COURRIER DES LECTEURS :

EXEMPLES DE COMPORTEMENTS D'ELEVES D'ECOLE PRIMAIRE LORS DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Nous avons reçu de Madame Claudine GAUTIER, professeur de mathématiques à l'Ecole Normale de Melun un document intéressant que nous publions ici.

INTRODUCTION

Pour qui étudie les divers aspects de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, deux voies d'approche, complémentaires l'une de l'autre, sont possibles :

– La première (probablement la plus ancienne, donc la plus connue) suit dans ses grandes lignes la progression suivante : une notion mathématique étant choisie, par exemple la division, il s'agit de déterminer les meilleures "méthodes", les meilleures situations-problèmes permettant de faire acquérir cette notion aux élèves.

– Pour la seconde, la démarche d'étude est différente. Les élèves ont reçu un enseignement en mathématiques, il faut en étudier les effets, en particulier en mettant en évidence les modèles (erronés ou non) qu'ils ont construits et utilisés pour assimiler ces connaissances.

Cette démarche est nécessairement liée à la précédente, mais elle se déroule différemment. Dans le premier cas, le travail "évolue des mathématiques vers les élèves". On part d'une notion mathématique, la division par exemple, pour essayer de faire acquérir le mieux possible cette notion aux élèves. Par contre, dans le second cas, le point de départ du travail est du côté des élèves : il faut isoler un comportement imprévu d'élèves et ensuite seulement essayer de l'expliquer à l'aide des modèles mathématiques dont nous disposons.

C'est cette dernière démarche que j'ai choisie, mon travail en collège m'ayant permis de nombreuses observations. Par exemple, au moment de l'introduction (en classe de 6ème) de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction. Celle-ci se fait le plus souvent en présentant aux élèves un problème pouvant se résoudre de deux façons. Et à cette occasion, j'ai été surprise de constater que les deux méthodes de résolution n'étaient pas également présentes (ou disponibles) à l'esprit des élèves. De là, il m'a paru intéressant d'étudier ce qui pouvait motiver chez eux cette préférence (ou ce choix ?) pour l'une ou l'autre des méthodes.

Pour mener cette étude, j'ai donné à chercher à des élèves d'école primaire différents problèmes pouvant se résoudre de deux façons (au moins) en avançant dans chaque cas une ou plusieurs hypothèses.

PREMIERE PARTIE : Problèmes dont la résolution nécessite l'emploi de la multiplication et de l'addition.

PREMIERE HYPOTHESE

Les élèvés peuvent être influencés par l'ordre d'apparition des nombres dans le texte. Plus précisément, cet ordre doit avoir une incidence sur le choix de la méthode utilisée.

Pour étudier la validité de cette hypothèse, j'ai donné le problème suivant à résoudre à des élèves de plusieurs classes de CE2 (en fin d'année scolaire) et de CM1 (en début d'année scolaire) :

Problème 1

Un restaurateur a fixé à 45 F le prix d'un repas.
Un jour, il a servi 35 repas le midi et 27 repas le soir.
Quelle somme a-t-il encaissée ?
(version 1)

Et pour faire varier l'ordre d'apparition des nombres dans le texte, une seconde version a été constituée :

Un jour, un restaurateur a servi 35 repas le midi et 27 repas le soir.
Il a fixé à 45 F le prix d'un repas.
Quelle somme a-t-il encaissée ?
(version 2)

Résultats et analyse des résultats

La classification des réponses des élèves a été effectuée selon la méthode de résolution utilisée :

– Soit du type : 35 x 45 = 1575 puis 27 x 45 = 1215 et 1575 + 1215 = 2790. (désignée dans le tableau sous l'expression : Méthode 1).

– Soit du type : 35 + 27 = 62 puis 62 x 45 = 2790. (Méthode 2)

Ces deux catégories ont été complétées par une troisième, constituée par les élèves n'ayant pas terminé la résolution du problème ou ayant utilisé un raisonnement faux (Autres rép.).

Les résultats sont les suivants :

Problème 1	Méthode 1		Méthode 2		Autres rép.	
Version 1	56	(52%)	26	(24%)	26	(24%)
Version 2	72	(62%)	28	(24%)	16	(14%)
TOTAL	128	(57%)	54	(24%)	42	(19%)

Ces résultats ne confirment pas l'hypothèse émise. Mais ils permettent de constater que les élèves ont nettement tendance à porter leur choix sur la première méthode de résolution plutôt que sur la seconde (ce qui explique a posteriori les difficultés que j'avais remarquées chez mes élèves de 6ème au moment de l'introduction de la distributivité de la multiplication sur l'addition).

