TRIANGLES ISOCÈLES ET CERCLES AU COLLÈGE

BERTÉ Annie et WOILLEZ Dominique
I.R.E.M de Bordeaux

Il existe deux stratégies immédiates pour construire un triangle ABC isocèle tel que AB = AC, sans contrainte de quelque ordre que ce soit :

Stratégie 1- Je peux me donner le sommet A, tracer un cercle de centre A et de rayon arbitraire, choisir deux points B et C sur ce cercle.

Stratégie 2- Je peux me donner le segment [BC], et placer A à l'intersection de deux cercles de centres respectifs B et C et de même rayon arbitraire.

Les deux méthodes doivent vivre au collège car elles sont fonctionnelles l'une et l'autre, autant pour les constructions que pour les problèmes.

I. Un questionnaire pour des élèves de 6°

I.1. Un questionnaire

A première vue la première stratégie est plus facile et rapide que la seconde, toujours en l'absence de toute contrainte sur le triangle. Or nous avons remarqué dans nos classes qu'elle était la moins connue des élèves, bien que le triangle isocèle et le cercle soient enseignés depuis l'école primaire et revus en 6°. Pour nous en assurer nous avons fait passer un questionnaire à 113 élèves de 6° de quatre collèges différents en Gironde en février 94, donc six mois après la rentrée.

Huit constructions étaient demandées et les consignes préliminaires données aux élèves étaient les suivantes :

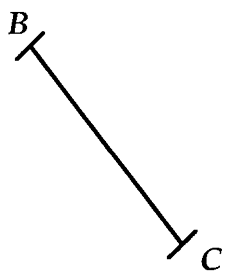
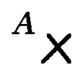
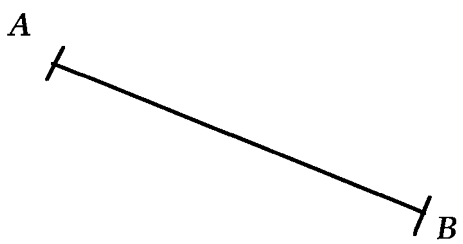
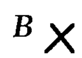
> Il faut pour chaque question construire un triangle ABC, isocèle avec AB = AC (dessin au tableau et rappel de ce que l'on appelle un triangle isocèle). Tu peux utiliser un compas, mais les segments seront tracés à main levée.

«petit x» n° 38 pp. 31 à 39, 1994-1995

Cette dernière contrainte a dû être introduite car, dans une précédente expérience, beaucoup d'élèves utilisaient la règle en la faisant pivoter comme un compas et nous n'avions de ce fait aucune trace des constructions effectuées.

I.2. Première partie du questionnaire

Le texte en italique ne figurait pas dans le questionnaire donné aux élèves.

1- On donne le côté [BC]:  *Question caractéristique de la stratégie 2* *Le rayon commun est arbitraire.*	2- On donne le sommet A :  *Question caractéristique de la stratégie 1* *Le rayon est arbitraire.*
3- On donne le côté [AB] :  *Question caractéristique de la stratégie 1* *Le rayon est imposé par la longueur du segment [AB]*	4- On donne le sommet B :  *Les deux stratégies sont utilisables*

Question 1

Près de 94% des élèves utilisent la stratégie 2.

Le seul élève ayant utilisé la stratégie 1 a tracé un cercle de centre B passant par C, a pris un point A sur ce cercle, et obtient un triangle isocèle de base [AC] ; pourtant, la suite du questionnaire ne montre pas qu'il n'ait pas compris la consigne.

Les 6 élèves, soit 5% des effectifs, qui ne font rien à cette question, continuent néanmoins le questionnaire.

Question 2

Bien que cette question soit caractéristique de la stratégie 1, 42% des élèves interrogés ne l'utilisent pas, soit qu'ils ne répondent pas (10%), soit qu'ils utilisent la stratégie 2 (pour 32 % d'entre eux) en construisant la base [BC] par tâtonnement ou à vue.

