres triangles, encore plus obtus, à l'intérieur de ce triangle là, en conservant la même base :

Mn: *Mais oui, mais c'est une exception. Tous les triangles inférieurs à l'angle de ça. On peut les faire jusqu'à ce c'est droit. En dessous aussi on peut les faire. On peut aller jusqu'à ce que ça touche, en fait, jusqu'à ce que c'est de nouveau plat.*
C: *(doucement) Qu'est-ce qu'elle raconte là ?*
Md: *(plus fort) Quoi, quoi, quoi ?*
Mn: *On peut faire tout*

L'une est sur un plan théorique, guidée par l'égalité tandis que l'autre part du dessin, évoluant vers la prise en considération d'une famille de dessins. Mélanie contraint Mélodie à s'exprimer sur le plan du dessin :

Md: Mais ouais regarde quand tu fais le rond, il coupe la barre qui fait 8, mais là on dirait qu'il est tout droit donc en fait il coupe encore. Tu vois, là il coupe encore et là il coupe encore. Mais en fait c'est pas très précis.

L'intervention précédente de Carole :

C: Faut faire un nombre pair et un nombre impair.

provoque une digression, Mélanie semble accepter un moment cette idée et Mélodie démontre le contraire par un tracé du triangle 4,4,8. La situation est paradoxale : bien que persuadée de l'inexistence logique de triangles tels que a+b=c, mais devant convaincre Carole et Mélanie qu'il ne s'agit pas d'une question de parité, Mélodie construit un triangle (4,4,8) en tant que contre-exemple. Tout ceci ne fait que conforter le milieu dessin.

Il nous semble que dans cet épisode, les élèves ne recherchent pas tous la même chose. Thomas et Mélodie, d'une part, essayent de comprendre comment le triangle 4,7,11 est pratiquement constructible alors qu'il est logiquement impossible. D'autre part, Mélanie et Carole cherchent une règle ou une formule permettant de caractériser les triangles aplatis [14].

II.3.2. Illusion d'optique ?

Après avoir pensé à une singularité très locale, Mélodie trouve une explication qu'elle conservera jusqu'au bout. Pour elle il s'agit d'un problème de vision : s'il est petit, un arc de cercle ne se distingue pas d'un segment. Ce qui vient renforcer ce point de vue chez elle, c'est le fait que les cercles en LOGO correspondent en réalité à des polygones [15]. Ce fait est remarquable dans la mesure où de nombreuses recherches ont posé la question du transfert en géométrie "standard" des connaissances acquises lors d'activités avec LOGO, sans toutefois obtenir de résultats de ce type. Le travail avec LOGO a eu lieu, pour cette élève, un an auparavant au moins [16] :

Md: En fait un rond. Tu sais quand tu fais le LOGO à l'ordinateur, tu fais un comme ça, un comme ça, comme ça, et puis ça tourne. En fait c'est un tout petit peu comme ça mais quand tu regardes juste un tout petit bout on peut croire qu'il est tout droit. En fait ça se rejoint. Mais ça devrait pas se rejoindre parce que normalement il tourne un tout tout petit peu on ne voit pas à l'oeil

Mn: Quoi, quoi, quoi ?

Th: Matériellement il est possible.

Md: En pratique, ça marche de faire comme ça. En fait ça existe pas. C'est un

---

[14] Voir une analyse plus détaillée en terme de rapport au savoir et de position de l'élève dans la troisième partie.

[15] Un enseignant nous a raconté avoir rencontré la même "conception" chez une élève traitant le problème du nombre des diagonales d'un polygone et affirmant qu'au delà de 20 côtés le polygone était un cercle. Nous ignorons si cette élève avait fait faire des cercles en LOGO.

[16] Il y a peut-être ici un effet subtil de contrat didactique, à propos de ce que Rouchier nomme les objets institués (dans sa thèse, 1991). Puisqu'on a pu tracer et nommer des cercles qui n'en sont pas en LOGO, il est légitime de justifier de façon analogue la possibilité pratique du triangle plat.

faux.

Th: *Exactement.*

Md: *Si ! Si ! si !*

Mn: *Ouais mais pourquoi là ça marche ?*

Md: *Mais oui le rond du 7, là ça tourne on voit que c'est droit.*

Th: *Ça tourne un tout petit peu.*

Md: *Ça tourne un tout petit peu. Nous on arrive à le rejoindre. En fait ça ne se rejoint pas. En fait ça se rejoint sur la ligne, là. Le point exact il est là en fait.*

Thomas semble partiellement adhérer à ce point de vue. Il propose toutefois de considérer certains éléments du dessin dans une perspective de modélisation :

Th: *La terre quand tu la regardes, elle est plate. Elle est toujours ronde. C'est le même principe. Quand tu regardes la maison là-bas, elle est à la même hauteur que la nôtre, ben en fait elle est plus bas. A une échelle monstrueuse."*

C: *C'est un système d'illusions.*

En fait l'idée de vision imparfaite de Mélodie est peut-être ce qui conduit Thomas à ce type de modélisation. Selon divers auteurs cités plus haut, comme Salin et Berthelot ou Mercier, un tel type de rapport peut constituer un pont vers un jeu géométrique. Or dans les conditions actuelles de l'enseignement des mathématiques avant le niveau du lycée, le développement de tels rapports est peu probable (voir Chevallard, 1989). Ce passage de Mélodie et de Thomas à un point de vue de modélisation est-il complètement contingent ou y a-t-il quelques éléments de nécessité ? En d'autres termes, sont-ce les personnalités de Mélodie et de Thomas qui sont ici essentielles ou est-ce la situation, avec la nécessité de convaincre Mélanie de quitter quelque peu le concret du dessin alors que les conditions didactiques sont de nature à renforcer sa position avec la présentation par le maître d'un tracé de triangle 4-7-11 ? Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie.