DEUXIEME HYPOTHESE

Pour le problème cité précédemment, quelle que soit la méthode de résolution choisie (parmi les deux considérées), un schéma commun de résolution est sous-tendu par l'utilisation implicite de la multiplication externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times P & \longrightarrow & P \\ (n\,,\,p) & \longrightarrow & n \times p \end{array}$$

où n est le nombre de repas et p le prix d'un repas.

La première méthode de résolution utilise l'addition dans P, la seconde l'addition dans $\mathbb{N}$. D'où l'idée d'introduire une autre catégorie de problèmes, où, pour cette dernière méthode de résolution, l'addition serait définie sur P et non sur $\mathbb{N}$. Avec l'hypothèse que cette variation allait introduire une modification dans le choix des élèves. Voici le texte du problème :

Problème 2

Un club sportif décide d'acheter un tee-shirt et un short pour chacun de ses 25 joueurs.
Un tee-shirt coûte 45 F et un short vaut 37 F.
Quel est le montant de la dépense ?

Résultats et analyse des résultats

La répartition des élèves a été faite selon des critères semblables à ceux choisis pour le premier problème, à savoir :

– Ceux qui utilisent le premier type de résolution : (Méthode 1)
45 x 25 = 1125, puis 37 x 25 = 925 et 1125 +925 = 2050

– Ceux qui utilisent le second type de résolution : (Méthode 2)
45 +37 = 82 puis 82 x 25 = 2050

– Ceux qui ont une méthode de résolution fausse ou qui n'ont pas entièrement résolu le problème (Autres réponses).

Les résultats obtenus sont les suivants :

Problème 2	Méthode 1	Méthode 2	Autres rép.
TOTAL	87 (56%)	40 (26%)	27 (18%)

Pour ce problème aussi, les élèves ont tendance à porter leur choix sur la première méthode plutôt que sur la seconde. Cette dernière hypothèse mérite donc d'être modifiée.

Mais avant de proposer une nouvelle hypothèse, j'aimerais apporter quelques informations sur les raisons de ces façons de faire. Pour avoir ces renseignements, nous avons questionné les élèves d'une classe de CM1 (*). Tous n'ont pas participé, mais il y a eu suffisamment de réponses pour qu'on ait pu voir deux tendances (complémentaires l'une de l'autre) se dessiner :

– La seconde méthode est "plus courte", "plus facile", "plus pratique" parce qu' "il y a moins d'opérations à faire". Mais, "elle est pour ceux qui ont bien compris".

– Par contre, la première méthode "va mieux avec le texte" (contexte mathématique ou situation concrète ?). Elle procède par "étapes" : "les tee-shirts d'un côté, les shorts de l'autre". "Elle est pour ceux qui n'ont pas très bien compris". Ceux qui ont choisi cette méthode l'ont fait parce qu'ils ne pensaient pas possible de "mettre les 2 prix ensemble". "Je ne savais pas qu'on avait le droit de mélanger les prix. (2 fois)

Ces quelques réponses tendraient à prouver que si les élèves ne choisissent pas la seconde méthode de résolution, ce n'est pas parce qu'ils préfèrent la première (ce qui, somme toute, ne serait pas inquiétant), mais plutôt parce qu'ils considèrent cette seconde méthode comme illégitime (ou fausse). Pourquoi cela ? L'hypothèse qu'on peut avancer à ce niveau est la suivante : pour nous, dans les expressions 45 F et 37 F, la grandeur introduite (le prix) est la même. Si les élèves ne perçoivent pas cette similitude, c'est que pour eux elle n'existe pas. Mais que "voient-ils" dans ce cas ? Probablement deux grandeurs différentes : le prix par tee-shirt et le prix par short qu'il n'est naturellement pas possible d'ajouter (ils savent très bien qu'on n'ajoute pas les choux et les navets). Et ce n'est qu'une fois les deux multiplications effectuées, qu'on a, d'une part la même grandeur (le prix), d'autre part une grandeur "simple" (qui n'est pas le quotient de deux grandeurs).

Cette dernière interprétation peut aussi être retenue pour le premier problème. Les élèves "voient" la grandeur quotient : le prix par repas. Cette grandeur étant d'un maniement relativement délicat, ils se "dépêchent" de la remplacer par une grandeur simple (le prix) en multipliant le prix d'un repas par le nombre de repas.

