UNE ANALYSE DE PRATIQUES DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES À PARTIR DU CAHIER DE L'ÉLÈVE : DEUX ÉTUDES DE CAS

Robert NOIRFALISE
IREM de Clermont-Ferrand

Interroger la pratique d'un enseignant ou d'un élève à partir du *cahier de l'élève* peut sembler paradoxal car nous n'avons pas, dans une telle perspective, besoin de connaître, en personne, l'enseignant ou l'élève; nous ne sommes pas obligés d'aller au fond d'une classe observer ce qui s'y passe. Certes, nous pouvons prévoir que l'on va nous objecter que nos analyses ne peuvent être signifiantes car nous avons avec le matériau de travail trop peu de données, qu'il est indispensable d'aller sur le terrain, ici la classe, pour observer, qu'on ne saurait se priver d'informations sans déformer alors le réel [1]. L'objection, en toute généralité, est facile à lever : toute démarche scientifique abstrait le réel étudié et donc oublie nécessairement toute une série d'informations non pertinentes. Que l'on pense aussi au médecin qui au vue d'une analyse de sang ou d'une radiographie en saura plus sur un malade, sans le connaître, que le malade en sait sur lui-même [2]. Cependant, relativement aux analyses proposées, le débat est, bien sûr, tout à fait légitimement ouvert sur la pertinence des outils utilisés et le bien fondé de la sélection d'informations opérée. Dans les deux études ou essais développés ci-dessous, nous essayons d'expliquer des faits (des difficultés spécifiques d'élèves) ; nous ne savons pas si on peut avec succès en généraliser la démarche.

L'analyse proposée s'inspire de l'approche anthropologique de Y. Chevallard : nous tenterons ainsi d'examiner le fonctionnement d'objets de savoirs mathématiques, les rapports que des élèves, un enseignant tissent avec ces objets. Nous postulons que les pratiques existantes résultent d'équilibres qui s'élaborent dans l'institution qui les abrite.

---

[1] Dans un texte intitulé "L'observation didactique" Y. Chevallard réfère à M. Foucault qui dénonce ce fantasme de vouloir tout voir et tout entendre sous le terme de *panoptisme*.
[2] Les connaisances en jeu étant relatives à la maladie : comme le dit Foucault in *Naissance de la clinique* la connaissance de la maladie implique une abstraction du malade, un oubli de celui-ci en personne.

«petit x» n° 38 pp. 5 à 29, 1994-1995

La première étude de cas proposée concerne le théorème de Pythagore et son enseignement en classe de quatrième. Il en existe plusieurs démonstrations qu'un enseignant peut présenter dans un temps compatible avec le temps didactique. Dans l'approche adoptée, on peut se demander pourquoi un enseignant de quatrième doit faire "vivre" une démonstration de ce théorème, pourquoi il ne se contente pas d'en énoncer le résultat. A cela, on peut répondre qu'il convient de faire vivre en quatrième la démonstration et des gestes mathématiques qui lui sont associés. Il n'y a pas de chapitre spécifique s'appelant "Démonstration" dont on pourrait dire que la fermeture clôt l'apprentissage de son objet. Ce serait une autre question que de savoir pourquoi un tel chapitre ne peut exister, du moins à ce niveau scolaire. Cependant la démonstration est plutôt omni-présente dans l'univers mathématique qui se construit en classe de quatrième. Un enseignant ne peut la faire vivre officiellement à tout instant mais il est des endroits privilégiés pour la faire fonctionner. La propriété de Pythagore est une telle occasion.

Pour faire vivre la démonstration du théorème de Pythagore, l'enseignant a besoin d'autres objets mathématiques, de gestes techniques autorisant l'obtention de la preuve. La démonstration achevée, l'institution "classe de quatrième" ne saurait se contenter de demander à l'élève de la reproduire, il convient, banalement, que des usages du théorème se développent. Or les tâches impliquées par ces usages ne vont pas mobiliser nécessairement les mêmes techniques que celles requises pour la démonstration. Ceci est banal ; ce qui l'est un peu moins, et c'est cela que nous voulons étudier, concerne la position de l'élève : *"Comment celui-ci , dans la vie des objets mathématiques qui lui sont donnés à voir, à utiliser, va-t-il repérer les gestes techniques dont il aura effectivement un usage ?"* .

Chacun des cas étudiés met en scène un élève n'arrivant pas à faire un exercice : dans le premier, l'analyse proposée vise à montrer que la focalisation sur les techniques spécifiquement proposées pour démontrer le théorème de Pythagore masque les techniques propres aux usages élémentaires du théorème. En revanche, dans le second, la difficulté de l'élève peut s'expliquer par une absence dans son cahier d'une démonstration d'un théorème (concernant la droite des milieux dans un triangle).

L'écrit du cahier de l'élève, dans une telle perspective, comme lieu de "mémoire", d'institutionnalisation de ce qu'il y a à savoir, nous semble bien être un bon candidat à l'analyse. Cet écrit étant fait sous la responsabilité de l'enseignant, que celui-ci invite ses élèves à prendre des notes ou qu'il écrive au tableau, nous avons bien aussi une analyse portant sur "une pratique" de l'enseignant. Nous pourrions qualifier celle-ci de sensible car le professeur y réalise un acte délicat : contribuer à montrer aux élèves le futur des objets mathématiques vivant dans un moment présent dans la classe et en conséquence contribuer à leur montrer la nature de leur travail.

