RICOCHETS [1]

François CONNE
Chercheur en didactique des mathématiques
La Romanèche, Etoy - Suisse

« Ne lisez pas cet ouvrage pour prendre des leçons de moi. Je n'en donne qu'à moi, qui commence comme vous : donnez-vous-en à vous même. Ce que vous ne savez pas, apprenez-le de ce que vous savez, et que vos découvertes soient pour vous, comme des réminiscences.»
Condillac. (La langue des calculs, Chap V du livre second)

Pour les lecteurs de «petit x»

Ce texte fait référence à une recherche menée à Genève dans l'équipe que Jean Brun anime depuis passé quinze ans. Elle a été présentée à divers reprises, dont une fois à l'université d'été de Didactique des Mathématiques, Olivet, juillet 1988. Puis elle a fait l'objet d'un article cité ci-dessus, paru dans la revue suisse de recherches en éducation. Cet article a été discuté au séminaire national de didactique des mathématiques en 1991, et dès lors largement diffusé dans la communauté des didacticiens. A quoi bon alors y revenir ? En quoi l'expérience vaudrait-elle pour l'école secondaire ? Certes il n'est pas inimaginable de penser y adapter une telle situation, mais le point n'est somme toutes pas là. Le présent texte analyse l'usage d'un modèle mathématique pour le montage, l'analyse et l'interprétation des données d'observation. Or ce modèle est très proche de ceux qui inspirent les exposés de notions comme la mesure, les rapports, les rapports de mesure, etc. Ces points sont sensibles. Mais il y a plus. On peut considérer que ce texte part de l'exposé mathématique d'un modèle dont il pousse les développements dans deux directions : une élémentarisation, et c'est alors l'exposé du montage de la situation, une sophistication allant guigner vers des questions plus proprement mathématiques, comme celle de la commensuration, et des algorithmes dont on peut disposer, ou du théorème de Bezout. Cette démarche est très clairement didacticienne, et montre toute l'épaisseur épistémologique de nos études. J'ai été très amusé de voir que je pouvais ainsi proposer une analyse en chaîne, et quelques uns des rebondissements que cela a pu occasionner dans ma tête. De ce point de vue je crois qu'un tel texte peut aider à penser une mathématique didactiquement souple qui sache surfer sur les déferlements curriculaires. Bien sûr, et tant mieux ou tant pis, les personnes qui ont pu bénéficier d'une solide formation en mathématiques sont privilégiées par un tel type d'analyse. J'espère donc que cela amusera le lecteur de «petit x».

[1] Ce texte se réfère à l'article : Brun J., Conne F. (1990) *Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations.* (Disponible auprès de l'auteur).

«petit x» n° 39, pp. 5 à 27, 1994 - 1995

Je tiens cependant à dire que ce texte a une autre valeur pour moi. C'est celui d'exposer notre façon de travailler dans l'équipe animée par J. Brun, en Suisse Romande. Ce travail ne saurait donc m'être attribué, prenez mon article comme un témoignage d'une pratique collective de recherche. Et permettez-moi de remercier ici toute la nombreuse équipe de collaborateurs : Jean Brun, Gérard Charrière, Nadia Guillet, Françoise Hirsig, Richard Schubauer, Danièle Berney, Marcelle Goerg, Maria-Luisa Schubauer Leoni, Ruhal Floris, que je cite dans le désordre de ma mémoire. Qu'ils soient félicités d'avoir su mettre une si jolie situation au point. Qu'ils reçoivent ensuite ma reconnaissance pour avoir subi, suivi, mes élucubrations et sauté par dessus les défauts de ma pensée allusive. Merci aussi à Gisèle Lemoyne et Jean Portugais de l'université de Montréal qui ont participé à nos travaux et sont désormais des interlocuteurs à choyer. Merci enfin à deux féroces lectrices qui ne m'ont pas laissé en paix avec les divers brouillons qu'a connu ce texte, je veux dire Marie-Hélène Salin, Annie Bessot. A eux je dois l'adaptation franco-française d'un texte d'abord écrit en suisse francophone.

Avertissement

Ici, et dans toute la suite de ce texte, le mot distance sera pris dans l'acception que Piaget et ses collaborateurs ont utilisé lors de leurs études à ce propos. Dans leurs expériences ils faisaient la distinction entre ce qu'ils désignaient comme la longueur d'un objet matériel (portion pleine entre deux extrémités de l'objet), et la distance entre deux points, portion spatiale, vide, entre ces deux points. Aux longueurs et aux distances on peut associer des grandeurs. Dans l'expérience que nous relatons, nous dirons donc que les élèves doivent mesurer, à l'aide de la longueur d'une baguette unité, la distance entre deux points marqués par des plots disposés sur le sol. C'est aussi sur le jeu entre longueurs, distances et leurs mesures que se base la situation.

En mathématiques scolaires, le mot de distance est défini autrement. Une distance est une application (fonction) qui attribue un nombre à tout couple de points d'un espace. Cette application vérifie certaines conditions (dites axiomes de la distance). La distance de deux points est alors le nombre attribué par cette application à ce couple de points, la longueur d'un objet n'est rien d'autre que la distance entre ses extrémités.

Propos de cette note

Je trouve utile de déployer tous les constituants de la démarche des didacticiens lors de cette expérience. Comme je vais me référer constamment au modèle de la situation des distances donné par le mathématicien, je commence par le rappeler au lecteur.

« Problème :

Comparer les distances d_1, mesurable à l'aide d'une baguette non graduée b_1, et d_2 mesurable à l'aide d'une seconde baguette non graduée b_2. Le mesurage conduit aux nombres n_1 et n_2 tels que :

$$d_1=n_1 x b_1,\ d_2=n_2 x b_2 .$$

La comparaison de d_1 et de d_2 se ramène à la comparaison des rapports $h=n_2/n_1$ et $k=b_1/b_2$.

$$d_2/d_1=(n_2 x b_2)/(n_1 x b_1)=(n_2/n_1)/(b_1/b_2)=h/k$$

Seule est intéressante la situation où $b_2 \neq b_1$, rien n'empêche alors de supposer que $b_2 < b_1$, c'est-à-dire $b_1/b_2 = k > 1$.

Deux cas se présentent :

I. $n_2 \leq n_1$ donc $(n_2/n_1)=h \leq 1$; la conclusion est immédiate : $(d_2/d_1)<1$ ou $d_2<d_1$.

II. $n_2>n_1$ donc $(n_2/n_1) = h > 1$; $k>1$

la conclusion dépend du rapport h/k puisque $d_2/d_1=h/k$.

Exemple :

$b_1 = 50$, $b_2 = 25$, et $n_1 = 8$ $n_2 = 12$. $k = b_1/b_2 = 2$ et $h = n_2/n_1 = 3/2$.

La conclusion: $d_2/d_1= h/k = (3/2)/2 = 3/4 < 1$, d'où $d_2<d_1$. »

Premières considérations : un long parcours entre le concept de mesure et la situation expérimentale, alors que la descente ne dit pas comment remonter

Partons de l'intention d'enseigner qui préside à la situation didactique. Il s'agit essentiellement de soumettre aux élèves un problème qui devrait contribuer à l'élaboration de leurs savoirs relatifs à la mesure des longueur, et en particulier des relations qui existent entre mesure et unité de mesure.

Le modèle mathématique ne décrit pas exactement la situation proposée aux élèves. Il indique plutôt au didacticien un cas où ce problème se pose. La première fonction du modèle est donc de situer la situation didactique parmi un ensemble de variantes, dont certaines sont a priori moins problématiques. Ceci est explicitement discuté dans le modèle lorsqu'il examine deux cas possibles selon qu'on a $n_1>n_2$ ou $n_1< n_2$.

Le modèle proposé se réfère à une théorie mathématique assez élaborée de la mesure. Elle est supposée admise, et se trouve exposée dans des ouvrages de mathématiques. Le lecteur intéressé pourra se référer à APMEP (1982) ou à N. Rouche (1992). Donc, la théorie de la mesure, bien que sous-jacente, ne s'y trouve pas explicitée. Elle est comme enfermée dans le modèle.

Remarquons aussi que les développements internes du modèle n'auront pas à être repris dans le traitement de la situation. Le modèle nous indique au contraire ce qu'il faut mesurer et quel calcul il faut mener avec ces données pour être à même de comparer les deux distances. Le modèle nous fournit une grille d'analyse de toutes les situations analogues à la notre. Le modèle décrit formellement un espace potentiel, hypothétique.