II.3.3. Un système instable

A ce moment les élèves se mettent à débattre autour des éléments de tracés suivants, correspondant à des constructions très soigneusement faites au crayon (Fig. 5) [17].

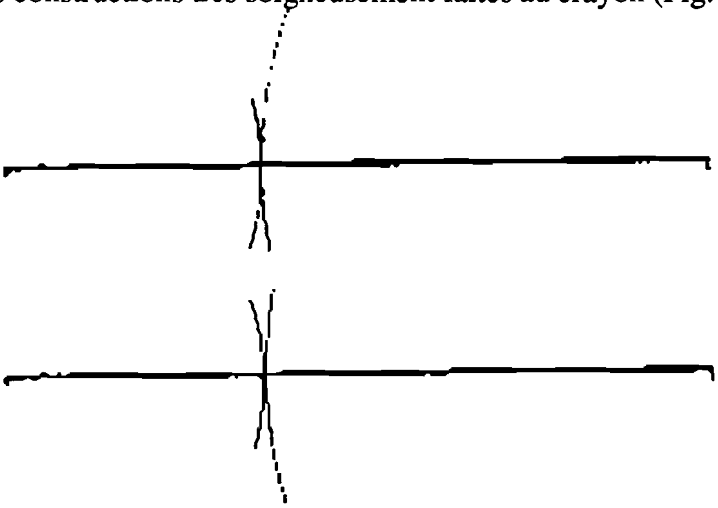


Figure 5.

[17] Il n'a pas été possible de déterminer qui les avait faites. Mélanie probablement.

La prise en compte simultanée de ces dessins amène Thomas à s'exprimer en utilisant un vocabulaire plus dynamique : "*Le petit espace qui va être là c'est celui qui va déborder des deux côtés quand tu vas aplatir les deux lignes.*" Il s'en suit une longue discussion, ce point de vue l'amenant à considérer l'arc de cercle comme produit par un segment pivotant. Ceci ne va pas sans engendrer diverses contradictions avec les données dont dispose le groupe. En effet, le segment peut pivoter autour de A et de B et dans ce cas il n'y a qu'une seule position pour le triangle : être aplati ou alors le segment peut glisser le long d'une droite perpendiculaire à AB et passant au point M tel que AM=4, MB=7. Dans ce cas le segment doit "déborder" à droite et à gauche en A et B. Cela semble être la représentation de Thomas. Mélodie semble plus proche du premier point de vue mais elle ne considère qu'un segment à la fois et se trouve contrainte de composer en admettant que le segment rayon varie :

Md: *Mais oui c'est parce que quand tu es là, le 7 ça fait 7, 7, 7, 7, là le rayon, mais là il va un tout petit peu plus loin parce qu'on a mis 7 là, en fait quand tu tournes, ça va un peu plus loin*
Mn: *Non !*
C: *Je crois qu'on devrait laisser tomber.*
Mn: *Parce que si tu fais avec une ficelle ça marche ! Tu vois bien.*

Tout se passe comme si les élèves étaient parfois très proches de la géométrie du cercle dont le vocabulaire correspondant est utilisé dans leurs tentatives d'avoir prise sur la situation, mais ces connaissances restent asservies aux dessins qu'ils ont pu construire et à la conviction que le triangle est "pratiquement constructible". Même Carole intervient dans ce sens, alors qu'elle est par ailleurs relativement peu active :

C: *Ça fait un truc, la médiatrice, j'sais pas comment ça s'appelle. Pis ça donne bien le milieu. ça donne bien 4 et 7.*

(en se référant au troisième dessin ci-dessus). Signalons, sans approfondir ce point, que l'on retrouve ici la prédominance de conceptions globales du cercle et la difficulté de les coordonner avec une conception ponctuelle (Artigue et Robinet, 1982)[18].

II.3.4. Formulation d'une théorie

Défié par Mélanie, Thomas construit un triangle alors qu'il croit pouvoir montrer que ce n'est pas possible et arrive à la conclusion qu'avec le compas 7 et 4 sont plus grands qu'avec une règle. Ceci le laisse longtemps perplexe, et il se livre à diverses expériences graphiques concernant l'arc de cercle, puis finit par développer une théorie du "débordement" qui renforce l'idée du "pratiquement constructible" :

Th: *Il y a un espace entre ce cercle et l'autre cercle.*
Md: *Exactement ! Là est la solution !*
El: *Cet espace là c'est ce qui dit que c'est plus grand.*
Th: *Cette dimension qui va être, ouf ! le débordement des deux lignes*
Md: *Oui ! c'est le débordement*

---

[18] La "rondeur" fait partie des conceptions globales. Les conceptions ponctuelles concernent la définition du cercle comme ensemble de points équidistants d'un centre.