I. Une première étude de cas

I.1. Présentation du cas

L'exemple donné ici est dû à Yves Chevallard [3]. Il débute par une anecdote, la suivante : une mère, professeur de mathématiques a une fille en classe de 4e ; celle-ci a de bons résultats en mathématiques. Un jour, elle vient demander de l'aide à sa mère : elle a un exercice qu'elle ne sait pas faire : "Un triangle rectangle est donné, on connaît les mesures effectives des deux côtés de l'angle droit, il s'agit de calculer la longueur de l'hypothénuse". La mère reconnaît là une application triviale de Pythagore et s'étonne que sa fille ne sache pas le faire... mais peut-être n'a-t-elle pas encore vu le théorème en cours, il serait alors étonnant qu'on lui donne ce genre d'exercice...

Nous sommes là, comme un médecin, face à un symptôme, ne pouvant comprendre ce qui se passe sans rechercher d'autres informations. De la même façon que ce dernier peut demander une analyse de sang, nous pouvons ici regarder "le cahier de cours de l'élève" et l'analyser.

Ci-dessous, nous reproduisons le texte du cours tel qu'il est dans le cahier de l'élève.

I.2. Le matériau à analyser : le texte d'un cours [4]

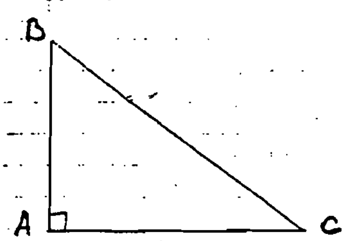
Le texte du cours est reproduit ci-après.

Triangles rectangles

I Théorème de Pythagore

Activité préparatoire

Construire un triangle rectangle ABC en A, de côté 3 cm pour AB et 4 cm pour AC.



Aire de ABC

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

$= \frac{3 \times 4}{2}$

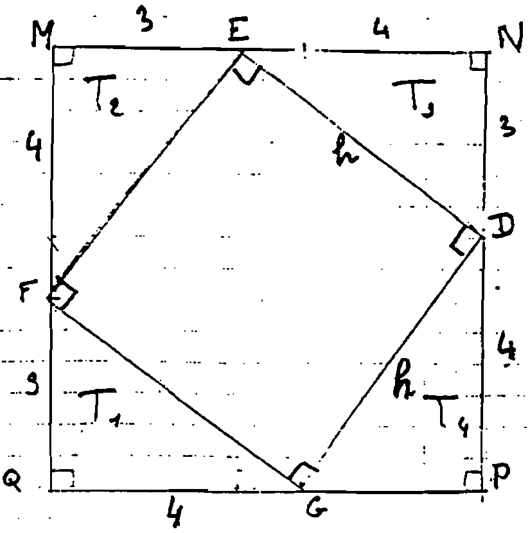
$= 6\ cm^2$

---

[3] Exemple présenté lors d'un stage PNF organisé à l'IUFM d'Orléans

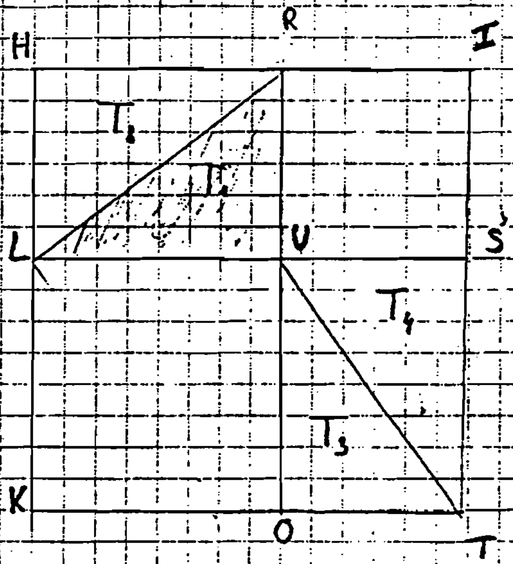
[4] Il se trouve que le cours a été fait par un stagiaire IUFM, un jeune professeur donc, dans la classe de son tuteur.

On construit un carré MNPQ de côté 7 cm



EDGF est un carré

Appelons h la longueur GD



$\mathcal{A}_{MNPQ} = \mathcal{A}_{HIJK}$

$\mathcal{A}_{MNPQ} = \mathcal{A}_{EDGF} + (\mathcal{A}_{T_1} + \mathcal{A}_{T_2} + \mathcal{A}_{T_3} + \mathcal{A}_{T_4})$

$= \mathcal{A}_{EDGF} + 4 \times 6$

$= h^2 + 24$

$\mathcal{A}_{HIJK} = \mathcal{A}_{RISU} + \mathcal{A}_{LUOK} + 4 \times \mathcal{A}_{T_1}$

$= 3^2 + 4^2 + 24$

On a :

$\mathcal{A}_{HNPQ} = \mathcal{A}_{HIJK}$

Donc $h^2 + 24 = 3^2 + 4^2 + 24$

$h^2 = 3^2 + 4^2$

$h^2 = 9 + 16$

$h^2 = 25$

On veut h, pas h^2

Comment calculer h ?