Le mouvement va donc de la théorie mathématique vers une réalisation didactique, en passant par la donnée de ce modèle de situations de comparaison de mesures. Dit autrement, ici et dans la démarche du didacticien, c'est la situation qui est assimilée à la théorie mathématique et pas le contraire. Le chemin qui mènerait les élèves de la situation vers le savoir mathématique n'est donc pas donné, ni avec le modèle mathématique proposé, ni avec la théorie mathématique de la mesure, qui y préside. Nous voudrions pourtant bien savoir quel pourrait être ce chemin.

Ceci revient à nous demander quel peut-être a priori l'intérêt didactique d'une telle situation. Reprenons donc : les didacticiens ne visent pas l'enseignement de modèles, et c'est bien la mesure qui est l'enjeu. La situation est censée amener les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de la mesure, à savoir l'explicitation de la relativité de toute mesure à une unité donnée. Cela n'est qu'un aspect du concept. Comment poursuivre, comment s'y prendre, didactiquement, pour relier ceci aux autres aspects (par exemple le traitement des rapports de longueur ou de distances, etc...) ? Répondre à ceci, autrement qu'empiriquement, suppose qu'on puisse analyser chez les élèves l'impact d'une telle expérience sur la conceptualisation de la mesure.

Secondes considérations : un modèle et l'algorithme qui lui est associé, l'isolement du contexte

On trouve dans la description du modèle des rapports, qui sont effectivement les termes appropriés pour envisager les questions de mesure, mais qui ne sont pas nécessairement induits par la situation proposée. Entre autres, le modèle permet de calculer le rapport entre d_2 et d_1, alors que la situation proposée ne demande qu'une comparaison : *laquelle des distances est-elle la plus grande ?* D'autre part, si n_1 et n_2 sont des nombres, d_1, d_2, b_1 et b_2 ne le sont pas. Par contre les trois rapports considérés d_2/d_1, b_1/b_2 et n_2/n_1 sont des nombres et n'ont plus qu'à être traités comme tels.

Le modèle recourt aussi à des expressions et des développements algébriques. Il suffit d'ailleurs que le mathématicien nous les expose une fois, sans que nous ayons à y revenir. Dans la situation, ces traitements, propres au modèle (sa syntaxe, sa cuisine) ne sont pas requis. Le modèle indique plutôt quelles informations il suffit de retenir de la situation et quels traitements donner à ces informations. On peut donc considérer que le modèle indique un algorithme de traitement de cette classe de situations de comparaison de distances. Étant entendu que sont supposées connues par ailleurs, les méthodes de mesurage et les méthodes de comparaison de distances (ou encore les méthodes de calcul des rapports numériques et des rapports d'unités).

Les constituants du modèle font donc appel à des notions mathématiques élaborées. Ceci contraste fortement avec l'intention didactique beaucoup plus modeste qui consiste, rappelons-le, à étudier la relation entre mesures et unités de mesure (et la relativité des premières au secondes). On ne peut donc pas espérer d'une telle situation que d'elle-même, elle conduise l'élève à traiter la mesure comme le fait la théorie mathématique.

Troisièmes considérations : décrivons maintenant le problème

Les considérations ci-dessus, si elles suffisent généralement à évoquer le problème posé, n'en constituent pas pour autant une description. Le modèle indique seulement que, dans un certain cas ($b_1>b_2$ mais $n_1< n_2$), on ne peut conclure par une comparaison directe de n_1 et de n_2. Rappelons d'ailleurs que dans tous les cas où on voudrait calculer le rapport des distances d_1 et d_2 (et non plus se contenter de comparer ces distances), il faudrait passer par la même formule.

Il ne saurait y avoir problème sans que cela implique une hypothèse sur les élèves. Ici, elle consiste à penser que les élèves auront tendance à prendre les mesures comme des données absolues, et croire que la comparaison des distances d_1 et d_2 se ramène simplement à la comparaison des mesures n_1 et de n_2. Cette croyance aura pu être renforcée par le fait que dans certains cas, justement, elle aboutit effectivement à un jugement correct. Le didacticien se propose alors de retenir un cas qui mettra en défaut cette croyance, en espérant qu'ainsi les élèves viennent à entrevoir la relativité de la mesure (aux unités de mesures choisies). Pour que l'expérience se déroule correctement, il importe donc de se contenter de demander une comparaison des distances, et non pas un calcul de leur rapport (ni de leur différence). En effet, comme remarqué ci-dessus, le calcul estompe la distinction des cas sur laquelle repose tout le raisonnement du didacticien.

Je puis être plus précis pour décrire le conflit qu'espère induire le didacticien lors de sa mise en scène. On suppose que les premières intuitions de la mesure et de sa quantification conduisent les sujets aux deux types de jugements suivants :

- A grande distance, grande mesure. Cette relation est conséquence du fait que dire grande distance suppose implicitement une comparaison, un ordre de grandeur, quasiment une unité.
- A petite unité, grandes mesures. Ici encore une comparaison implicite, y préside.

Il s'agit donc de mettre en conflit ces relations. Les élèves devront élaborer d'autres relations qui leur permettent de résoudre leur problème en articulant et relativisant leurs intuitions premières. Cette construction peut être évoquée par des idées de compensation (la grandeur de la mesure est compensée par la petitesse de l'unité) ou encore de correction (la mesure doit être transformée par un facteur correctif rendant compte de la relations entre unités), etc.... La contradiction pourrait se résoudre par une nouvelle relation, intuitive et peu élaborée, à savoir que compensation veut dire pleine compensation. Ceci confère au cas d'égalité des distances une valeur particulière. Du point de vue du raisonnement attendu de la part des élèves, ceci pourra constituer une véritable hypothèse de travail. Examiner si cette hypothèse est vérifiée ou non par cette situation revient à répondre à la question posée.

Ceci montre clairement comment il est prévu que la question initiale : *Qui a la plus grande distance ?* se traduise en un problème :

> Comment concilier les relations contradictoires induites par la donnée: n_2 est grande, mais c'est la mesure avec la petite unité ?

J'insiste à faire remarquer que *cette idée de compensation* (exprimée de cette façon ou d'une autre, qu'importe) *est totalement transformée par le modèle mathématique qui la ramène à un rapport*. Voir une trace de cette compensation dans ces rapports n'est qu'une interprétation de notre pensée, c'est un effet de représentation. Cela nous aide, et beaucoup, à nous rendre intelligible le modèle, c'est un apport externe.

Redit autrement, nous avons là une considération, qui, bien qu'inutile sur un plan formel, est précieuse pour son intelligibilité. Ici se manifeste la fonction de représentation qui lie connaissance à situation, et voilà le point de rencontre entre le didacticien et les élèves. C'est bien dans cette direction qu'il faut chercher pour comprendre l'impact didactique de l'expérience proposée aux élèves.

Si la situation n'est pas faite pour enseigner le modèle mathématique qui la fonde (tant mathématiquement, que didactiquement, vu la démarche du didacticien décrite ci-dessus), elle n'en contribue pas moins à rendre accessible (même si c'est à long terme), la théorie mathématique de la mesure qui est sous-jacente. La situation proposée, plutôt que d'enseigner la mesure, ou le savoir développé mathématiquement autour de ce concept, entend y ouvrir des voies d'accès.

Quatrièmes considérations : relations et hypothèses, raisonnements formels, ou en contexte

Les formalisations d'un modèle comme celui que nous avons analysé ne sont pas nécessaires à la résolution du problème décrit ci-dessus. Un raisonnement, élaboré en contexte (heuristique), permet de le résoudre, sans passer par l'élaboration d'un modèle mathématique (algorithme), ni par l'explicitation de la théorie de la mesure sous-jacente. Voici un tel raisonnement. Prenons l'exemple donné avec le modèle mathématique.

> Supposons que nos baguettes unités, b_1 et b_2, mesurent respectivement 50 et 25, et que les mesures de d_1 et d_2 donnent 8 b_1 et 12 b_2 . Comme b_1 vaut le double de b_2, d_2 mesure seulement 6 b_1, c'est plus petit que d_1 qui mesure 8 b_1.