Cette hypothèse a besoin d'être confirmée par d'autres exemples. J'ai commencé à le faire avec des problèmes dont la résolution utilise la multiplication et la soustraction.

SECONDE PARTIE : Problèmes dont la résolution nécessite l'emploi de la soustraction.

J'ai essayé de choisir le troisième problème de façon à ne pas influencer les élèves pour l'une ou l'autre des méthodes. Par contre, pour le problème n° 4, la soustraction utilisée dans la seconde méthode s'effectuant mentalement, j'ai pensé que les élèves pourraient dans ce cas "préférer" celle-ci. Les textes des problèmes sont les suivants :

(*) Je travaille cette année en CM1 avec Madame Annie GAUTIER conseillère pédagogique à l'une des écoles annexes de l'E.N. de MELUN.

Problème 3

Par avion, le billet aller et retour Paris-Lyon coûte 680 F.
Par chemin de fer, le billet aller et retour vaut 410 F.
Une personne doit faire 2 voyages aller et retour et elle décide de n'utiliser qu'un seul moyen de transport.
Quelle économie réalisera-t-elle si elle voyage en chemin de fer ?

Problème 4

Une classe commande 15 livres de mathématiques.
Un livre coûte 54 F mais sur chaque livre, le libraire fait une remise de 3 F.
Quel est le montant de la commande ?

Résultats et analyse des résultats

Problème 3 (moyens de transports)

Les critères sont identiques à ceux utilisés pour les autres problèmes :

– Méthode 1 : 680 x 2 = 1360 puis 410 x 2 = 820 et 1360 – 820 = 540

– Méthode 2 : 680 – 410 = 270 et 270 x 2 = 540

– Autres réponses : méthode de résolution fausse ou incomplète.

Voici les résultats :

Problème 3	Méthode 1		Méthode 2		Autres rép.	
TOTAL	64	(45%)	4	(3%)	74	(52%)

Problème 4 (livres de mathématiques)

La répartition des réponses est la même que précédemment :

– Méthode 1 : 54 x 15 = 810 puis 15 x 3 = 45 et 810 – 45 = 765

– Méthode 2 : 54 – 3 = 51 puis 51 x 15 = 765

– Autres réponses : méthode de résolution fausse ou incomplète.

Les résultats sont les suivants :

Problème 4	Méthode 1		Méthode 2		Autres rép.	
TOTAL	26	(29%)	39	(44%)	24	(27%)

Les résultats obtenus à ces deux problèmes, plus contrastés que ce qu'on pouvait prévoir, semblent ne pas infirmer la troisième hypothèse.

Mais pourquoi choisissent-ils pratiquement tous la première méthode au troisième problème ? A mon avis pour des raisons analogues à celles données pour les deux premiers problèmes. De plus, l'utilisation de nombres de 3 chiffres y est aussi sûrement pour quelque chose ainsi que l'emploi nécessaire de la soustraction. Celle-ci étant de maniement plus délicat que l'addition, il est naturel que les élèves se "raccrochent" à ce qu'ils comprennent le mieux.

Les résultats au quatrième problème n'infirment pas non plus l'hypothèse émise, car, si c'est bien la seconde méthode qui a majoritairement été choisie, les nombres du texte les y incitaient et l'écart entre les résultats obtenus pour chaque méthode est beaucoup moins important que pour les problèmes précédents. Par ailleurs, 8 élèves ont donné la résolution fausse suivante :

$54 \times 15 = 810 \quad 810 - 3 = 807$,

et ce type de résolution s'apparente plus à la première méthode qu'à la seconde. Ce qu'on peut aussi souligner, c'est que les termes de la différence ont ici des unités "rigoureusement" identiques (F par livre de mathématiques), ce qui aurait tendance à faciliter chez les élèves l'emploi de cette seconde méthode.

J'ai terminé ce travail en étudiant ce qui se passe lorsque les opérations à utiliser sont la division et l'addition.

TROISIEME PARTIE : Problèmes dont la résolution nécessite l'emploi de la division et de l'addition

Problèmes dont la résolution nécessite l'emploi de la division et de l'addition.

Il faut bien voir que dans ce cas, chaque méthode s'inscrit dans un contexte différent (problème des restes). Mais, à mon avis, pour les problèmes choisis, ni le texte ni le contexte ne permettent de privilégier l'une des méthodes.