Tous: *Cris d'enthousiasme ...*
Th: *Le petit espace qui va être là c'est celui qui va déborder des deux côtés quand tu vas aplatir les deux lignes.*
Md: *Mais oui, c'est logique*
Th: *Elle nous sort ça !*
Md: *Oui, c'est normal !*
Md: *Comment expliquer par écrit ?*
Th: *Faut faire des dessins !*
C: *Parce que un rond... est rond.*
Md: *Parce que quand on essaye de mettre le 7 sur le 4, non quand on essaye de mettre le 4 sur le 7.*
C: *En fait, on voit que le rond il est plat, mais en vrai il est rond.*
Md: *Ouais, en fait il tourne mais tellement petit !*
C: *Nous on croit que c'est rond...comment dire ? Non on croit que c'est plat... vers l'intersection.*
Mn: *Là c'est trop grand la faute de vision qu'on a, c'est pas possible*
Md: *Ouais ouais, là c'est trop grand. C'est pas assez précis, c'est pour ça.*

La relation avec le mode de production de cercles en LOGO finit par amener Mélodie à développer un vocabulaire pratiquement "différentiel" :

C: *Et puis à une certaine hauteur on peut plus faire !*
Mn: *Parce que comme ça tourne c'est normal qu'il y a un endroit de vide...*
Md: *Ah ! voilà ! L'angle de virage d'un rond, il est tellement peu.*
Th: *Mais c'est faux ! Mais déjà on est sur un truc qu'est faux. Il faut une autre feuille, puis faire vraiment. Parce que regarde, logiquement si tu fais 7...*
Md *Je peux dire un truc pour expliquer pour voir si ça marche parce que si je le dis à haute voix, ça... Peut-être ça va pas marcher, mais c'est pour le dire, pour voir si ça marche. Je peux ? L'angle d'un rond, il est hypersensible.*
C: *Ça n'a pas d'angle !*
Md: *Mais oui ! il y a un angle ! Quand tu prends ce point là il tourne de ça*
Th: *Oui, c'est ça, c'est ça le..*
Md: *Il est tout petit l'angle de virage d'un rond (je ne sais pas comment ça s'appelle). Il est tellement petit que..*
Mn: *(interrompt) : Oui ! Enfin plutôt il est grand !*
Md: *(qui continue) si on prend juste un tout petit fragment du rond, on le voit tout droit !*

Intégrant la "règle" de Mélanie, Mélodie finit par imposer son point de vue que l'idée de "débordement" de Thomas vient aussi appuyer :

Md: *Cette distance que tu dis tous les triangles ça marchera, et bien elle est égale à la longueur d'un segment sur un rond qui est assez petite pour qu'on arrive pas à voir que c'est un rond...Parce que moi, si je te fais un trait comme ça, ou si je te fais un rond et que je coupe comme ça et que j'efface le rond, tu ne verras pas la différence entre les deux traits, alors qu'il y en a un qui est sur un rond et l'autre qui est sur une droite.*
Mn: *Et c'est ça qui fait que ça donne faux.*
Th: *C'est con comme truc. Si tu fais un rond. Regarde ! Si tu fais une ligne droite. Elle est égale à un segment sur un rond*

Mn: *En fait, le rond, il est jamais rond alors ?*

Md: *Mais si !. C'est des tout petits segments à la suite qui sont tellement petits... dénivellation.... Ils n'ont pas 45°, ils ont 1° à chaque fois que ça change. C'est ça qui fait si tu fais une ligne ..Le rond...*

Mn: *Oui mais c'est tous les quoi que ça changerait ?*

Md: *Tous les 0,000..1 mm, ça tourne de 1 petit degré.*

Mn: *Mais on ne sait pas, si c'est 0,01 mm.*

Md: *Mais si ! C'est ça sur les tortues LOGO, là. La petite tortue, si tu veux lui faire un rond, il faut que tu lui dises 1 en avant, 1 de côté de degré et après elle fait gni, gni, gni, gni...*

Th: *Si tu prends un point comme ça là. Si tu fais une ligne droite, j'ai l'impression que si tu prends ce point là et puis celui-là, celui-là il sera plus éloigné dans cette direction. C'est con hein ?*

Md: *Quoi ?*

Th: *J'ai l'impression que si tu fais un virage, j'ai l'impression que par rapport à ce point là, celui-là, si tu veux le rond, ça déborde. Quand tu fais un rond, c'est pas possible, mais...*

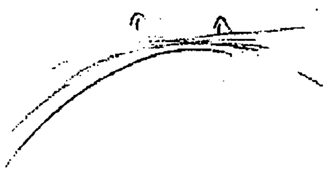


Figure 6. Tracés de Thomas.

Finalement Mélodie complète l'affiche par le texte suivant, qui recueille l'assentiment de Thomas et de Mélanie :

Dans un cercle, le degré "de virage" est très petit. Ce qui fait que si l'on prend un segment d'un cercle, notre oeil le voit droit. Mais le point minime se trouvant à côté de l'extrémité du segment (sur ce segment) il sera microscopiquement décalé de la droite. Notre oeil n'y voit rien.

segment fait à la règle *segment pris d'un rond*

Où est la différence ?