Cet exemple est facilement intelligible. Un premier aspect y contribue. Le raisonnement est tenu en contexte. J'entend par là que les relations faites trouvent immédiatement leur correspondant dans les données de la situation, les nombres donnés pour b_1 et b_2 les rendent immédiatement comparables, et le facteur correctif permettant de comparer n_1 et n_2 est très vite perçu. Ceci fait que le raisonnement progresse sur la trame des données numériques, fixées, réalisée ; *plus que directement articulées, les relations se développent en se raccrochant au contexte.*

Si l'exemple est levé, alors l'explicitation du raisonnement deviendra plus délicate, et le résultat sera moins facilement appréhendable pour le lecteur. Voici ce que cela peut donner :

> Nous pouvons toujours supposer que b_1 est plus grand que b_2. Supposons en outre que b_1 soit k fois plus grand que b_2. (Ne cherchons pas à en savoir plus sur k, si c'est un nombre entier ou fractionnaire, familier ou non.) Le mesurage d'une même distance nécessitera k fois moins de reports avec b_1 qu'avec b_2. Dès lors, si les distances d_1 et d_2 sont égales, la mesure de d_1, n_1, sera k fois plus petite que celle de d_2, n_2. Sinon alors soit n_1 est encore plus petit, ce qui voudra dire que d_1 est plus petite que d_2 ; soit n_1 est plus grand, ce qui signifie que d_1 est plus grande que d_2.

Je ne veux pas entrer ici sur des considérations de style concernant l'expression de ce raisonnement, sa structure, les symétries sur les quelles il repose. D'autres variantes, sans doutes plus élégantes, sont envisageables. Enfin, d'autres raisonnements sont encore possibles. C'est un effet de contraste que je tiens à mettre en évidence, ici. L'explicitation devient laborieuse, et ne peut pas rendre compte de la vitesse avec laquelle les relations sont enchaînées dans le raisonnement effectif. Ce contraste s'explique. En cherchant à décrire ce raisonnement en m'abstenant de me référer à un contexte, mon discours verse du côté des modèles, qui ouvrent tout un espace de potentialités. Nous retrouvons ce que j'ai déjà explicité plus haut.

Cette mise en évidence de ce qui distingue les raisonnements en contexte, des raisonnement formels est intéressante. Pourtant tout raisonnement, contextualisé ou non, exemplifié ou pas, repose sur un certain nombre de mises en relations. Ni les contextes, ni les exemples nous en dispensent. Le contexte n'est facilitateur que dans le sens où ces relations peuvent y être rapidement fixées (ici, quantifiées) par l'examen de la situation. On peut dire, pour reprendre la distinction de M. Reuchlin (1973), « réalisées ». Le contexte ainsi enrichi d'une nouvelle valeur, le raisonnement peut reprendre, s'y appuyer. Dit autrement, nous trouvons plus de facilités à raisonner si nous pouvons nous baser sur des données actuelles plutôt qu'hypothétiques. La profondeur de relations et d'hypothèses non réalisées que nous pouvons développer varie selon les cas, selon les personnes et les instruments symboliques dont elles disposent.

La différence entre un traitement (formalisé, algorithmique, etc.), basé sur un modèle (lui-même fondé en théorie) et un traitement (réalisé, heuristique, etc.) basé sur des mises en relations aussitôt fixées par l'examen du contexte, réside dans leur mode de mises en relations. De ce point de vue un modèle articule directement des relations en les isolant des particularités de la situation, tandis que le raisonnement (calcul relationnel) procède à des mises en relations pour les réaliser aussitôt dans le contexte considéré.

Cependant, d'autres aspects sont à prendre en compte et à distinguer de l'effet de contextualisation. Ainsi dans l'exemple donné ci-dessus, on ne peut pas mettre sur un même pied, les diverses suppositions proposées. Celles-ci, en effet, n'ont pas la même fonction dans l'exposé du raisonnement. Par exemple, la première supposition selon laquelle b_1 est plus grande que b_2 ne concerne que nos notations. La seconde supposition indique que le lecteur peut quantifier la relation entre les unités et, de ce fait, rendre cette information exploitable pour la suite de son traitement, etc.... Plus loin, nous trouvons l'hypothèse, pivot du raisonnement, concernant l'égalité des distances.

Dans l'exposé des modèles de raisonnement possibles, l'introduction de telles hypothèses (*si les distances étaient égales alors leurs mesures seraient comparables de la même façon que le sont les unités, etc.)* en rend la compréhension difficile. Par contre, il suffira que cette hypothèse sur l'égalité soit assimilée par nous à une compensation de relations, pour la rendre beaucoup plus *naturelle*.

L'analyse faite plus haut montre qu'il s'agit là d'un élément de la problématisation du modèle mathématique, ou, si vous aimez les analogies, d'une contextualisation de ce modèle à l'élève (et pour être plus précis encore, il faudrait dire à la fonction représentation). Cet effet est rarement explicite, car pour quiconque, la prise en compte du modèle suppose une lecture, justement, donc l'entrée en jeu de ses propres représentations.

Enfin, une formalisation du raisonnement que nous examinons ici ne nous restituera pas le premier modèle de la situation que nous avons examiné. Par exemple, le facteur k n'est pas tant considéré comme un rapport de longueur, mais comme un opérateur dans la transformation de mesures. Ce n'est qu'un aspect particulier de la mesure et des rapports.

Un sujet pourra donc traiter cette situation et répondre à la question posée selon toute une gamme de raisonnements distincts, mais comparables. En effet tous s'inscrivent dans le prolongement des relations intuitives mises en conflit par la situation. Cette filiation ne peut cependant pas s'ordonner sur une seule ligne, et deux axes au moins sont à envisager : d'une part le degré de contextualisation du raisonnement, de l'autre, le degré de généralité des entités traitées.

Il n'est cependant pas dans mon propos, ni dans mes moyens actuels, d'établir, même partiellement, une telle hiérarchie. Pourtant, si ces considérations sont exactes, c'est de ce côté qu'il faudrait chercher la réponse à la question de l'exploitation didactique de cette situation. Au delà de la réussite du didacticien à induire un problème chez les élèves (conflit), la situation devrait lui permettre d'identifier le type de relations envisageables par eux, les calculs relationnels dont témoignent leurs raisonnements et leur degré de généralité (en quelque sorte la profondeur du modèle des élèves, représentable par le nombre d'enchaînements formels de relations qu'il effectue avant de les réaliser sur les données).

Cinquièmes considérations : paramètres de la situation expérimentale.

Nous venons de discuter longuement de la modélisation de la situation des distances. Il s'agit maintenant d'examiner la situation elle-même. Les élèves sont donc invités à comparer des distances mesurées avec des unités distinctes. Comment ceci va-t-il être mis en scène dans la situation expérimentale ?

La situation est proposée à un petit groupe d'élèves (4 à 6) qui se répartissent en deux équipes.

On la présente de la façon suivante : «Chaque équipe va travailler séparément et ne verra pas ce que l'autre équipe fait. Ensuite vous vous réunirez et discuterez de ce que vous avez fait et trouvé. Voici la tâche : Je vais préparer sur le sol une distance pour chaque équipe. Vous en prendrez connaissance chacun de votre côté. Le but, lorsque vous vous réunirez, sera de discuter pour savoir si les deux distances sont égales ou si l'une est plus grande que l'autre.»

Les élèves sortent. La maîtresse place sur le sol deux repères distants de 4 m. La première équipe entre et repère l'emplacement de la distance. La maîtresse dit : «Je vous ai apporté cette baguette». La baguette, non graduée mesure 50 cm. Les élèves ignorent la mesure de la distance et celle de la baguette.

Lorsque le premier groupe estime avoir terminé, il sort et le même déroulement a lieu avec la deuxième équipe qui traite d'une distance de 3 m avec une baguette de 25 cm, elle aussi bien sûr non graduée.

Puis les deux équipes se retrouvent. Les marques des distances ont été enlevées, mais des baguettes de chaque sorte, en nombre suffisant, sont à disposition des élèves sur une table.

Dégageons de cette description quelques traits :

a - Concernant les baguettes unités

La situation se caractérise par le fait que la mesure des longueurs des unités est inconnue et relativement inaccessible. Par contre, les baguettes sont données concrètement, et leur rapport est simple.

- Si on examine les données de la situation et qu'on les compare avec l'exemple exposé, on remarquera que l'on ne donne aux élèves aucun moyen pour déterminer la mesure des longueurs b_1 et b_2. Ils ne pourront que trouver leur rapport.

- Par contre ce rapport est élémentaire. Nous avons là peut-être une variable didactique propre à inciter les élèves à recourir à un “rapport”. Si tant est qu'on puisse le considérer comme tel étant donné qu'il va du simple au double, et que par conséquent il peut être considéré aussi bien comme additif : $b_1=b_2+b_2$, que comme multiplicatif : $b_1=2xb_2$!

- Nous pourrions regretter que les contraintes de la situation n'aient pas été plus fortes, ceci afin de bloquer irrémédiablement un traitement additif. Mais l'essentiel n'est peut-être pas tant de bloquer tel ou tel traitement, et ce surtout lorsque chacun d'eux reste relativement intuitif.