Procédures erronées le plus souvent utilisées

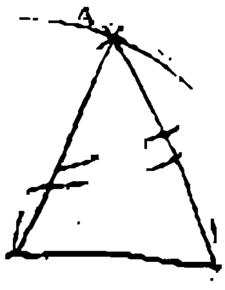
• La base [BC] est fixée arbitrairement à vue, mais le tâtonnement est masqué par le tracé d'arcs de cercles :

1- Tracé d'un arc de cercle (rayon et centre non marqué arbitraires)

2- Tracé d'un deuxième arc de cercle de centre non marqué appartenant à l'arc précédent et de même rayon

3- Ces deux arcs vont matérialiser la base [BC] et sont positionnés de telle sorte que le triangle ABC semble à l'oeil isocèle

4- Stratégie 2 à partir de la base précédente



Les deux arcs ne sont pas ici des représentations du cercle géométrique, mais des tracés qui délimitent et segmentent l'espace de la feuille. Tout se passe comme si l'élève ne s'autorise pas à choisir un point "à la main", que le tracé au compas légitime ce choix.

• ou bien :

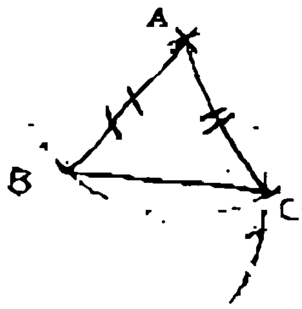
1- Tracé d'un petit arc de cercle de centre A et de rayon arbitraire r

2- Tracé d'un arc de cercle de même rayon r et dont le centre, éventuellement non marqué, appartient à l'arc précédent

3- Tracé d'un arc de cercle de centre A, de rayon r, coupant l'arc précédent. L'intersection obtenue est B

4- Tracé d'un arc de cercle de centre B et de rayon r qui coupe le premier arc en C

5- Souvent on termine avec deux petits arcs de centre B et C et de rayon r se coupant en A point pourtant déjà marqué au départ

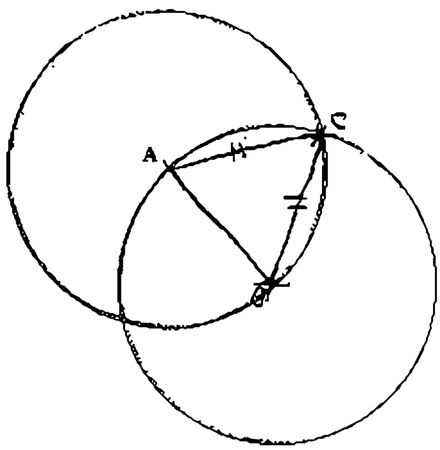


N.B. : le triangle obtenu est alors équilatéral.

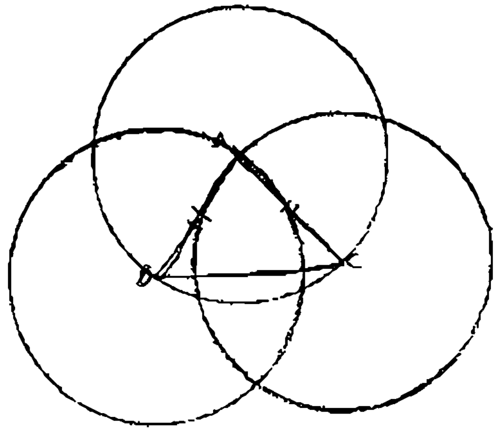
Nous rattachons cette procédure à la stratégie 2. En effet, nous possédons des dessins d'élèves où apparaissent les cercles [1] :

---

[1] Remarquons, et cela est valable pour l'ensemble du questionnaire, *qu'aucun* élève, ne trace de sa propre initiative, un cercle complet ou presque complet. Les seuls tracés complets l'ont été dans des entretiens que nous avons eu avec des élèves ou à la demande formulée d'un des professeurs. Cela semble être une pratique courante dans les classes, depuis l'école élémentaire, de ne tracer que la partie "utile" du cercle. La



1

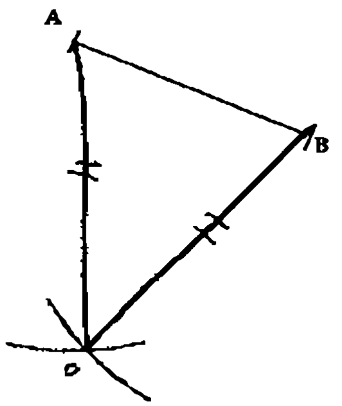


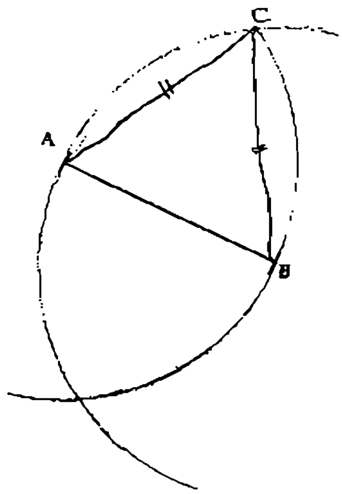
2

Dans le premier dessin la stratégie 2 est bien visible. Dans le second, l'élève démarre avec la stratégie 1, et, sans se rendre compte qu'il a fini, utilise la deuxième stratégie, qui lui fournit deux cercles superflus.