Avec la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$:

On tape 25 $\sqrt{\ }$

Finalement, on trouve $h = 5$ cm

Si on remplace 3 cm par a cm

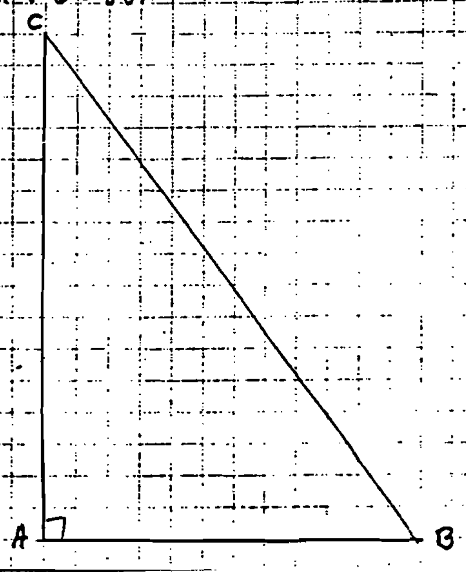
et 4 cm par b cm

$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$$

donc $h^2 + 24 = 3^2 + 4^2 + 24$

$= 3^2 + 4^2$

ex : Construire le triangle rectangle ABC, rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm



$AB = 6$ cm

$AC = 8$ cm

Mesurer BC : $BC = 10$ cm

Calculer avec la calculatrice

- $BC^2 = 100$
- $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$

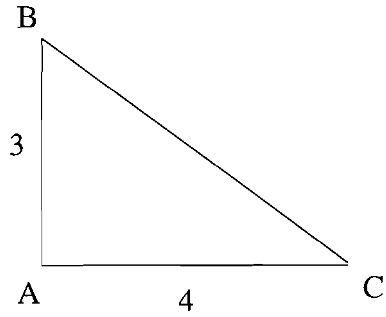
Que constate-t-on ?

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

I.3. L'analyse du matériau

Nous analyserons la séquence, dont nous avons les traces écrites, du point de vue de l'élève qui est devant sa leçon ; elle a le texte à retravailler. Nous évoquerons cependant l'activité supposée en classe, et supposerons qu'elle a effectivement réalisé ce qui est demandé : c'est une bonne élève.

Activité préparatoire :



Pendant la classe, elle a donc construit un triangle rectangle ABC de côtés 3 cm et 4 cm.

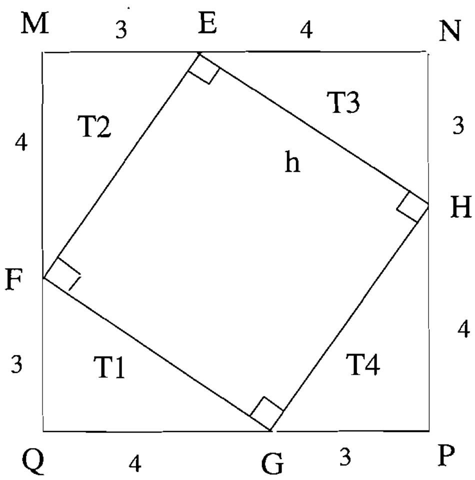
Elle a ensuite exprimé l'aire du triangle rectangle.

Elle a à sa disposition deux procédés :

- l'aire de ABC est la moitié de l'aire du rectangle que l'on peut construire à partir de ABC...
- l'aire d'un triangle est la moitié de la hauteur par la base...

Dans cette activité, rien de nouveau, c'est un réinvestissement de connaissances anciennes concernant les aires de triangles, appliquées dans le cas particulier du triangle rectangle. Ce n'est sûrement pas l'enjeu de la leçon : il va y avoir d'autres choses à apprendre. Remarquons, cependant, que l'activité préparatoire "tire l'attention" vers des problèmes de calculs d'aires. La problématique du théorème de Pythagore, un calcul de longueur, n'est pas posée. On peut donc supposer que l'élève peut penser que ce sont des problèmes d'aires qui vont occuper le champ de la leçon et qui devront faire l'objet d'apprentissage.

"On construit un carré MNPQ de côté 7 cm"



On peut penser que la figure a été donnée au tableau par l'enseignant.

T1 est un triangle dessiné comme ABC, ci-dessus.

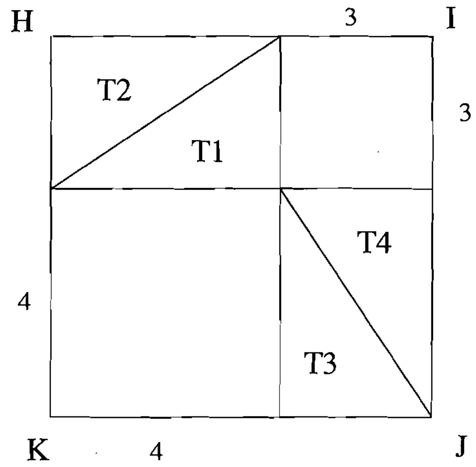
On peut supposer aussi que le professeur a montré l'isométrie des triangles T1, T2, T3, T4.

Des symboles sont utilisés pour pouvoir montrer le travail fait avec la figure : les lettres M, N, P, Q, E, F, G, H, T1, T2, T3, T4, la lettre h.

On ne sait pas ce qui s'est passé en classe relativement au carré EFGH.

Y a-t-il eu un simple constat, une démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un carré ? On ne peut pas le savoir. S'il y a eu démonstration, le fait qu'il n'y a pas de trace écrite montre alors que les gestes techniques afférents à celle-ci ne font pas partie de la mémorisation. (On peut le supposer, comme élément du contrat qui sert à définir le travail de l'élève).

Ensuite un autre carré, identique au précédent est donné, mais il est découpé d'une autre manière.



Y a-t-il là, émergence de l'officialisation de techniques nécessitant un travail de la part de l'élève ?

N'est-ce pas là, dans ce chapitre, qu'apparaît un élément de savoir nouveau à apprendre :

- techniques de décomposition d'une figure en sous-figures dont on sait calculer les aires, et les traductions numériques et littérales de l'effet de cette décomposition.