- Il apparaît donc clairement que les expérimentateurs ont voulu éviter aux élèves de s'affronter aux problèmes de commensuration (entre distances, ou encore entre unités de mesure). Les expérimentateurs on veillé à ce que le rapports des unités entre elles soit bien distingué des relations entre les mesures des distances à comparer. La situation est plus une situation portant sur la mesure que sur les unités.

- Nous verrons que, quoiqu'il en soit, ceci n'a pas empêché les élèves d'estimer ces longueurs en centimètres (recours à une référence conventionnelle commune qui “numérise” la comparaison) et de s'y fixer lors de leurs raisonnements.

b - Concernant les distances à comparer

Les distances vont disparaître matériellement au cours de la situation. Il faudra donc absolument en obtenir la mesure.

- La situation est aussi conçue pour ne pas donner la possibilité de comparer directement les deux distances d_1 et d_2. Disons que ce qui est nécessaire, c'est de trouver un moyen permettant soit de raisonner directement sur les nombres, soit de reconstruire ces distances au moyen de reports. Si ces reports sont envisageables, et les élèves ne se feront pas prier pour les faire ou du moins les tenter, ils demandent cependant un certain effort pour le réaliser, ce sont des traitements *relativement coûteux*.

c - Concernant les mesures respectives

Les mesures de chacune des distances selon les baguettes unités sont des nombres entiers très simples, mais le rapport entre ces mesures l'est moins. Nous avons vu que le rapport entre les distances n'est pas simple non plus.

- Les distances sont choisies de sorte qu'elles ne se trouvent pas dans un rapport aussi trivial que celui des unités. Ici le rapport est comme 3 est à 4.

- Ceci est déterminé par la contrainte sur les mesures, n_1 et n_2. On a choisi de présenter le cas II de la description formelle, pour lequel $n_2>n_1$.

- Ainsi nous nous trouvons avec des paramètres, h (n_2/n_1 valant 12/8), k (b_1/b_2 valant 2/1), et d_2/d_1 (valant 3/4) pas trop simples.

d - Concernant les activités requises

- Les élèves sont tenus de mettre en oeuvre leurs savoirs dans des mesurages effectifs, qu'on leur demande de faire et dont on leur demande de se souvenir. Par contre à leur charge de se rappeler que les nombres retenus comme mesure n'ont qu'une valeur relative à l'unité utilisée pour la mesure. A leur charge aussi de penser à comparer les unités entre elles pour pouvoir répondre à la question posée. Si, comme dit plus haut, la situation ne demande pas de traiter des unités et de leurs comparaison, il en reste que la *solution* au problème réside bel et bien dans une prise en compte *explicite* du rapport entre les baguettes unités (alors que, dans la pratique courante, la référence à une unité de mesure conventionnelle comme le centimètre assure *implicitement* une telle référence).

- Les élèves sont mis en situation de devoir comparer des résultats de mesurage obtenus séparément et ce, sans possibilité de repérage (les distances ne sont plus présentes). Ce point est important. En effet, l'expérience combine deux sous-situations: d'abord une *situation agie de mesurage*, ensuite une situation de comparaison, où les élèves doivent *évoquer deux situations*, le mesurage qu'ils ont effectivement réalisé peu de temps auparavant, d'une part, et le mesurage de leurs partenaires, auquel ils n'ont pas assisté. Ainsi donc, *une représentation différenciée des mesurage*, et de ce que signifient les nombres mesure obtenus est sollicitée de leur part.

En résumé, il me semble que le plus important réside effectivement dans l'idée que le dispositif de la situation ne permette pas de conserver les marques des distances d_1 et d_2 ni de comparer directement b_1 et b_2 par une graduation commune.

Sixièmes considérations : les raisonnements observés chez les élèves (cf. article J. Brun, F. Conne, 1990)

Revenons un bref instant sur la description du modèle (selon les *rapports*), et demandons-nous si la description par *rapport* ne va pas de soi ? - Oui certes, mais à la condition de pouvoir saisir conceptuellement la relation multiplicative imposée par l'isomorphisme de mesure. La description du problème n'est finalement pas si anodine quelle n'en a l'air (je ne fais même pas allusion ici aux questions de commensurabilité).

> Comparer les distances d_1, mesurable à l'aide d'une baguette non graduée b_1, et d_2 mesurable à l'aide d'une seconde baguette non graduée b_2. Le mesurage conduit aux nombres n_1 et n_2 tels que : $d_1=n_1 x b_1$, $d_2=n_2 x b_2$.
>
> Cette conceptualisation, nous tous la faisons, mais qu'en est-il des élèves ?
>
> On peut conclure de nos observations que les mesures sont considérées par les

élèves comme des *nombres entiers*, sur lesquels il est possible d'opérer soit additivement soit multiplicativement, *mais pas comme des rapports*. Il apparaît d'une manière générale en effet que les élèves ont spontanément raisonné selon *un modèle mixte* : traitement par *différence* comportant un correctif par *proportionnalité*. Les conditions de la situation n'ont pas suffi à bloquer tout traitement additif (plus précisément par *différence*, cf. infra). Comme nous l'avions dénoté en théorie, cela aura tenu au fait que les élèves gardaient à disposition les baguettes unités, qu'elles étaient dans un rapport simple (1 à 2), et qu'il était de toute manière impossible d'éviter qu'ils n'évoquent les mesures standard, et de ce fait implicitement (et comme nous l'avons dit illusoirement) communes. L'intérêt réside dans le fait que les deux traitements se sont combinés. La question reste ouverte de savoir comment leurs représentations pourraient évoluer sur ce point. Faut-il rappeler ici que les auteurs de la situation, n'ont jamais eu la prétention d'enseigner avec elle toutes les subtilités du concept de mesure ?

Mais examinons plus précisément ces indications globales. Comparons d'abord les raisonnements effectifs des élèves et la description formelle. Dit grossièrement, les élèves ne vont pas chercher aussi loin que le mathématicien. Bien sûr ils ne sont confrontés qu'à un cas particulier de comparaison. b_1 et b_2 sont même dans un rapport simple de 2 à 1 (b_1 se mesure avec b_2, $b1=2xb_2=b_2+b_2$) tandis que le modèle mathématique est le support pour une discussion, et, à cette fin, établit une paramétrisation de la situation. Par contre, *les raisonnements des élèves ne sont pas aussi simples* que ceux engagés dans les expressions mathématiques du modèle. Ils ne reposent en effet pas sur des relations multiplicatives ou additives *pures*. En ce sens, *ils sont moins abstraits* que les raisonnements du mathématicien (ce sont des raisonnements en contexte). Ils se ramènent tous à peu près à ceci :

> L'unité b_2 est la moitié de l'unité b_1. La mesure de d_2 avec b_2 est de 12. Elle serait donc de 6 avec b_1. Or la mesure de d_1 avec b_1 est de 8, c'est donc plus.

- «ça veut dire 2 tours de mieux» dira Sa, n°35 du protocole (cf. Brun, Conne 1990) en voulant dire "deux reports de b1 de plus pour mesurer d_1 que pour mesurer d_2" la différence est donc explicitement évaluée comme justification de la réponse : d_1 est la plus grande.

Où donc trouve-t-on le rapport 3/4 calculé dans le modèle de la situation [à savoir : $d_2/d_1=(n_2/n_1)/(b_1/b_2)=(12/8)/2/1)=(3/2)/2)$] ?

Un autre aspect montrant la différence entre la mathématisation des élèves et le modèle mathématique de la situation est à considérer. Répétons que dans la situation expérimentale, les élèves disposent de 3 données : n_1 (8), n_2 (12), et k (2). Pour appliquer le modèle, il faudrait encore calculer $h=n_2/n_1$. Dans leurs discussions, ils ne se sont pas arrêté à ces 3 données. Ainsi ils ont cherché à évaluer la différence des distances et pour ce faire on cherché à estimer (réaliser) leur mesures dans des unités standard, les centimètres. Ceci revient à considérer une unité commune b_3, et des nombres m_1 et m_2 qui seront les mesures respectives de b_1 et b_2 selon cette unité (en centimètres).

- Ainsi au n° 14 du protocole, Al. indique qu'il a raisonné sur une unité, b_2, *estimée* à 20 cm.

- Plus loin, n°39, Sa. reprend cette estimation pour *calculer l'estimation de la différence entre les distances* : «alors on avait 80 cm de plus que vous à peu près».

Formellement son calcul peut s'écrire comme la combinaison d'un traitement par différence : n_1-n_2 et d'un traitement par rapport : $k'=b_1/b_2$, ce qui donne :

$(n_1xk'-n_2)xb_2$. [(8x2-12)x20cm = 80cm].