Question 3

Ici encore, bien que la stratégie 1 soit gagnante, 60% des élèves utilisent la stratégie 2. Les élèves qui ont utilisés la stratégie 2 l'ont fait de deux façons : soit ils utilisent un rayon arbitraire, et le triangle produit est alors isocèle de base [AB], soit ils utilisent AB comme rayon commun des deux cercles obtenant ainsi un triangle équilatéral.





complexité croissante des constructions géométriques au collège ne peut que conforter cette pratique, dans le but de ne pas surcharger les dessins et pour une meilleure lisibilité. Ceci suppose que l'élève sait qu'il représente un morceau de cercle, le reste étant seulement imaginé, qu'il anticipe la partie "utile", et enfin que le problème n'admet pas d'autre solution que celle prévue. Or des observations effectuées en 4°, à propos de l'inégalité triangulaire, nous permettent de soupçonner que les élèves n'ont pas conscience de tracer des cercles quand ils font seulement deux petits arcs.

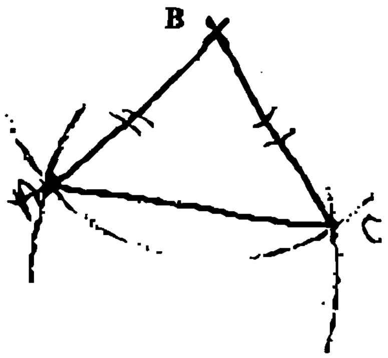
Question 4

Bien que le choix soit possible, 51% des élèves interrogés utilisent la stratégie 2, 40% la stratégie 1, les autres ne répondent pas.

Les procédures erronées sont :

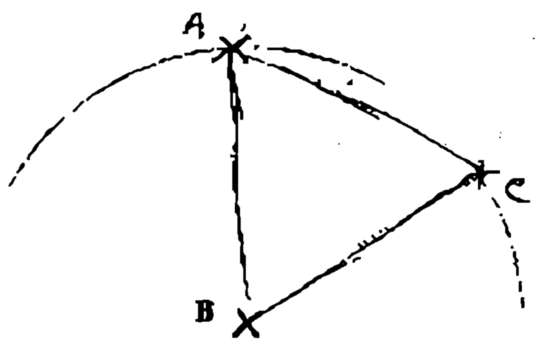
1- Tracé d'un arc de cercle de centre B et de rayon r arbitraire
2- Choix de A et C sur cet arc.

Le triangle obtenu est alors isocèle de base [AC]. Cette procédure est une réplique de la procédure 2 utilisée à la question 2 qui s'était avérée adéquate, mais cette fois en prenant B pour sommet au lieu de A.



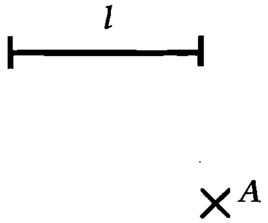
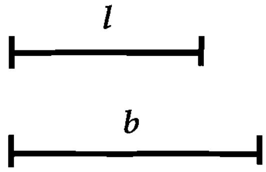
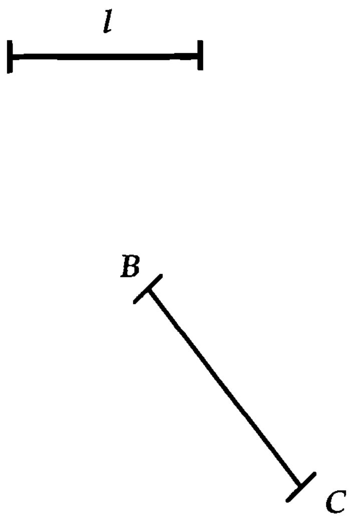
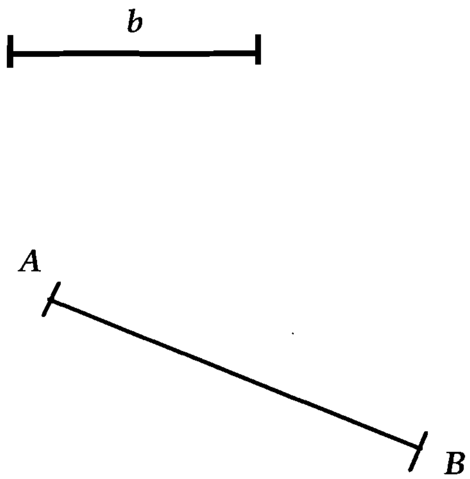
et

1- Tracé d'un arc de cercle de centre B et de rayon r arbitraire
2- Choix d'un point A sur cet arc
3- Tracé d'un arc de cercle de centre A et de rayon r, l'intersection des deux arcs fournit le point C (le triangle obtenu est équilatéral).