On peut se demander, pour l'élève dont le cas nous intéresse, si ce n'est pas ces techniques "nouvelles", car jamais officiellement à apprendre auparavant, qui occupent l'avant-scène didactique de la leçon.

Poursuivons l'analyse pour examiner si la suite de la séquence confirme ou dément l'hypothèse ainsi formulée.

Ensuite l'élève écrit :

"On a $A_{MNPQ} = A_{HIJK}$"

donc $h^2 + 24 = 3^2 + 4^2 + 24$

$h^2 = 3^2 + 4^2$

$h^2 = 9 + 16$

On veut h, pas h^2

Comment calculer h

Avec la touche $\sqrt{}$

On tape 25. $\sqrt{}$

Finalement, on trouve h = 5

Commentaire :

Les techniques utilisées ici sont relativement simples :

-propriétés de l'égalité,

-propriétés numériques et algébriques.

L'appareillage technique développé permet de calculer l'aire du carré EFGH obtenu dans la première décomposition. On a ainsi *un résultat mathématique,* portant sur la valeur d'une aire. Le calcul qui suit de h avec le recours de la machine apparaît comme une technique sans technologie (sans discours la justifiant), ce qui est inhabituel contractuellement dans une classe de mathématiques.

En bas de la deuxième page, dans le cahier de l'élève, on peut découvrir l'apparition *bien anodine* du théorème de Pythagore :

"Si on remplace 3 cm par a cm et 4 cm par b cm :

$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$

donc $h^2 + 24 = 3^2 + 4^2 + 24$

$h^2 = 3^2 + 4^2$

Au vu de l'anecdote, on peut faire l'hypothèse que l'élève n'a pas perçu que l'essentiel de la leçon était dans cet encadré, du moins comme formule qui, associée à des techniques permet de *calculer des longueurs*. Il se peut qu'il l'ait retenu, mais comme formule donnant l'aire d'un carré apparaissant dans une configuration particulière.

Terminant la leçon, on trouve un exercice :

"Construire le triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm, et AC = 8 cm"

C'est ce que l'élève a fait scrupuleusement avec les carreaux de son cahier.

L'exercice est une vérification expérimentale, sur une figure particulière de l'égalité de Pythagore.

On peut supposer que l'élève a tracé un triangle rectangle, mesuré à la règle la longueur BC, puis fait des calculs avec des carrés. Ici, ce sont des gestes techniques relativement anciens qui sont mobilisés. Ce n'est pas là que l'élève a vu le signe de quelque chose de nouveau à apprendre.

On peut ainsi comprendre que l'élève n'ait pas "vu" dans cette séquence le théorème de Pythagore et ainsi qu'il ne sache pas résoudre l'exercice "élémentaire" qui lui a été proposé après la leçon.

Si la problématique à laquelle répond le théorème de Pythagore avait été clairement annoncée, on peut penser que l'élève aurait vu ce qu'il y avait d'important à apprendre, à savoir "le théorème et des usages de celui-ci". En revanche, le but de l'activité n'étant pas clairement exprimé, l'élève a pu davantage centrer son attention sur les décompositions du carré et sur des calculs d'aires.

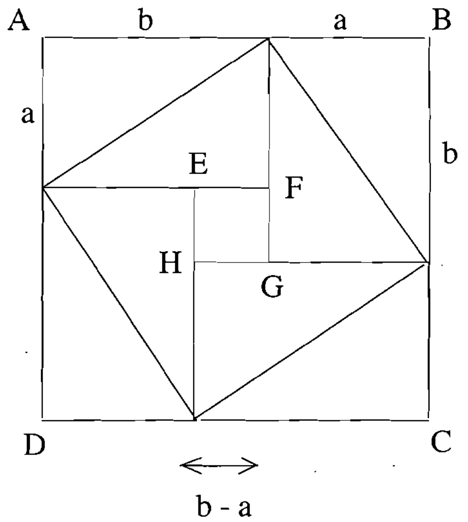
I.4. Un scénario fictif : une suite du cours

On peut, pour conforter l'analyse précédente, essayer d'imaginer un *scénario fictif* qui serait cohérent avec la leçon perçue par l'élève, et qui formerait la trame d'une suite à ce cours. C'est ainsi que plutôt qu'un exercice sur Pythagore, on pourrait imaginer que l'enseignant désigne les deux décompositions du carré par des noms "décomposition du premier type", et "décomposition du second type", et qu'il propose l'exercice suivant :

"Deux nombres a et b positifs sont donnés. Considérant un carré de côté "a+b" et en usant d'une décomposition du second type, montrer que : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"

On pourrait aussi imaginer dans un cours sur le triangle rectangle, une suite usant de manipulations, décompositions, recompositions de figures, à la mode des mathématiques chinoises [5].

C'est ainsi que le cours pourrait se poursuivre avec la présentation d'une décomposition du carré de type 3, la suivante :



Cette décomposition permettrait d'établir, avec les mêmes techniques de calculs d'aires que celles vues ci-dessus, la formule suivante, pour des réels positifs :

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

On pourrait, pour montrer l'intérêt des techniques de calculs d'aires poursuivre le cours avec le problème suivant [6] :

Problème : un triangle ABC rectangle en A est donné, de côtés de l'angle droit a et b. On inscrit, comme le montre la fig. 1, ci-dessous, un carré dans ce triangle. Trouver le côté c de ce carré.