C'est donc à un traitement mixte que nous avons affaire : par les rapports lorsqu'il s'agit de traiter le rapport des longueurs b_1 et b_2, par les différences en ce qui concerne le traitement des mesures des distances n_1 et n_2.

- Plus loin encore, lors de la discussion finale avec la maîtresse, les élèves referont tous ces calculs, d'abord sur la base de l'estimation précédante, puis sur la base de l'information donnée par la maîtresse lorsqu'elle déclare : «non alors si je vous dis maintenant que le petit bâton...en réalité c'était pas mal évalué...en réalité c'était 25 centimètres».

Le passage à une telle estimation permet de fixer le rapport des unités b_1 et b_2, ainsi qui au lieu d'être exprimé par un rapport: $2b_2$ pour $1b_1$, il le sera par un rapport entre deux nombres: 25 cm et son double (par exemple). Ceci dénote aussi que les données du problème ne sont pas toutes traitées de la même façon. On peut interpréter ceci. Dans la situation, les distances, d_1 et d_2, et les unités (longueurs), b_1 et b_2, n'ont pas la même fonction. Tout se passe alors comme si la question posée : *déterminer la distance la plus grande* était traitée par *différence.* S'en suit le calcul de d_1 - d_2, puis la recherche de la différence des mesures n_1 et n_2. Ceci nécessite que la mesure n_2 soit pondérée par la proportion b_1/b_2. Pour être comparables, il faut que ces nombres soient sur une même échelle. Le recours au traitement par *rapport* viendrait donc en second, comme un aménagement des données préalable au calcul de la *différence.* Ceci semble cohérent avec l'évocation d'une mesure standard, estimée ici en centimètres, qui permet alors de situer d_1 et d_2 sur une même échelle, puis d'examiner, sur ces reports à l'échelle, laquelle des deux distances dépasse l'autre. Il y aurait donc dans le modèle des traitements observés une préséance de l'additif sur le multiplicatif, ceci étant sans doutes dû à la question posée : *laquelle des deux distances est la plus grande ?* Ces considérations, et en particulier le contraste entre le traitement des nombres n_i et celui des longueurs b_j me fait dire que de tels traitements tiennent autant, si ce n'est même plus, aux représentations que les élèves se font des nombres et des calculs, qu'à celles qu'ils se font de la mesure elle-même.

L'idée selon laquelle ce serait au cours de changements d'échelles (de changements d'unités) que les modèles multiplicatifs vont être induits, semble être confirmée. Ceci revient à dire, en d'autres termes, que c'est bien autour des isomorphismes de mesure, et de leurs combinaisons (conversions, transformation) qu'il s'agit de faire travailler les élèves, plutôt que de considérer la mesure comme un échelle absolue de comparaison (un état). Cette remarque peut paraître évidente, mais elle n'est pas anodine. En effet, si on examine les pratiques scolaires usuelles censées introduire les jeunes élèves à la notion de mesure, c'est cette idée d'état qui est en tout premier lieu mise en évidence. (*Chaque* *chose a sa propre mesure*). Et il pourrait être tentant d'assimiler la situation que nous étudions à une telle conception statique. Il convient donc de souligner fortement que l'important n'est pas dans la détermination de la mesure mais dans la correspondance distance-mesure. *Il y a plus qu'une simple addition dans l'itération des reports d'une unité de mesure.*

Septièmes considérations : d'autres modèles sont envisageables

La fonction du modèle mathématique décrit ci-dessus était de permettre la mise sur pied d'une situation didactique, et en particulier de déterminer à quelles conditions on pouvait relativement simplement susciter un problème chez les élèves. En revanche ce modèle n'a pas la prétention de décrire, même a priori les traitements effectifs des élèves. Dans notre exemple, il aurait été plutôt étonnant que ceux-ci se soient mis à raisonner en termes de rapports de distances ! Nous avons vu que les traitements des élèves étaient mixtes : comparaison des ordres de grandeur des mesures respectives, compte tenu d'un opérateur correctionnel multiplicatif, justification du résultat par évaluation de la différence entre les distances, et/ou estimation des longueurs et distance en centimètres (i.e. en référence à une unité de mesure conventionnelle). Or ces développements induits par la situation, soit directement pour les élèves, soit au détour de leur discussion avec l'enseignante ne sont pas décrits par le modèle proposé. Un travail supplémentaire de la modélisation de la situation pourrait donc être utile pour bien apprécier la situation proposée à la lumière de ces observations effectives.

La situation propose de comparer deux distances. Intuitivement, on pourrait vouloir ramener cette question à celle de savoir laquelle dépasserait l'autre, si elles pouvaient être reportées côte à côte. Nous avons pu observer que cette représentation a guidé plusieurs élèves dans leur discussions. Le traitement requis serait alors celui de la différence des distances. Examiner un développement formel de cette idée nous permet de mieux explorer cette situation. Quittons donc un moment le plan de la représentation et "remontons du côté des modèles". Soyons conscients qu'en mettant ainsi, momentanément, entre parenthèses le modèle du mathématicien, nous allons nous priver de toute l'élaboration conceptuelle et symbolique de ce dernier.

Un modèle de traitement par différences

Le modèle de la situation donné ci-dessus traitait des rapports : h le rapport des mesures des distances, et k le rapport des baguettes unités ($h=n_2/n_1$ et $k=b_1/b_2$). Paraphrasons alors ce modèle en ne traitant plus les rapports de ces termes mais leurs différences. Voici ce que cela donne :

Comparer les distances d_1, mesurable à l'aide d'une baguette non graduée b_1, et d_2 mesurable à l'aide d'une seconde baguette non graduée, b_2.

Le mesurage conduit aux nombres n_1 et n_2 tels que : $d_1=n_1 x b_1$, $d_2=n_2 x b_2$.

$d_2-d_1=n_2 x b_2-n_1 x b_1=(n_2-n_1) x b_2-n_1 x (b_1-b_2)$

Seule est intéressante la situation où $b_2 \neq b_1$, supposons que b_1 dépasse b_2. Deux cas se présentent :

I. $n_2 \leq n_1$ ou $(n_2-n_1) \leq 0$; la conclusion est immédiate : $(d_2-d_1) \leq 0$ ou $d_2 \leq d_1$.

Dit en d'autres termes, d_2 ne pourra jamais dépasser d_1, puisque pour la constituer on prend moins de fois une baguette plus petite que pour constituer d_1.

II. $n_2 > n_1$ ou $(n_2-n_1) > 0$; la conclusion dépend de l'égalité suivante :

$d_2-d_1=(n_2-n_1)xb_2-n_1x(b_1-b_2)$.

Exemple :

$b_1 = 50$, $b_2 = 25$, et $n_1 = 8$ $n_2 = 12$. $b_1-b_2 = 25$ et $n_2-n_1 = 4$.

La conclusion : $d_2-d_1= 4x(25)-8x(25) = (-4)x(25) < 0$, d'où $d_2<d_1$.

Il est important de noter que l'exemple permet de conclure. Mais pour cela nous avons supposé connues les mesures de b_1 et de b_2, ce qui revient à les rapporter à une mesure commune. Ici le cas est très simplifié puisque non seulement b_2 peut-être considérée comme une sous-unité de b_1, mais qu'en outre c'est la moitié. Or cet exemple reprenait les paramètres de l'expérience. Ainsi donc comme nous l'avions déjà indiqué, cette situation ne nécessite pas l'application du modèle des rapports.

Abstraction faite de cet exemple, quelle signification peut-on attribuer à la dernière expression : $d_2-d_1=(n_2-n_1)xb_2-n_1x(b_1-b_2)$?

On peut dire que $(n_2-n_1)xb_2$ indique ce que l'on gagne à reporter b_2 un plus grand nombre de fois, et que $n_1x(b_1-b_2)$ indique ce que l'on gagne à reporter une unité plus grande. La comparaison de ces deux "gains" (qui se compensent) suffit à conclure.

Peut-on dire que ce second modèle est plus intuitif que le premier ?

Si l'idée de dépassement est facilement associable à une différence, le traitement des différences l'est moins. Car comme l'indique l'explicitation des formulations en terme de "ce que l'on gagne", il s'agit là aussi de relations. Les expressions $(n_2-n_1)xb_2$ et $n_1x(b_1-b_2)$ sont des comparaisons, donc aussi des "rapports". Et l'on en compare aussi deux. On notera qu'à nouveau le modèle recourt à des développements algébriques.

Les deux modèles (rapports et différences) sont-ils équivalents ?