I.3. Deuxième partie du questionnaire

Dans cette partie on donne soit la longueur l de AB et AC, soit la longueur b de la base, soit les deux à la fois l et b.

5- On donne la longueur l et le sommet A :  *Question caractéristique de la stratégie 1 .* *Le rayon du cercle est imposé*	6- On donne la longueur l et la longueur b:  *Les deux stratégies sont utilisables*
7- On donne le côté [BC] et la longueur l :  *Question caractéristique de la stratégie 2* *Le rayon commun est alors fixé*	8- On donne le côté [AB] et la longueur b :  *Question caractéristique de la stratégie 1,* *Le centre et le rayon du cercle sont alors imposés*

Question 5

50% des élèves utilisent la stratégie 1, 30% la stratégie 2 bien qu'elle soit ici non appropriée, et 20% ne répondent pas.

Procédures erronées

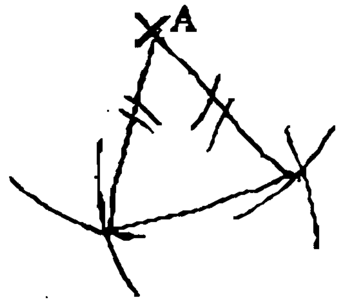
Outre les procédures erronées déjà signalées à la question 2, on relève soit le non respect de la longueur l, soit le tracé d'un triangle équilatéral de côté l (bien que l'on ne puisse pas qualifier cette dernière procédure d'"erronée" au sens strict du terme)

1- Tracé d'un arc de cercle de centre A et de rayon l

2- Choix de B sur cet arc

3- Tracé d'un arc de cercle de centre B et de rayon l, et d'un autre arc de centre A et de rayon l qui le coupe. L'intersection des deux arcs fournit le point C.

4- On complète par un arc de centre C de rayon l pour marquer B déjà choisi.



N.B. : le triangle obtenu est équilatéral.

Question 6

La méthode 2 est ici adoptée en majorité (54%), contre la méthode 1 (29%) et 16% de non-réponses.

Un nombre non négligeable d'élèves (28%) intervertissent l et b, de manière à obtenir un triangle isocèle dont la base est plus courte que les deux autres côtés.

Une hypothèse est qu'il se produit un effet de typicalité pour certains élèves. Un triangle isocèle serait stéréotypé: soit la base est plus courte que les deux autres côtés, soit tous les angles sont aigus.(Du point de vue des élèves, il n'est pas sûr que ces deux propriétés soient équivalentes.)

Question 7

88% des élèves utilisent la stratégie 2 adaptée. La base [BC] étant imposée, les élèves respectent, semble-t-il, davantage la contrainte $BC > l$.

Question 8

57% des élèves utilisent encore la stratégie 2, bien qu'elle ne convienne pas, 33% la stratégie 1 et 9% ne répondent pas.

II. Nos conjectures

L'analyse des résultats montre donc que les élèves arrivent en 6° en connaissant convenablement la construction du triangle isocèle à partir de la base (stratégie 2), et que la moitié d'entre eux au moins ne connaissent pas la construction à partir du sommet (stratégie 1). Par ailleurs, parmi les élèves qui utilisent la stratégie 1, un certain nombre ont dû l'inventer pour l'occasion, ce qui ressort des entretiens que nous avons eu avec eux. Une question se pose : pourquoi cette stratégie n'est-elle pas enseignée au même titre que l'autre ?

Nous avançons maintenant quelques hypothèses concernant cet état de fait.

1- la stratégie 1 est considérée par les enseignants comme une évidence et donc ne peut donner lieu à un enseignement.

Il faut remarquer qu'elle n'est certainement pas une évidence si la conception du cercle comme ensemble de points n'est pas bien installée, ce qui est probable[2]. En effet, après avoir tracé le cercle de centre le sommet du triangle, il faut individualiser deux points sur le cercle, donc ne pas voir le cercle globalement comme un trait de crayon, mais comme formé de points.