C'est pourquoi, lors d'un triangle de mesure 7, 11,4, le croisement de 7 et de 4 se fait sur la droite 11, mais notre oeil voit le croisement avant et après du croisement réel.

Md *Là, j'ai...Attends on va faire un petit dessin derrière.*

Th: *On va faire un truc gros.*

Mn: *Attends ! Mais précis ! Après il faut noter que la distance du débordement elle est égale à la marge des possibilités de pouvoir faire le triangle qui joue.*

II.4. Les autres groupes et le débat final

Nous avions également observé l'un des autres groupes, classé comme hétérogène. Dans ce groupe, l'intervention du maître n'a pas remis en cause leurs convictions quant à la non existence du triangle, mais elle a provoqué un débat sur la question de savoir si un triangle 4,7,11 était ou non un triangle, le critère choisi par les élèves étant d'avoir trois angles ayant une somme égale à 180°. Or pour eux, ce triangle n'a qu'un seul angle de 180°, ce qui les fait hésiter à parler de triangle. Par la suite, ce groupe entra fortuitement en possession d'un tracé de triangle 4,7,11 analogue à celui du maître, mais produit par ordinateur. Ceci trouble les élèves. "*Si c'est l'ordinateur qui l'a fait...*" dit l'un d'eux. Leur critère se révélera cependant efficace dans ce cas, puisqu'ils mesurent des angles de 15°, 6° et 164°, ce qui fait 185° et les conduit à rejeter ce triangle !

L'intervention du maître ne semble pas non plus avoir eu de l'effet sur les autres groupes, qui ont immédiatement remis en cause la précision du tracé, sans effectuer d'essais.

Le débat fut court, car il restait à peine une dizaine de minutes. L'enseignant demanda au groupe (Carole, Mélodie, Mélanie, Thomas) d'exposer leurs vues, mais ni lui ni les autres élèves ne parvinrent à entrer dans leur problématique.

III A POSTERIORI

III.1. Analyse a priori...a posteriori

L'analyse a priori est une analyse des conditions qui déterminent une situation (qui la définissent en fait, comme objet théorique). Pour l'expérimentation projetée, nous voulions étudier l'évolution d'une situation en fonction de certaines conditions. Parmi celles-ci, il en est une qui n'a pu être remplie, pratiquement dès le début. *Alors que nous pensions, sur la base des réponses au pré-test, qu'au moins deux groupes répondraient oui à la question de l'existence, tous les groupes ont répondu non. Pourquoi ?* Ce cas avait été pris en considération, mais l'analyse est restée relativement sommaire, compte tenu de la manière dont l'enseignant a relancé le travail des élèves, qui a été selon nous de nature à modifier la situation, en tout cas pour le groupe observé. Il nous paraît donc tout à fait pertinent d'effectuer une nouvelle analyse a priori. Cette façon de procéder n'est d'ailleurs pas une innovation et nous suivons ici une méthodologie déjà employée par Margolinas (1993).

L'absence de phase de recherche individuelle a sans doute joué un rôle ici, mais nous avons rencontré une situation analogue avec d'autres classes de ce type [19]. Cependant, si nous tenons compte du fait que le rapport officiel à la sortie du collège doit correspondre à la position P2, ce qui signifie en particulier que les connaissances d'origine empirique ne sont plus reconnues publiquement, le fait que seuls les non soient formulés surprend moins. Car dans une situation de formulation s'adressant au maître et aux autres élèves, les élèves ayant une position plus empirique n'ont rien à opposer aux règles qu'énoncent leurs camarades.

---

[19] Il va sans dire que la production, puis la critique par les élèves de différentes constructions individuelles constitue une condition importante d'un fonctionnement adidactique où il s'agit en fait d'obtenir une dévolution de l'instabilité du milieu dessin dans un projet visant à l'institutionnalisation du jeu géométrique. Sans cela, le débat pourra ne consister qu'en un dialogue de sourds entre ceux qui réalisent le triangle et ceux qui pensent que celui-ci n'existe logiquement pas. D'où la nécessité d'une phase initiale individuelle, et, pour le débat, d'affiches comportant des constructions effectives.

III.2. Une autre situation

Peut-on affirmer que le groupe observé s'est trouvé dans une autre situation que celle de l'analyse a priori ? Comme le reste de la classe, les élèves de ce groupe en position P2 ont établi l'inexistence du triangle, en fonction de la relation d'égalité entre la somme de deux côtés du triangle et le troisième. L'enseignant ayant montré un tel triangle construit, ils considèrent que le problème consiste maintenant à expliquer pourquoi ce triangle, qui ne peut exister, est quand même, "pratiquement", constructible. L'une des réponses possibles est de remettre en cause les tracés en signalant que c'est la précision qui fait problème. Mais si cette réponse est possible avant toute tentative empirique, pour des élèves rejetant immédiatement la contre-proposition du professeur et se maintenant ainsi en position P2, nous estimons qu'elle est beaucoup plus difficile une fois admise l'idée de prendre les tracés au sérieux. Ce que les élèves cherchent à expliquer c'est bien la possibilité de tracer quand même un triangle "pas si aplati que cela". Et ils doivent formuler une réponse acceptable en la classe de mathématiques, c'est-à-dire faire référence à des connaissances publiques. Qu'auraient-ils pu alors répondre ? Nous imaginons difficilement qu'ils aient pu entrer dans les considérations du modèle fini que nous avons présenté au début de ce texte.