Non bien sûr. Le premier modèle, celui des rapports permet de transférer rapidement les traitements de la situation sur le plan des nombres. D'un point de vue formel strict, ceci n'aurait pas d'incidence, mais du point de vue d'un sujet en train d'apprendre les mathématiques, la question prend un tout autre relief. En effet, *ce passage au numérique* rend disponibles toutes les propriétés *numériques connues par ailleurs,* et ce, *même si cela se fait abusivement.*

Cet allégement cognitif (car c'est bien de cela qu'il s'agit) n'est pas dispensé par le modèle alternatif des différences. En effet, l'expression finale nous donne une distance, b_2 et (b_1-b_2) restent des baguettes ou fragments de baguettes. Donc, la dernière égalité de ce second modèle ne fait que de substituer une comparaison de distances à une autre. Le calcul stipule que ces deux comparaisons sont équivalentes. Ici on comprend la commodité de l'algèbre. Il s'agit en effet de comparer maintenant deux autres distances :

$(n_2-n_1)xb_2$ et $n_1x(b_1-b_2)$, plus petites que d_1 et d_2. On se trouve donc devant une boucle dans le traitement.

D'un point de vue formel, cette boucle ne se terminera qu'à la condition que les distances et unités considérées soient commensurables. Je ne voudrais pas entrer ici sur ces considérations d'ailleurs fort connues. Je me contenterai, comme il est d'usage de le faire, de savoir que, pratiquement, cette boucle cessera lorsqu'on arrivera à un ordre de grandeur suffisamment petit pour que l'approximation s'impose (les fractions étant partout dense dans $\mathbb{R}$, cela peut suffire). Ainsi "l'abus du concret" rejoint-il ici "l'abus numérique" qui consistait, dans l'exposé du modèle des rapports, à laisser implicite le fait que les nombres considérés pouvaient très bien être des réels et pas seulement de entiers ou des rationnels. Mais on pourra dire aussi qu'il allait de soi que l'on s'en tenait à définir nos modèles sur les rationnels, et que l'on ne considérait par conséquent que les situations concrètes correspondantes.

Ceci dit, poursuivons donc notre comparaison. Le modèle des rapports demande que soient déterminés les mesures n_1 et n_2 des distances d_1 et d_2 ainsi que le rapport entre les unités b_1 et b_2. Dans l'expérience proposée on avait dispensé les élèves de devoir déterminer ce rapport. Mais dans le cas général celui-ci devra lui aussi être "mesuré". Dans l'application du second modèle nous aboutissions à une boucle, la comparaison des distances étant ramenée à une comparaison de distances plus petites, mesurée avec la différence des baguettes unités. Il s'agit en effet de comparer $(n_2-n_1)xb_2$ et $n_1x(b_1-b_2)$. Il est alors envisageable de réitérer la démarche. Dans ce cas on procède à une régression sur les unités de mesure jusqu'à ce qu'on aboutisse à une mesure commune (ce qui arrivera vu les hypothèse implicites de commensurabilité décrites ci-dessus). Au couple d'unités : (b_1 et b_2) on a maintenant substitué le couple d'unités : (b_2 et (b_1-b_2)), constitué de la plus petite des unités de départ et de la différence de ces unités. On procédera de même pour le troisième couple d'unités : prendre la plus petite des unités précédantes et leur différence. Mais que nous donne cette procédure ? Il convient alors de faire un petit détour par l'examen d'*une autre situation* (le travail des modèles permet d'explorer des situations associées à notre problème).

Une méthode de commensuration de longueurs

Traduite en une expérience de comparaison de longueurs, l'idée du traitement par différences est somme toute très simple. Vous disposez de deux baguettes d'inégales longueur. Vous en cherchez une commune mesure, c'est à dire une baguette qui entre un nombre entier de fois dans l'une comme dans l'autre. Un moyen efficace pour le faire, est le suivant. Vous superposez les baguettes. L'une dépasse l'autre et vous coupez cette partie qui dépasse. Vous disposez donc de trois baguettes dont deux sont d'égales longueur. Vous prenez les deux bouts de la baguette qui a été coupée, et vous recommencez l'opération. Vous réitérez celle-là jusqu'au moment où vos baguettes sont de même longueur. C'est la mesure commune cherchée. En imaginant ceci concrètement réalisé, on perd de vue les baguettes de départ. Il est bien sûr possible de "remonter" la suite des coupures et de les reconstituer. Mais il est aussi possible de noter au fur et à mesure que l'on opère, les "combinaisons" correspondantes. Au départ, on a b_1, et b_2, supposons $b_1>b_2$ puis b_1-b_2 ; puis $\pm(b_1-2b_2)$, etc. A nouveau, extrapolons cette expérience pour examiner plus formellement ce qu'elle donne (reprise du travail du modèle) :

1 - Ceci aboutit à un algorithme pour trouver *une unité de longueur commune à deux longueurs*. Par exemple :

Nous voulons comparez deux longueurs (x et y) qui sont comme 100 (=x) est à 37(=y) (mais nous ne le savons pas). Nous retrouvons l'expérience des reports de baguettes, décrite ci-dessus, mais avec une variante, à savoir que nous allons minimiser le reste, comme pour une division. C'est-à-dire que nous reportons autant de fois qu'il est possible la petite baguette sur la grande. Pourtant, nous restons dans une logique additive, et n'opérons pas à une partition en sous-unités. Nous trouvons alors la commune mesure par un algorithme connu. En voilà la description dite en termes de reports :

Nous pourrons reporter 2 fois y dans x et nous obtenons un reste équivalent à (x-2y).

Nous pourrons reporter 1 fois ce reste, (x-2y), dans y, et il restera maintenant (3y-x).

Nous pourrons reporter 2 fois (3y-x) dans (x-2y), et obtenons un reste de (3x-8y).

Nous pourrons reporter 2 fois (3x-8y) dans (3y-x), et obtenons un reste de (19y-7x).

Nous pourrons reporter 1 fois (19y-7x) dans (3x-8y), et obtenons un reste de (10x-27y)

Et (10x-27y) se reportera exactement 3 fois dans (19y-7x). C'est l'unité commune recherchée.

On a donc 0=(19y-8x)-3x(10x-27y)=(100y-37x). *Donc 100y=37x.*

Ce qui peut se noter plus simplement sur deux tableaux:

numériquement	coefficients des reports.
100	(1, 0)
37	(0, 1)
100 -2 x 37 = 26	(1, 0) - 2x(0, 1) = (1, -2)
37-26 = 11	(0, -1) - (1, -2) = (-1, 3)
26-2x11 = 4	(1, -2) - 2x(-1, 3) = (3, -8)
11 - 2x4 = 3	(-1, 3) - 2x(3, -8) = (-7, 19)
4 - 3 = 1	(3, -8) - (-7, 19) = *(10, -27)*

C'est délibérément que j'ai pris ici un exemple difficile. Remarquons que la méthode directe de commensuration aurait nécessité 100 reports de y et 37 reports de x pour obtenir la même longueur. Procéder comme ci-dessus, à partir des différences est plus rapide (et on peut encore améliorer la méthode).

Bien entendu, cet algorithme n'aboutira qu'à la condition que les longueurs (x et y) soient commensurables. Comme tantôt, je me contenterai de garder de ce point de vue la référence pratique (matérielle) et de considérer que la procédure aboutira tôt ou tard à un reste suffisamment petit pour pouvoir le considérer comme nul.

2 - *Cette méthode nous amène à effectuer des combinaisons linéaires des longueurs*

x et y (et ce tant concrètement qu'au travers des notations). Les combinaisons de coefficients se croisent avec les reports des longueurs et de leurs restes. Du point de vue des coefficients, l'examen de l'espace de leurs combinaisons possibles (l'espace de la situation) donne lieu à la construction d'un joli arbre, qui liste les couples d'entiers premiers entre eux. Je vous invite à en trouver la loi de formation, c'est amusant. Ainsi cette expérience toute simple et très intuitive nous amène rapidement à une arithmétique intéressante, en particulier à un algorithme pour le calcul de l'égalité de Bezout (bien connu par ceux qui se sont amusées à faire de la programmation) :

> Soient deux nombres entiers, x et y, alors il existe deux nombres entiers, a et b, tels que l'égalité ax-by= pgcd (x,y) soit vérifiée. Dans l'exemple ci-dessus, où x=100 et y=37, les nombres a et b sont aussi donnés par notre algorithme, 10x-27y=1. A partir de là on trouve une infinité de solutions à notre équation, dont une autre particulière : 73y-27x=1.