2- la stratégie 2 peut se généraliser à un triangle quelconque et serait un premier pas vers la construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés, qu'il soit quelconque, isocèle ou équilatéral.

Dans un article à paraître, Annie Berté montre comment les "cas d'égalité" des triangles, bien qu'ayant disparus des programmes, restent implicites dans les démonstrations de maints théorèmes au collège (ex: théorème de Pythagore) sans que les professeurs en aient eux-mêmes conscience. La construction associée à la stratégie 1 relève du deuxième cas d'égalité : on choisit un sommet, la longueur commune des deux côtés partant de ce sommet et l'angle qu'ils forment. La construction associée à la stratégie 2 relève du troisième cas d'égalité puisqu'on choisit les longueurs des trois côtés. Mais dans tout le collège, ce sont surtout les anciens premier et deuxième "cas d'égalité" qui restent implicites car considérés comme très "évidents". Pourtant la stratégie 1 est tout aussi importante que la seconde et difficile à inventer en situation de test comme le montrent nos résultats. Une séance spéciale dans la progression devrait donc être consacrée en classe à cette invention. Cela ne se fera pas si les maîtres n'en prennent pas conscience.

3- Environ un tiers des élèves produisent, à un moment ou un autre, un triangle équilatéral dans ce questionnaire, et cela précisément dans les questions caractéristiques de la stratégie 1 lorsque ils veulent appliquer la stratégie 2, la seule qu'ils connaissent. Nous faisons l'hypothèse que la construction d'un triangle équilatéral, à la place d'un triangle isocèle, souvent attribuée à une confusion dans le vocabulaire, permet aux élèves de se tirer d'affaire. Cette échappatoire des élèves nous a surpris, car en général on constate au contraire qu'ils refusent de considérer un triangle équilatéral comme isocèle. Or ici ils construisent un triangle équilatéral, alors qu'un triangle isocèle est demandé, et

[2]M.Artigue et J.Robinet (1982). Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques,* n°3/1, éd. La Pensée Sauvage : Grenoble.

cela pour arriver à appliquer la stratégie 2. Le professeur ne pouvant rejeter cette production, ceci permet à l'élève de sortir relativement indemne dans un nombre important de cas, et cette stratégie 2 s'en trouve renforcée.

III. Problèmes qui utilisent chacune des stratégies

Le fait de ne pas avoir acquis cette mobilité de points de vue sur le triangle isocèle (soit partir de la base, soit partir du sommet) est préjudiciable non seulement pour les simples constructions de triangles isocèles, mais aussi pour d'autres problèmes.

Point de vue 1

- construction d'un losange à partir d'un sommet
- construction au compas, de points symétriques par rapport à une droite
- transport d'un angle
- chaque fois que l'on a un cercle et des points sur ce cercle, il peut être intéressant de faire apparaître des triangles isocèles (polygones réguliers)
- centre d'un cercle passant par deux points donnés Les élèves ne pensent pas à la médiatrice, car ils ont le point de vue du segment et d'un point équidistant des extrémités qu'on cherche avec l'intersection de deux arcs. Ils ne reconnaissent pas la situation ici.
- recherche d'images de points par une rotation ou recherche du centre de rotation à partir des points et de leurs images

Point de vue 2

- construction d'un triangle équilatéral, d'un angle de 60°
- construction au compas, de la médiatrice d'un segment
- construction d'un losange à partir d'une diagonale

Cette liste n'est pas exhaustive et lorsque l'on est sensibilisé au problème elle a tendance à s'allonger.

Signalons pour terminer, un exercice posé en classe de seconde [3] :

"*Soit C un cercle de centre O. A et B deux points du cercle, et I le milieu de [AB]. Montrer que (OI) et (AB) sont perpendiculaires.*"

5 élèves seulement sur les 18 de la classe ont su résoudre cet exercice, ce qui est très peu en seconde pour un exercice d'apparence aussi simple. Parmi les 13 échecs, 7 n'ont rien écrit. Un élève a placé les points A et B diamétralement opposés et s'est arrêté. Un élève ayant proposé de considérer (OI) comme axe de symétrie du triangle isocèle OAB, s'est vu refuser cette démonstration par le professeur stagiaire car la justification attendue portait sur la médiatrice comme ensemble de points équidistants !

[3] Mémoire d'un professeur stagiaire, I.U.F.M de Bordeaux, Mai 1994. Nous avons laissé la formulation telle qu'elle était.