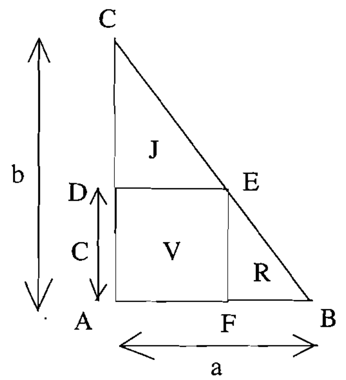


Fig. 1

Solution : découpons le triangle ABC en trois parties, V le carré, J le triangle rectangle CDE et R le triangle rectangle EFB, et construisons comme l'indique la fig. 2 un rectangle avec deux pièces de chaque sorte

[5] Cf. Martzloff J. C. (1990). Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises. in *La démonstration mathématique dans l'histoire* Ed. Inter-IREM pp. 131 - 153.

[6] Exemple emprunté à Martzloff J. C.

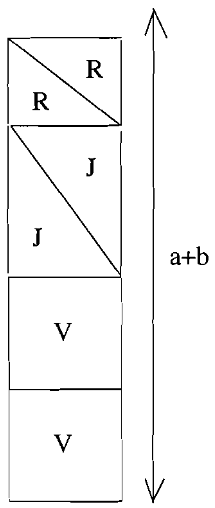


Fig. 2

On obtient ainsi : ab = c(a+b)

$$\text{d'où}\quad c = \frac{ab}{a+b}$$

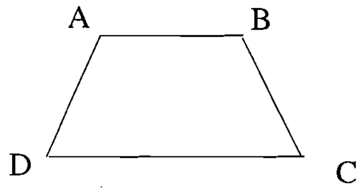
Le scénario de cours fictif que nous présentons est bien maigre, et il faudrait bien sûr considérablement l'étoffer pour qu'il ait quelques chances d'exister dans un système scolaire (il conviendrait de lui assortir une gamme d'exercices, de faire "vivre" d'autre objets mathématiques grâce aux techniques présentées). Il y a là cependant, une méthode, celle du scénario fictif, qui peut rendre service dans l'effort d'analyse que nous tentons ici ; elle peut rendre service au même titre qu'une comparaison de manuels actuels à des manuels plus anciens.

II. Une deuxième étude : le cas "Mathieu"

II.1. Présentation du cas

Mathieu est élève en classe de quatrième et il se trouve que nous le connaissons bien. Il est, sans être très bon élève, dans la première moitié d'une bonne classe. A l'occasion d'une visite, il nous dit qu'il avait l'exercice suivant à faire et qu'il n'a pas su le démarrer.

Exercice n° 49 :



Soit ABCD un trapèze, I le milieu de [AD] et J le milieu de [BC].

Montrer que (IJ) et (CD) sont des droites parallèles.

(IJ) coupe la diagonale (AC) en L et la diagonale (BD) en K.

Montrer que L est le milieu de [AC] et K le milieu de [BD].

Nous nous sommes proposés de regarder avec lui cet exercice. Il se trouve que nous avions un magnétophone. Nous avons donc pu enregistrer le dialogue suivant. (Mathieu est désigné par M, et nous-mêmes par I comme interviewer). Ce dialogue constitue, avec les difficultés révélées de Mathieu, le cas à étudier.

Extrait du dialogue avec Mathieu

M : "J'avais l'exercice 49 à faire et je n'ai pas su le faire."
I : " le 49"
M : " Enfin, j'ai fait la figure, comme çà, elle ne peut pas dire que je ne l'ai pas cherché."
I : " Eh bien, on le regarde"
M : " Oui"
I : " Tu réessayes de le faire."
M : " Euh! ... ABCD comme sur la figure. I et J sont les milieux des côtés [AD]..."
I : " Alors I et J sont les milieux des côtés [AD] et [BC]. ABCD est un trapèze; démontrer que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles."
M : " On sait que dans un triangle, euh, non, dans un trapèze il y a deux côtés parallèles, des côtés opposés parallèles. Donc (AB) et (CD) parallèles."
I : " Oui"
Silence
M : " On sait aussi que I milieu de [AD] et J milieu de[CD] "
I : " Oui"
Silence
M : " et si on prend un point, non, çà ne va pas...."
Silence
M : " Sorti de mon triangle!" [7]
M : " Pff! .... quadrilatères..." (*M regarde son cours)*
M : "Il y en a pas de quadrilatères la dedans, il n'y a que des droites de projections et des triangles "
Silence
I *(qui découvre le cours)* : " donc c'est sur le chapitre des projections."
Silence
I : "Tu es coincé et tu ne sais pas comment faire. Alors, c'est dans la leçon sur les projections , est-ce qu'on pourrait utiliser des projections ?"
M : "Ben, oui. A, non D c'est le projeté de A et C c'est le projeté de B."
I : " Répète"
M :" D est le projeté de A et C est le projeté de B."
I : " Dans quelle direction?"
M : " C'est dans la direction qu'on a dans le plan...et donc, on sait que la projection conserve les milieux"
I : "oui.."
M :" Donc..." *(silence)*

---

[7] On le verra, cette remarque prendra tout son sens après examens de traces écrites, cours et exercices, dont dispose Mathieu dans son cahier.

I : " Donc, c'est peut-être de ce côté là, qu'il convient de chercher ?"

M : " oui, ..., on sait aussi que, çà n'a pas de rapport mais ....dans un triangle la projection , en ce qui concerne la droite des milieux, c'est les mêmes définitions,...c'est la même chose..."

I : " Je n'ai pas très bien compris."