Retour à la comparaison des distances par le traitement des différences

Nous pouvons revenir alors à notre situation de *comparaison de distances* là où nous l'avions laissée et examiner ce que donne la réitération de la comparaison. Récapitulons, il s'agit d'abord de comparer d_1 et d_2 mesurées à l'aide des unités b_1 et b_2, puis de comparer $(n_2-n_1)xb_2$ et $n_1x(b_1-b_2)$, à l'aide des unités b_2 et (b_1-b_2). La méthode combine donc la comparaison des distances avec la commensuration des unités qui les mesurent. Les distances étant ramenées aux unités par combinaisons linéaires, nous trouvons donc une symétrie entre les combinaisons des unités : b_1; b_2; (b_1-b_2); etc, et les combinaisons des mesures des distances comparées : n_1; n_2; (n_2-n_1); etc... Ainsi comme on avait : b_1 et b_2, supposons $b_1>b_2$, puis (b_1-b_2), puis $\pm(b_1-2b_2)$, etc., on aura comme coefficients : n_1, et n_2, puis (n_1-n_2) portant en première étape sur l'unité b_2, et, à l'étape suivante, sur $(2b_2-b_1)$, tandis que $(2n_1-n_2)$ portera sur (b_1-b_2) puis sur $(2b_1-3b_2)$, ou encore $(3n_1-2n_2)$ portera sur $(2b_2-b_1)$ etc... Les combinaisons de coefficients se croisent avec les combinaisons des unités (il y a permutation des indices entre les b_i et les n_j). (La notation matricielle est plus commode pour mettre ceci en évidence) Prenons un exemple :

Supposons qu'au lieu de la relation $b_1=2xb_2$ de tout-à-l'heure, nous ayons eu une fraction moins évidente : par exemple $b_1=17/11xb_2$ et choisissons $n_1=23$ $n_2=35$, le premier modèle demandera à comparer les rapports 17/11 et 35/23, tandis que le second modèle passera par les comparaisons suivantes :

- Rappelons que dans les conditions de notre situation, nous ne pouvons pas comparer directement d_1 et d_2, mais que nous pouvons comparer b_1 et b_2, or l'algorithme ci-dessus nous apprend que la mesure commune, u, que nous trouverons sera la différence : $(2b_1-3b_2)$, et qu'elle entre 5 fois dans $(2b_2-b_1)$.

Posons : $(2b_1-3b_2) = u$, il vient : $(2b_2-b_1) = 5u$

- Les considérations ci-dessus nous disent que le coefficient de l'unité u est ($2n_1$-n_2) soit (46-35) = 11; tandis que celui de 5u est ($3n_1$-$2n_2$) soit (69-70) c'est-à-dire -1, et on a :

d_1-d_2 = 11u - 1x(5u) = 6u. Donc d_1-d_2>0, et d_1>d_2.

[Le détail du calcul donne : d_1=$23b_1$ et d_2= $35b_2$

d_1-d_2 = $23b_1$ - $35b_2$ = $23b_1$ - ($23b_2$ + $12b_2$)

d_1-d_2 = 23(b_1-b_2) -$12b_2$ = [11(b_1-b_2) + 12(b_1-b_2)] - $12b_2$; etc....

Finalement : d_1-d_2 = 11($2b_1$-$3b_2$) - ($2b_2$-b_1). Nous avons atteint notre unité commune qui entre 5 fois dans ($2b_2$-b_1), ici se situe une évaluation de nos combinaisons de coefficients par nos combinaisons d'unités, nous pouvons poursuivre notre calcul de d_1-d_2 :

d_1-d_2 = 11($2b_1$-$3b_2$) - 5($2b_1$-$3b_2$) = 6($2b_2$-$3b_1$). Donc d_1-d_2>0, et d_1>d_2.]

Notons que la permutation des indices entre les b_i et les n_j a son correspondant dans le modèle des rapports, puisqu'on y compare le rapport des unités ($k=b_1/b_2$) avec celui des coefficients ($h=n_2/n_1$). Action croisée des combinaisons de coefficients,... voilà ce dont mon savoir relatif aux produits croisés dans la comparaison de rapports m'avait dispensé de connaître... jusqu'à ce que j'en vienne à examiner cette situation de recherche.

Combinaison possible des deux types de traitements (rapports, différences)

Toute l'analyse ci-dessus vise à mieux comprendre la situation effective de notre expérience. Il s'agissait de comparer deux distances d_1 et d_2. Bien que cela ne réponde à aucune restriction mathématique, la situation expérimentale proposée se restreignait à considérer des mesures entières pour les distances et à un rapport très simplifié entre les unités de mesure (1/2). Par contre la situation demandait un mesurage effectif des distances données, et c'est *dans ce cadre représentationnel* que la question de la comparaison des unités allait se poser. Le mesurage se faisant par reports, nous avons imaginé un modèle de traitement basé là-dessus, ou plutôt contrôlé par l'idée de dépassement (alors que le modèle de rapports est contrôlé par l'idée de mesure comme rapport entre deux longueurs ou entre une distance et une longueur unité). Ceci nous a amené à une autre situation, celle de la commensuration des unités de mesure. Remarquons alors que ce n'est que pour les besoins de l'analyse que nous avons dissocié la méthode de commensuration et le traitement par différence, mais que nous avons montré comment en pratique les deux opérations se faisaient d'un seul et même mouvement.

Cette commensuration était-elle évitable par le modèle des rapports ?

Oui, mais à une condition, c'est que soit réglée la question de la détermination du rapport entre les baguettes unités. Dans l'expérience relatée, ceci a bel et bien été réalisé : on s'est contenté pour unité de prendre une baguette et "sa moitié". Sinon, si le rapport est plus complexe, un autre multiple, ou mieux encore un rapport autre que 1/n, alors il sera nécessaire de déterminer une unité commune, par une méthode de commensuration (celle décrite ou une autre).

Ces considérations montrent que si le modèle par rapports suffisait à caractériser les conditions requises pour poser un problème de mesure aux élèves, il ne suffit pas pour autant à décrire la situation effectivement proposée aux élèves.

[Note : Pour un autre exemple de cette méthode d'analyse des modèles, et en liaison avec les articles de Chevallard sur l'algèbre publiés par Petit x, cf. Conne F., Guiet J.1989.]

Huitièmes considérations : caractérisation de la situation des distances

Il y a deux plans de traitements : celui des distances et des longueurs, d'une part, celui des données numériques que les mesurages et reports ont permis d'extraire, d'autre part. Sur chacun de ces plans, des problèmes peuvent surgir. En revanche, le passage à des traitements numériques purs peut grandement simplifier le problème et surseoir à de lourdes manipulations. Le point sensible est donc bien ce *passage au numérique*. Par les paramètres choisis, les expérimentateurs ont cherché à le favoriser au maximum. Cependant ce passage peut s'effectuer selon diverses modalités non équivalentes: mesurage, approximation ou estimation des mesures des distances, d'une baguette par l'autre, du rapport entre les unités, recours à une mesure conventionnelle, recours à une table des combinaisons linéaires des coefficients, etc.. Les discussions entre différents modèles ont permis d'entrevoir la façon dont tous ces aspects sont liées dans cette expérience. Revenons alors à ce que nous avons observé.

1 - Nous trouvons effectivement trace de tous ces liens dans les traitements des élèves

Ainsi les élèves ont spontanément fait référence à la différence des distances, ils ont même essayé de l'évaluer au travers d'une estimation en centimètres (ce qui leur permettait de fixer les relations de leur raisonnements). La question de l'unité commune et des différences était donc bel et bien présente, même si on peut penser que cela est resté superficiel. C'est d'ailleurs aussi superficiellement, et par le biais d'un correctif proportionnel des mesures obtenues afin de les rendre comparables que la question des rapports des unités aura été abordée. Pour rendre compte des traitements effectifs des élèves il faudrait sans doutes recourir à un modèle mixte, additif et multiplicatif, défini sur des nombres entiers.

2 - Dans cette situation, les raisonnements tenus auront permis différents passages d'un plan (celui des distances et des longueurs) à un autre

Pour en revenir aux termes de notre discussion (quatrièmes considérations), on pourrait dire que ces raisonnements se réfèrent à la situation proposée (en termes de distances de longueurs et d'unités de mesure) *et se fixent (réalisent) sur les données* *numériques*. C'est sans doutes ce qui permet aux élèves d'exploiter des ressources numériques (nombres entiers) nettement insuffisantes pour décrire et modéliser la situation (ne permettant pas traiter correctement de ces notions).