Le cinquième problème a été donné en fin de CM2, le sixième en fin de CM1.

Problème 5

Une usine fabrique des blocs de ciment qui sont livrés par camions.
Un camion peut transporter 275 blocs par voyage.
Un jour, 3173 blocs sont fabriqués le matin, 3725 blocs l'après-midi.
Quel est le nombre de camions nécessaires au transport de ces blocs ?

Problème 6

Dans un champ, un cultivateur récolte 493 kg de pommes de terre.
Dans un autre champ, il en récolte 372 kg.
Il met sa récolte en sacs de 25 kg.
Quel est le nombre de sacs utilisés par ce cultivateur ?

Résultats et analyse des résultats

Problème 5 (suite)

Comme précédemment, la répartition des réponses est la suivante :

– Méthode 1 : 3173 : 275 = 11 r 148 puis 3725 : 275 = 13 r 150
et 11 + 13 = 24 ou 11 + 13 + 1 = 25 ou 11 + 13 + 2 = 26

– Méthode 2 : 3173 + 3725 = 6898 puis 6898 : 275 = 25 r 23

– Autres réponses : méthode de résolution fausse ou incomplète.

Voici les résultats :

Problème 5	Méthode 1	Méthode 2	Autres rép.
TOTAL	13 (10%)	91 (71%)	24 (19%)

Problème 6 (cultivateur)

Comme pour le problème 5, on a :

– Méthode 1 : 493 : 25 = 19 r 18 puis 372 : 25 = 14 r 22
et 19 + 14 = 33 ou 19 + 14 + 1 = 34 ou 19 + 14 + 2 = 35

– Méthode 2 : 493 + 372 = 865 puis 865 : 25 = 34 r 15

– Autres réponses : méthode de résolution fausse ou incomplète.

Problème 6	Méthode 1	Méthode 2	Autres rép.
TOTAL	2 (3%)	57 (84%)	9 (13%)

Comme pour le quatrième problème, les élèves changent majoritairement le choix de leur méthode. Les causes sont-elles analogues à celles énoncées précédemment ? On peut en effet penser que, cette méthode étant techniquement plus simple que l'autre (une division à effectuer au lieu de deux), il est normal que les élèves la choisissent plus facilement. Mais ce même raisonnement peut être fait à propos des 3 premiers problèmes, là où précisément beaucoup d'élèves emploient la première méthode. Par contre, les termes de la somme ayant rigoureusement la même unité, il est possible pour ceux-ci de commencer par l'addition (comme pour le problème 4).

CONCLUSION

Ce qui m'a le plus frappée au cours de ce travail, c'est que le comportement des élèves lors de la résolution est relativement indépendant du texte du problème, mais qu'il respecte, autant que faire se peut, des démarches et des procédures de résolution ayant leur logique et propres à beaucoup d'élèves (et il est possible de penser que des pratiques analogues se retrouvent dans d'autres situations).

On peut aussi remarque que leur attitude est beaucoup plus rigoureuse qu'on aurait tendance à le penser. Mais cette attitude peut leur être néfaste. En effet, si dans des problèmes simples comme ceux présentés précédemment, ils peuvent employer la méthode qu'ils désirent, dans d'autres cas cela leur sera beaucoup plus difficile. Et un élève qui ne veut pas commencer par effectuer certaines additions peut être rebuté par la tâche qu'il s'est imposée. C'est ce qui s'est produit dans la classe où je travaille pour le problème suivant :

> Chaque jour, le restaurant d'un lycée sert :
>
> 78 repas le midi ;
> 56 repas le soir.
>
> Pour chaque repas :
>
> l'entrée revient à 3 F,
> le plat principal à 11 F,
> le dessert à 4 F.

Certains élèves ont commencé à effectuer les six produits nécessaires pour résoudre le problème en utilisant l'une des méthodes possibles, aucun n'a terminé.

J'ai présenté ici un comportement particulier d'élèves. Il en existe d'autres. Je pense que, dans l'intérêt des élèves, il convient de repérer et d'analyser ces différentes "pratiques", car c'est en les rassemblant qu'on arrivera à comprendre un peu mieux l'ensemble de leurs "façons de faire". Et peut-être arrivera-t-on à les organiser en réseaux ? Cela devrait permettre d'améliorer et de développer leur capacité à résoudre des problèmes.