M : " Nous, on a appris que dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un second côté...coupera le troisième en son milieu. Donc, par hypothèse çà peut être pareil dans un trapèze. "

I :" C'est peut-être un problème analogue dans un trapèze. Oui."

Silence

I :" Alors essaies de trouver où il pourrait y avoir des projections avec des milieux.. parce que, ce que tu me dis c'est que : les projections conservent les milieux, et que, c'est peut-être la même chose que dans les triangles mais appliquée au trapèze.. Alors les milieux, c'est les points I et J. ...Si tu veux appliquer les projections avec les milieux.. qu'est-ce que tu pourrais faire ?"

M : " Ben, je sais que D est le projeté de A et par la même occasion celui de I."

I :" Oui, mais tu n'utilises pas bien la propriété des milieux comme cela. Je te donne une indication ?"

M : "Oui."

I : "Alors tu m'as dit que (AB) parallèle à (CD) aussi. Tu vois pourquoi je te dis çà ? Pourquoi ?"

M : "Ah! parce que c'est les milieux des deux côtés qui ne sont pas parallèles... et, oui... il y a deux côtés qui sont parallèles et deux qui sont pas parallèles...."

I : "Oui, et donc les milieux sont ceux des côtés non parallèles"

M : "et que...je ne sais plus... comme les droites sont parallèles les milieux arriveront au même point... arriveront au même point...enfin..."

Comme dans l'exemple précédent, nous donnons ci-dessous le matériau brut qui va nous servir pour l'analyse : le cours sur les projections, des exemples d'exercices traités dans le cahier de Mathieu. Il convient de signaler, cependant, que la partie "Exercices" du cahier de Mathieu est peu ordonnée, certains exercices ne sont pas achevés. Par ailleurs, un parcours des chapitres précédents du cours montre un usage des projections dans le cas particulier de projections orthogonales. Il s'agit alors systématiquement de la projection orthogonale d'un point particulier et d'un seul sur une droite donnée.

II.2. Le matériau à analyser : le texte d'un cours

Le texte du cours est reproduit dans les pages suivantes.

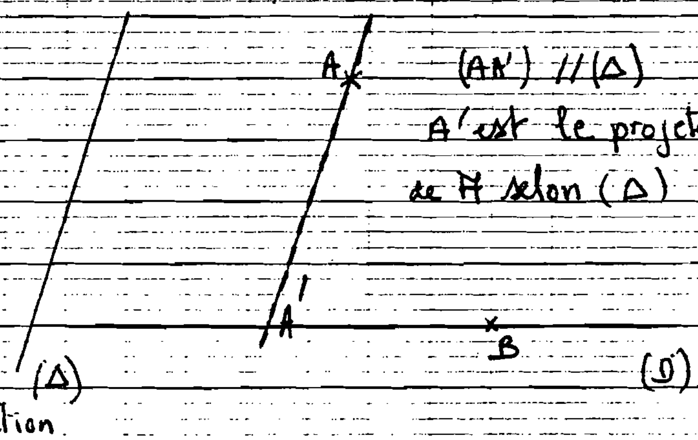
chp 4 Projection

I°) Projection :

1°) Definition :

Pour pouvoir utiliser une projection il faut connaître d'une part la direction de projection d'autre part la droite sur laquelle on projette.

On dit alors : on projette les points du plan sur (D) parallèlement à (Δ)



(AA') // (Δ)
A' est le projeté de A selon (Δ)

remarques

. au lieu de projeter les points du plan on peut projeter les points d'une droite.

. pour que la projection soit possible certains cas de figure sont à éviter.
(voir cahier d'exs.)

notation

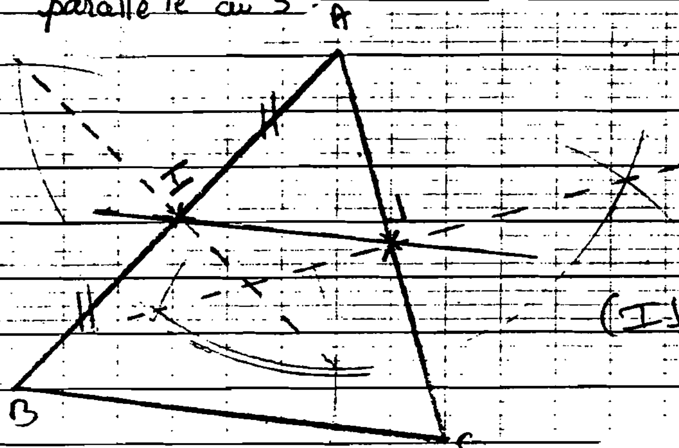
On peut écrire $p(A) = A'$ pour dire que A' est le projeté de A.

2°) Propriétés

- tous les points de (D) ~~sont~~ invariants, c'est a dire que B est son propre projeté
- en général par projection les longueurs ne se conservent pas.
- par projection le milieu se conserve.

Propriété ①

Ds un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au 3^e.

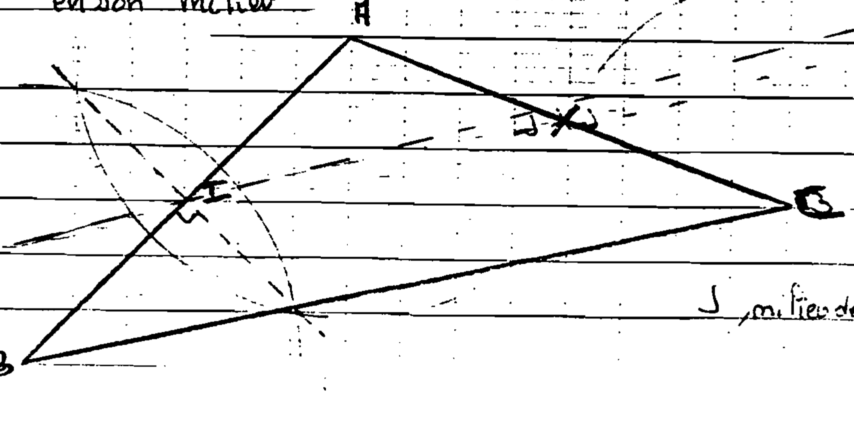


(IJ) // (BC.)