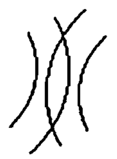


Figure 7.

Une autre possibilité aurait pu être celle de modéliser les traits par des portions de bandes ou de couronnes dans le plan, mais là aussi l'émergence d'un tel type de rapport au trait tracé est peu probable dans les conditions didactiques de ce niveau scolaire, et même avant longtemps (Fig. 7). Ce nouveau point de vue n'implique-t-il pas une réorganisation totale de la prise en compte de l'empirique (l'épaisseur du trait réel) ?

Plus plausible serait une position analytique, avec des élèves ayant les connaissances suffisantes. On considère un modèle trigonométrique d'un sous-triangle rectangle du triangle étudié (coupure par la hauteur), en supposant ce dernier propre (Fig. 8). Pour une erreur avec le compas de $x = 1-\cos\alpha$, la hauteur du triangle est alors de

$h = \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{x(1+\cos\alpha)} \approx \sqrt{2x}$ lorsque l'angle α est assez petit.

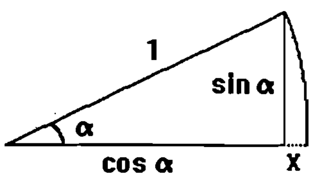


Figure 8.

Or pour une erreur s'approchant de 0, le rapport $\frac{\sqrt{2x}}{x}$ augmente (il tend même vers l'infini !). C'est ainsi qu'une erreur x de 0,01 (1%) correspond à un angle de près de 8°, ce qui donne pour un triangle ayant une hypoténuse de 7 cm une hauteur de près de 1 cm [20] !

Ces connaissances se situent bien sûr au-delà de ce que savent des élèves qui ne feront de la trigonométrie qu'un an plus tard et de l'analyse deux ans après. Mais on a vu

---

[20] Je remercie Alain Mercier qui a attiré mon attention sur l'importance de ce point. Ces relations montrent l'instabilité de la famille des triangles a,b,c avec c presque égal à a+b. Le triangle plat s'obtient bien comme une sorte de catastrophe.

qu'une des élèves du groupe observé était proche de ces idées :

Md: En fait, il suffit d'une tout petite erreur là dessus, d'un tout petit dixième de mm, ça change tout.

Il résulte de ces considérations que la situation modifiée par le maître ne possède en fait pas de porte de sortie sur un savoir possible pour ces élèves. Les élèves ne peuvent disposer d'une stratégie leur permettant d'atteindre une position terminale : la formulation d'une règle expliquant la possibilité de tracer avec crayon, règle et compas un triangle 4,7, 11. Cette situation a normalement contraint certains élèves à être réflexifs par rapport aux relations entre figure géométrique et dessin et à remettre en cause la vision comme le fait Mélodie.

Que peut-il se passer pour un élève en position P1c, c'est-à-dire pour un élève qui ira plutôt chercher les règles dans un dessin qu'il aura construit ? A notre avis, l'action du maître a implicitement favorisé cette position. Cependant, pour un tel élève, cette intervention n'est pas de nature à poser la question de la relation entre théorie et pratique, mais à l'encourager à continuer à rechercher des informations dans le dessin même. Mais la différence avec le jeu isolé décrit au début de ce texte, c'est la relance du maître et la confrontation avec d'autres productions, d'où la rencontre inévitable de l'instabilité du triangle plat poussant cet élève sans cesse vers de nouvelles constructions. Ainsi donc, la rencontre de ces deux types d'élèves pourra se faire autour des mêmes tracés, mais vus différemment : sources d'informations sur le triangle pour les uns, sources d'informations sur le rapport entre triangle-figure et triangle-dessin pour les autres. Ceci nous ramène alors au concept de milieu. La situation a changé parce que le milieu est différent : le triangle réalisé par le maître élargit le champ des possibles pour les élèves en position P2, s'ils l'acceptent. Il nous semble alors intéressant de reprendre l'analyse a posteriori, en posant les questions suivantes :

Quels sont les positions des différents élèves ? Ces positions évoluent-elles vers une position commune ? Quel est le rôle du milieu dans cette évolution ? Commençons par cette dernière question.

III.3. Un milieu évolutif ?

Le protocole nous révèle que le milieu évolue. Prenons un exemple. A un certain moment, Mélodie considère que rien ne distingue le dessin (les traits sur le papier) d'un petit arc de cercle de celui d'un segment. De ce fait, elle introduit la possibilité de considérer un sous-dessin et une sous-figure de l'arc de cercle habituellement tracé pour construire un triangle. Il s'agit d'une majoration de l'espace des possibles dans la situation. Au début, cette majoration n'est qu'une proposition personnelle puisque la discussion à ce propos se termine assez vite. Ce n'est que plus tard que Thomas relie cette possibilité à une réflexion qu'il mène de façon autonome à propos du cercle. Néanmoins, les élèves travaillent autour de cette idée, même Carole (voir extraits à la fin du paragraphe II.3.4.). Mélodie essaye sans succès un peu plus tard et elle finit par convaincre ses camarades.