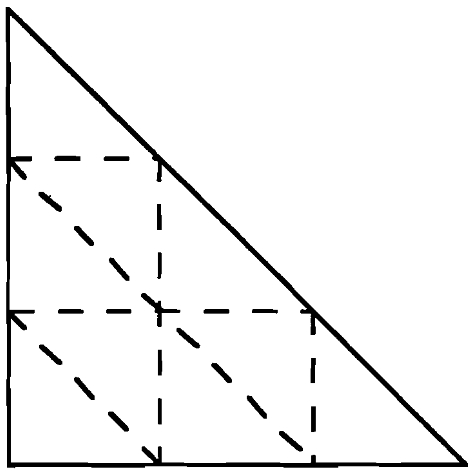
Au delà de son indéniable efficacité, cette forme de numérisation est bien connue et se constitue en véritable obstacle (didactique ou du moins didactiquement renforcé), en ce sens qu'il écrase la richesse des situations de mesurage effectifs. Pourtant l'analyse tend à montrer que les traitements numériques sont moins homogènes qu'en apparence. Ainsi nous avons remarqué que des entités n'ayant pas la même fonction (comme c'est le cas pour les distances à mesurer et les unités qui les mesurent) semblaient recevoir des traitements différents. Par exemple, il se pourrait que, devant comparer leurs baguettes unités, les élèves recourent plus facilement à une mesure de l'une par l'autre, qu'à la considération de leur différence comme une nouvelle unité. Ceci serait envisageable pour autant que les élèves cherchent à effectuer une conversion de mesure telle que nous l'avons décrite dans le raisonnement analysé plus haut (b_1/b_2 comme opérateur de transformation de mesure).

Ces "calibrages" des traitements numériques locaux au problème posé montrent que l'obstacle d'une numérisation excessive réside au niveau de la représentation : à notre sens, l'élément clé réside dans l'ajustement de deux pans de la représentation, celui qui a trait à la situation, d'une part, celui qui a trait aux mathématiques qu'il engage dans la résolution de son problème, d'autre part. Ceci vaut aussi pour nous-mêmes, car nous n'avons pas procédé différemment puisqu'il a fallu un détour formel, nous permettant de nous déprendre de certaines représentations induites par le modèle des rapports pour identifier les questions relatives à la comparaison des unités. Certes nous aurions pu le prévoir en portant notre réflexion sur les notions mathématiques engagées dans l'expérience : ici une théorie de la mesure. Nous trouvons confirmation de quelque chose de connu : ce n'est pas tant la mathématisation d'une expérience empirique de mesurage qui pose problème mais bien celle de la notion même de mesure.

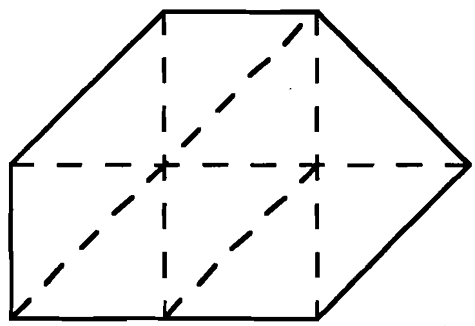
Neuvièmes considérations : un traitement par commensuration effectivement observé lors d'une autre recherche

Il est souhaitable de mieux comprendre par ailleurs comment se combinent des modèles de traitement additifs et multiplicatifs. Pour conclure, je voudrais rappeler une observation faite il y très longtemps au cours d'un travail de recherche menée par l'équipe des méthodologues du SRP, sous la direction de L. Pauli, et à laquelle j'avais collaboré aussi. Cette observation illustre un cas où le modèle par différence fonctionne à propos d'une situation de comparaison d'aires.

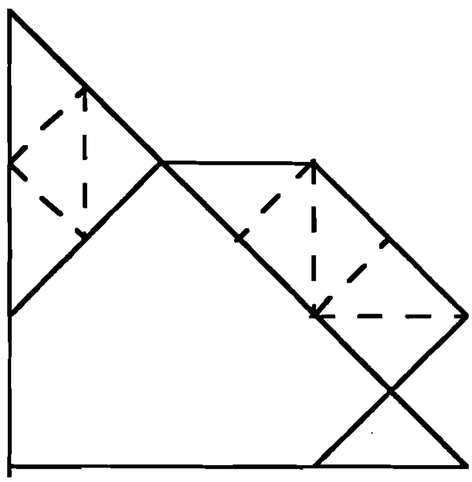
Les chercheurs avaient demandé à des élèves de 1ère et de 2ème primaire de comparer des surfaces planes. Les élèves procédaient spontanément par superposition des surfaces, par découpage de tous les bouts qui dépassent, puis par comparaison de ces restes, c'est-à-dire selon une procédure typique de *différence*. Or il arriva qu'une équipe d'élèves a pu trouver ainsi, lors de la superposition des parties restantes d'un premier découpage (soit des parties qui dépassaient), une *unité commune de mesure* entre ces deux surfaces. Les surfaces proposées par les chercheurs s'y prêtaient car elles avaient été construites selon deux arrangements distincts de 9 demi-carrés (petits triangles rectangles isocèles).



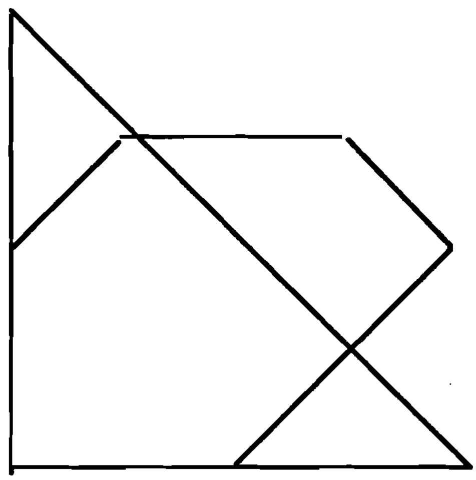
forme 1 avec découpage



forme 2 avec découpage



première superposition
qui aboutit à déterminer
une unité commune (1/18 des formes)



seconde superposition
qui n'aboutit pas à cause
de l'incommensurabilité
de la diagonale.

Remarquons que dans ce cas, le fait que les deux figures aient la même aire, a joué un rôle essentiel dans la mise en évidence d'une unité de mesure commune. Supposons que les deux figures aient été choisies de telle manières que la différence de leur aires soit de 1 unité (un triangle unité) et que ce triangle ait pu être mis en évidence par un jeu de reports des figures l'une sur l'autre, comme ci-dessus. La conclusion de la comparaison aurait été si évidente qu'il y aurait eu peu de chances pour que les élèves songent à reporter le morceau trouvé sur chacune des figures.

Ce qui m'avait frappé, c'est que *contrairement à la situation classique de mesurage à partir d'une unité donnée d'avance, où la mesure résulte de l'itération du report de l'unité, ici c'était une autre itération, celle de la comparaison par superposition des bouts qui dépassent* (et leur découpage), *qui avait amené à la détermination de l'unité commune, et par là à la mesure* (selon une reconstitution du problème à partir de cette détermination). Nous retrouvons donc ce que nous avons déjà analysé et observé, c'est-à-dire la détermination d'une unité de mesure commune, à partir d'une décomposition par *différence.*

Il est possible que nous tenions là une clé d'intégration des deux modèles de mesurage.

Etoy, le 3 décembre 1992, F. Conne

Bibliographie

A.P.M.E.P. (1982). *Grandeur, mesure.* Brochure n° 46. Paris.

ANDRÈS M., BOGET A., GOERG M., GUILLET N. (1975). *A propos de la mesure d'aire.* Mémoire F.P.S.E., pp 58-67 et 128-130, publié aussi dans le cahier n° 14 du Service de la Recherche pédagogique à Genève.

BESSOT A. (1991). La théorie didactique, un outil pour la construction et l'analyse de situations. In , R. Gras, IREM Rennes, et IRESTE Nantes (ed), *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques.* (p. 19-23).

BRUN J., CONNE F. (1988). Transcriptions et comptes rendus d'observations. Actes de l'université d'été : Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire. Orléans, 1988, p. 252-272.

BRUN J., CONNE F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et Recherche*, n°3. pp. 261-186, Editions universitaires Fribourg.

CHEVALLARD Y (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, «petit x» n° 19.

CONNE F., GUILLET J. (1989). Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques. In , R. Gras, IREM Rennes, et IRESTE Nantes (ed), *Actes de la Vème école d'été de didactique des mathématiques.* (p. 51-57). Repris dans CHEVALLARD Y, CONNE F., GUILLET J (1989), Jalons à propos d'algèbre. in cahiers Interactions didactique, n° 3, 2è éd augmentée, FPSE Université de Genève, et Séminaire de

Psychologie, Université de Neuchâtel.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1982). Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *Recherches en Didactique des mathématiques*, n° 3.1, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROUCHE N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

REUCHLIN M. (1973). Formalisation et Réalisation dans la pensée naturelle : Une Hypothèse. *Journal de Psychologie normale et pathologique*, 70, 4, 389-408.