II Droite des milieux dans un triangle. (par coeur)

Propriété ①

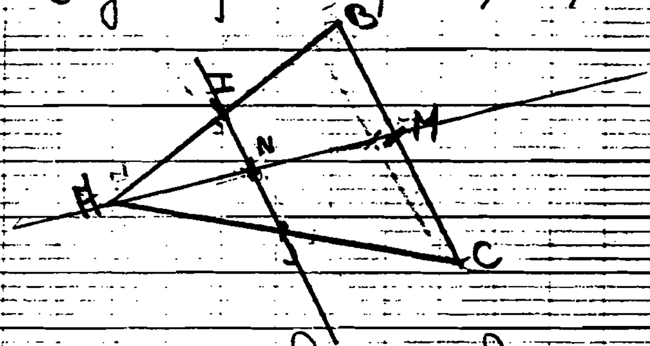
Ds un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un des côtés et qui est parallèle à un deuxième coupe le troisième en son milieu



J milieu de [IA]

Extrait de la partie "exercices"

ABC est un triangle. On a I milieu de [AB] et J milieu de [AC]
M est un point de [BC] et N est le milieu de [MA]
Il faut prouver que I, J, N sont alignés



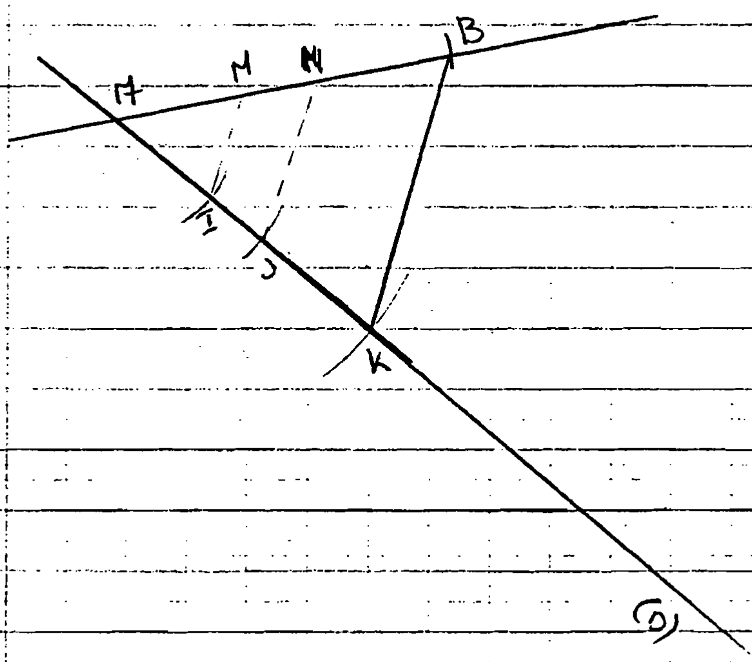
Considérons le triangle ABC.
Par hypothèse I milieu [AB] et J milieu de [AC]
" D'un triangle la droite qui passe par 2 côtés est parallèle à la 3e"
Nous en déduisons (IJ) // (BC) et

Considérons le triangle ACM.
Par hypothèse on a J milieu de [AC] et M milieu
On utilise la m̄ propriété.
Nous en déduisons (NJ) // (MC)

M est un point de (BC) donc (BC) et (MC) forment une m̄ droite. Nous pouvons donc écrire (IJ) // (BC) et (NJ) // (BC)
Nous en déduisons (IJ) // (NJ) ces parallèles avec un point commun J sont confondues d'où N, J, I alignés

1. **[AB] est un segment quelconque, construire les points M et N sur [AB] pour que AM = MN = NB.**

p60 n°1

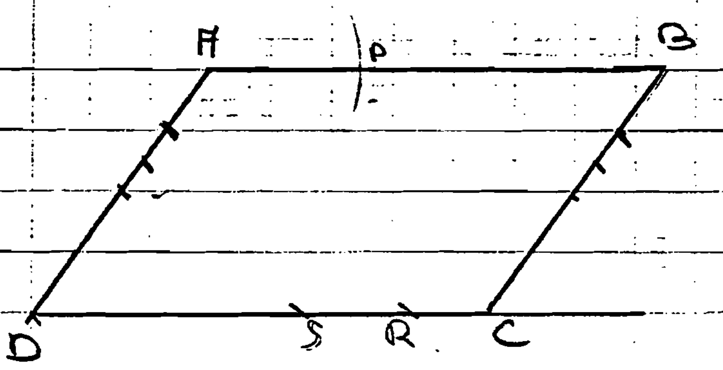


(30) ABCD est un parallélogramme.

P est sur le segment [AB] tel que $AP = \frac{1}{3}AB$.

S et R sont sur le segment [CD] tels que DS = SR = RC.
Construire P, S, R (consulter l'exercice résolu n° 1).
La droite (PR) coupe (AD) en I.
Montrer que P est le milieu de [RI] et que A est le milieu de [DI].