Le milieu que nous révèle le protocole est habité de deux sortes de triangles : le triangle "théorique", plat et le triangle "pratique" qui ne l'est pas. Les élèves en position

P2, Mélodie et Thomas tentent de trouver une explication à cette dichotomie. Il en est de même pour Mélanie, plutôt en position P1c, qui a obtenu les deux résultats possibles, par construction. On a vu de quelle façon Mélodie règle le problème. Thomas et Mélanie, par contre, semblent chercher à comprendre comment se distinguent les façons de construire ces deux types de triangle :

Th: *J'ai compris le problème. C'est que nous on fait comme ça pour construire ce triangle. Tu prends 7 et puis tu le fais là. Tu prends 4 et il faut le faire là. En fait, il faudrait faire 7 là, ici faire ce rond là et puis prendre 4 là et puis le faire ici. A partir de là ça ne marche plus !*

Mn: *Ben ! Essaye pour voir, en vrai !*

P: *Je vous prends l'affiche ?*

Th. *(décidé) Non ! On n'a pas terminé.*

Mn: *Ouais, attendez ! Regardes quand tu as la base 11, les deux côtés 7 et 4, quand on les fait comme ça, ça joue. Donc ça veut dire qu'ils sont forcément plus grands.*

Md: *Ouais*

Mn: *Mais vu que c'est égal à 11. C'est un peu spécial. Quand on fait le truc qu'il a fait avant. Qu'on pique sur les deux bouts de la droite, puis qu'on fait les deux cercles comme ça et ben ça se croise comme ça. En fait c'est là qu'on voit que c'est plus grand, puisqu'ils se croisent comme ça.*

Md: *Ouais*

Mn: *Sinon ils se croiseraient comme ça. La différence qu'il y a entre les deux c'est ça qui fera que quand on aplatit le truc...*

Mn: *Si il faisait comme ça, on n'arriverait pas à le faire le triangle. Parce que ça serait plus petit. Mais vu que ça se croise, on arrive à faire le triangle ça veut dire que 7 et 4 c'est plus grand que 11 !*

Md: *Oui mais il y a un truc qu'est pas logique c'est que..*

Quelle que soit la position personnelle de tel ou tel élève, le dédoublement des triangles est constamment présent, il fait bien partie du système, transcendant les espaces-problèmes de chaque élève. Ce qui fait alors évoluer ce milieu, sous la contrainte de devoir rédiger une affiche, c'est l'élaboration d'un vocabulaire commun et cohérent, dénotant la construction de connaissances communes au groupe. Nous pensons au "débordement", au "petit espace là", au "4", au "7" et au "11". Ce travail entraîne les élèves d'une problématique de formulation vers une démarche de preuve, tant pour comprendre que pour convaincre. C'est ce travail, difficile, qui permettra au groupe de se mettre d'accord à propos du texte final. Accord et milieu négociés en commun, asservis à la situation, et ne s'identifiant pas aux positions personnelles des élèves. Voilà ce qu'en dit Mélodie dans l'entretien individuel :

"Carole ne comprenait pas, alors on essayait de lui expliquer, très vite. Thomas et moi, on disait quelque chose et Mélanie contrait tout ce qu'on disait, alors Mélanie, Thomas et moi on arrivait bien à mélanger et à trouver quelque chose. A la fin, Thomas et moi on était d'accord, avec Mélanie on était d'accord aussi. Mais avec Carole on était pas trop d'accord. Elle croyait pas que c'était notre oeil, mais que c'était nos traits."

La réalité de cette ébauche de milieu commun sera brusquement révélée par l'impossibilité pour les élèves du groupe de communiquer ce qu'ils ont construit au maître et à leurs camarades lors du débat final. Et parmi les variables didactiques il en est une, essentielle, que nous n'avons pas encore mentionnée. Il s'agit bien sûr du temps, qui a permis l'émergence de cette micro-culture. Les élèves s'en rendent bien compte d'ailleurs :

C: *Vous ne croyez pas qu'on complique tout là ?*
Th et Md: *Mais non !*
Md: *Non ! C'est un problème compliqué, puisqu'il nous donne deux heures pour le faire*

La présence du micro et de l'observateur, la mise à l'écart du groupe ont également contribué à renforcer ces effets.

III.4. Évolution des élèves

Dans quelle mesure la discussion entre eux fait-elle évoluer la position personnelle des élèves :
Md: *Mais oui, c'est parce que quand tu prends le 4 là et tu fais un rond ça fait tchchchchc là comme ça là il est encore tout droit.*
Th. *Oui, sur ton dessin, mais logiquement il est pas tout droit.*
Md: *Oui mais il est un peu tout droit.*
Th: *Oui, un peu mais...*

Dès le départ, ni Thomas, ni Mélodie ne mettent en discussion l'impossibilité logique d'un triangle aplati, mais ils obtiennent cette conclusion à travers des représentations différentes.

Certes, ils ont l'air d'accord au début avec l'idée qu'il s'agit d'une question de chemin plus court, mais si Mélodie évolue, dans sa représentation, vers un triangle fait de segments articulés aux extrémités avec des côtés "4" et "7" s'écartant forcément l'un de l'autre, comme les deux battants d'une porte (gestes de la main produits lors de l'entretien individuel ultérieur), pour Thomas, c'est un peu plus subtil dans la mesure où il semble avoir conçu des côtés de 4 et de 7 qui sont plus longs que 4 et que 7, mais auxquels il continue à donner le nom de 4 et de 7, ce qui l'amène, dans l'entretien individuel, à tracer un schéma du triangle tout en disant que 4 et 7 ne correspondent pas au chemin le plus direct. "si on met ça en km, je mettrais moins de temps pour faire 3 km comme ça que 1 km + 2 km" (Fig. 9).

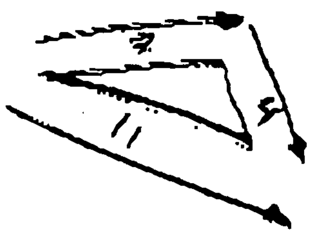


Figure 9.

Il gère la contradiction entre logique et "pratique" en introduisant des unités physiques lui permettant de distinguer le temps de l'espace. La position de Thomas est ainsi un révélateur ici de la présence, pour lui, du triangle présenté à la classe et ceci malgré son point de vue "logique". Remarquons ici que cette idée de "plus court chemin" ne fournit plus à Thomas les moyens de rejeter le triangle aplati "pratique". Il semble qu'un autre modèle, comme de celui de Mélodie par exemple, soit nécessaire. Interrogés après coup sur la question de la précision des mesures, Thomas et Mélodie avouent ne pas avoir pensé à la remettre en cause, contrairement à d'autres groupes de la classe. Tout se passe comme si Thomas et Mélodie considèrent leur action dans un milieu "idéal" et non uniquement dans le milieu physique du dessin et que ce qui les travaille c'est le rapport entre les deux milieux, une question de vision pour Mélodie, une question de procédé pour Thomas qui pense qu'il y a une "vraie" façon de faire, à découvrir. La position P1c est encore très forte chez lui :

Th: Mais c'est faux ! Mais déjà on est sur un truc qu'est faux. Il faut une autre feuille, puis ***faire vraiment.*** *Parce que regarde, logiquement si tu fais 7...*

Mélanie, quand à elle, ne se pose pas la même question que Thomas et Mélodie. Elle recherche cependant une certaine cohérence théorique et semble évoluer, cherchant à trouver la ou les règles régissant le problème. Après avoir facilement accepté le 4+7 =11 c'est sa construction qui remet tout en cause. Elle est ensuite satisfaite d'avoir pu produire une propriété quelque peu générale qu'elle réussit finalement à raccrocher à la réponse rédigée par Mélodie. Néanmoins, l'évolution de Mélanie nous semble fragile. Elle reste très pragmatique, expérimentale proposant souvent des vérifications par le dessin, allant chercher le grand compas du tableau noir, demandant un rapporteur, une ficelle. Par la suite, le rapport de Mélanie au problème semble évoluer en ce qui concerne le triangle plat puisqu'elle déclare que "*Les deux arcs de cercle des deux autres côtés, en fait ils se touchent seulement à la base.*" et son diagnostic est alors qu'il s'agit d'une question de précision. L'entretien postérieur montrera que la discussion avec le groupe ne lui a pas permis de conforter cette idée, puisqu'elle semble la redécouvrir lorsque l'observateur la lui suggère.

Quand à Carole, elle a beaucoup de peine à "entrer" dans la situation, sans doute habituée à ne pas comprendre et attendant que les autres produisent la réponse. Elle se laisse parfois prendre au jeu collectif, comme on l'a vu plus haut (page 17). Pour elle, la théorie reste entièrement du côté du maître qui a la charge d'en établir la validité. Dans ces conditions, le problème ne se pose pas et *"si on a les mesures précises, alors on peut construire le triangle"*. Autant dire qu'elle renvoie l'enseignant à son contrat.

IV REMARQUES FINALES

1. Notre expérimentation ne s'est pas déroulée comme le prévoyait l'ingénierie. S'agissant de recherche concernant un système aussi complexe que le système didactique, il n'y a rien d'étonnant. Les données récoltées étant particulièrement intéressantes, nous avons voulu en extraire ces réflexions. Il s'agirait maintenant d'étudier la reproductibilité de l'important effet de contrat didactique que nous avons observé. Notons à ce propos que Brousseau (1987) propose de faire entrer les élèves dans la "problématique géométrique" en utilisant une manipulation didactique à certains égards analogue à ce que nous avons observé, mais en y introduisant de fort enjeux sociaux [21]. Voir aussi l'analyse qu'en font Berthelot et Salin (1992). Des observations que nous avons pu faire semblent confirmer qu'un tel type de contrat peut installer toute une classe d'élèves de 15 ans dans la pratique graphique, avec l'espoir de les mener vers un point où la contradiction éclatera.

---

[21] Trouver un triangle tel qu'en traçant les médiatrices des côtés on obtienne avec leurs intersections les sommets du plus grand triangle possible. C'est une injonction paradoxale qui affronte clairement la contradiction entre la règle géométrique et la réalité graphique : on demande en effet de travailler dans le sens de la contradiction maximale !

En ce qui concerne l'évocation de rapports de l'ordre de la modélisation (cercle LOGO, la platitude locale de la terre), notons que ceux-ci sont le fait des élèves partant du milieu figure et que cela semble être un moyen pour eux de convaincre leurs camarades, d'expliciter leurs expériences mentales. Mais une activité de modélisation ne semble pas apparaître en tant que telle et les élèves "réalistes" ne produisent pas d'eux-mêmes des analogies du même ordre : l'action semble se suffire à elle-même et on comprend ainsi l'intérêt de la proposition de Brousseau.

2. A l'heure où l'on [22] parle beaucoup d'activités de résolution de problèmes ou ateliers de modélisation, l'étude que nous avons présentée montre les potentialités d'un groupe d'élèves à qui l'on a laissé le temps. Mais elle montre aussi ce que peut apporter aux enseignants un examen approfondi, mathématique et didactique, des situations proposées. Une seule décision peut avoir des effets imprévisibles pour lui. Selon le projet qu'il s'est donné il devra alors choisir le moment opportun pour interrompre le travail des élèves. Assez tôt si le débat collectif est le point important de l'ingénierie, pour que le vocabulaire et les règles qui se construisent soient celles de l'ensemble de la classe et pas particulières à chaque groupe. Et si la perspective est plutôt celle d'un atelier mathématique, il semble aussi qu'une intervention adéquate peut fournir aux élèves des éléments qui leur manquent. Quant aux critères précis déterminant ces prises de décisions, l'enseignant devra sans doute les construire lui même à travers sa propre expérience et selon les objectifs qu'il se fixe.

3. Notre étude aurait pu également avoir un volet d'épistémologie expérimentale. Les constructions théoriques de Thomas et de Mélodie nous font un peu penser, toutes proportions gardées, à celles que les mathématiciens comme Saccheri et Legendre ont développé en cherchant à ramener le postulat des parallèles à un énoncé plus "évident" intuitivement (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986 ainsi que Pont, 1986). Les deux élèves affrontent les relations contradictoires entre géométrie pratique et géométrie théorique et c'est en fin de compte de telles relations entre géométries "vraies" et "fausses" qui sont le moteur du travail de ces mathématiciens. Nous retrouvons Platon (La République) :

Si l'unité est perçue en elle-même, de façon satisfaisante, par la vue ou quelque autre sens, elle n'attirera pas notre âme vers l'essence (...); mais si la vue de l'unité offre toujours quelque contradiction, de sorte qu'elle ne paraisse pas plus unité que multiplicité, alors il faudra un juge pour en décider; l'âme est forcément embarrassée, et, réveillant en elle l'entendement, elle est contrainte de faire des recherches et de se demander ce que peut être l'unité en soi...

[22] Ce "on" désigne la noosphère, c'est-à-dire les lieux où l'on parle de l'enseignement des mathématiques, et où l'on cherche à le modifier.

Bibliographie

ACTES des journées didactiques de La Fouly (à paraître). *L'analyse de protocole entre didactique des mathématiques et psychologie cognitive.* Comptes rendus provisoires de ces journées parus en 1994 dans la collection des cahiers du GCR/SSRE à l'Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques, Neuchâtel.

ARSAC, G. (1994). Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *Petit x n° 37.* IREM de Grenoble.

ARSAC, G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège.* IREM de Lyon et Presses Universitaires de Lyon.

ARTIGUE, M., ROBINET J. (1982). Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. *Recherche en didactique des mathématiques,* 3.1, 5-64. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BERTHELOT R., SALIN M.H., (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques,* 7.2. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1987). Didactique des mathématiques et questions d'enseignement : proposition pour la géométrie. *Les sciences de l'éducation,* 1-2/1987. CERSE, Université de Caen.

BROUSSEAU G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques,* 9.3. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x n° 19.* IREM de Grenoble.

DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Collection Points. Seuil, Paris.

GAVA, R. (1988). *Le triangle aplati.* Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon I.

GONSETH, F. (1945-1948). *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon, Neuchâtel.

HILBERT, D. (1899, 1971). *Les fondements de la géométrie.* édition critique par P. Rossier, Dunod, Paris.

LEGRAND, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 9.3, 365-406. Grenoble : La Pensée Sauvage

LEROUGE, A. (1993). Contagion de signifiant et contagion de référence : sur la conceptualisation de l'intersection de deux droites. *Les sciences de l'éducation*, 1-3/1993. CERSE, Université de Caen.

MARGOLINAS C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

MERCIER, A. (1992-1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège - troisième partie. *Petit x n° 33*. IREM de Grenoble.

MERCIER, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de l'Université Bordeaux I, diffusée par l'IREM d'Aix-Marseille.

NOIRFALISE, R. (1993). Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Recherche en didactique des mathématiques*, 13.3, 229-256. Grenoble : La Pensée Sauvage.

NORTHROP, E. P. (1944, 1975). *Riddles in mathematics*. Rogert E. Krieger, Huntington New York.

PLATON, trad. Baccou, R. (1966). *La république*. Paris : Garnier-Flammarion.

PONT, J.-C. (1986). L'aventure des parallèles. Berne : Peter Lang.

ROUCHIER, A. (1991). *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans.

VERKERK, H. (1990). *Du dessin au concept de figure : évidence du dessin et argumentation dans le cas du triangle aplati*. Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon I.