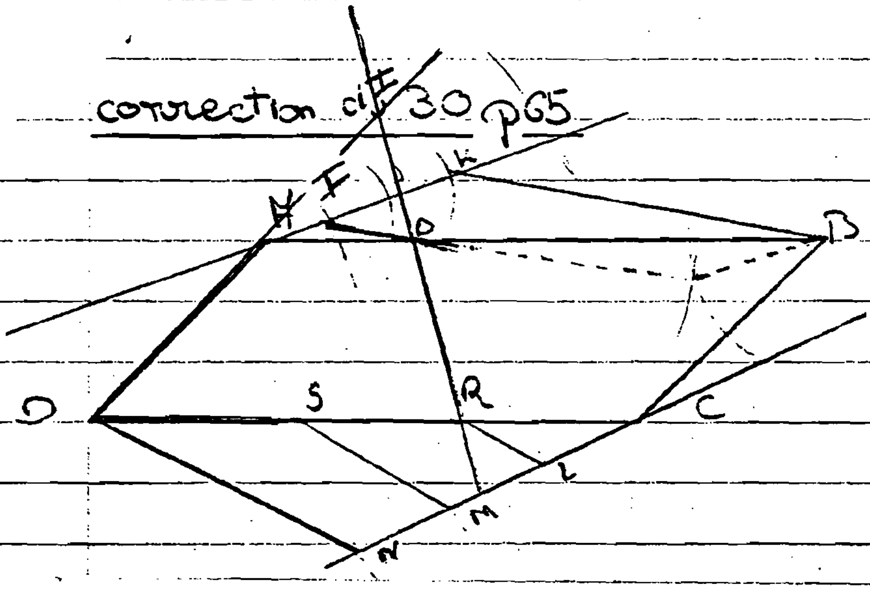
30p65.



1) refaire

Vendredi 15 Novembre

correction d'ex 30 p65



Montron que S milieu de [DR]

Par hypothèse S et R sont sur le segment [CD] tel que DS = SR = Rc
Nous en déduisons que S est aligné avec D et R et equidistant aux points donc S est le milieu de [DR]

Montrons que (PS) // (DI)

Par hypothèse ABCD est

parallèlogramme donc les côtés opposé sont parallèle et de même mesure ; grâce au parallélisme nous avons (AP) // (DS)

De + par construire, P, S, R nous avons partage les côtés [AB] et [DC] entiers d'où AP = DS
APSD à alors 2 côtés opposés parallèle et de même mesure donc APSD est un parallèlogramme. Nous en déduisons que (AD) // (PS) or I est un point de (AD) donc (DI) // (PS)

Observons le triangle $\widehat{IDR}$

Nous avons démontré que S milieu de [DR] et (PS) // (DI).
<< Ds un triangle la droit qui passe par le milieu d'un des côté et qui est parallèle à la 3e coupera la 3e en son milieu" Nous avons alors que R mile de [PI]

Ds le triangle IDR nous avons maintenant P milieu de [RI]. Nous avons déjà dit (AD) // (DS) ou (AD) // (DR)
Grâce à la même propriété nous avons A milieu de DI

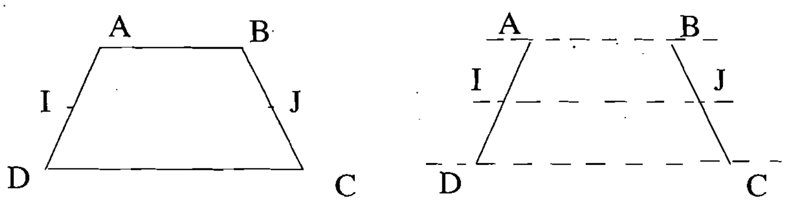
II.3. L'analyse du matériau

a - Un fait intéressant et méritant d'être élucidé est le suivant : Mathieu a l'intuition que la propriété énoncée dans le cours "par projection, le milieu se conserve" pourrait être utile et que ce qui est vrai pour le triangle doit l'être pour le trapèze. Voilà un bon départ qui cependant n'aboutit pas ; il n'arrive pas à armer "techniquement" cette intuition, ce qui l'amène à dire qu'il n'a pas su démarrer l'exercice.

Examinons brièvement, sur le plan technique, une solution attendue de la première question :

Le trapèze ABCD est tracé, et sans problème, un élève comme Mathieu peut marquer les points I et J milieux respectifs de [AD] et [BC] [8].

Ceci fait, perceptivement, un grand pas est fait lorsqu'on regarde le dessin en y ajoutant la ligne (IJ) et en regardant (AB) et (CD) comme définissant la direction d'une projection : il y a un geste spécifique de lecture de configuration à réaliser.



Le travail se poursuit, avec pour aboutir à une démonstration, une manipulation d'énoncés. Par exemple :

Considérons la projection sur (BC) parallèlement à (DC). D se projette en C et comme (AB), est parallèle à (DC), A se projette en B.

I est le milieu de [AD] ; comme "une projection conserve le milieu", la projection de I sur (BC), selon (DC), est le milieu de [BC], c'est donc J, (IJ) est donc parallèle à (DC), ce que l'on cherchait à montrer.

D'autres solutions sont possibles, par exemple, en traçant (DB) et en considérant les triangles ADB et DBC.

Nous limiterons notre analyse à la solution donnée ci-dessus, c'est à dire que nous essayons de répondre à la question : pourquoi cette solution particulière n'a pas été disponible chez Mathieu ? [9]

[8] Le cahier de cours montre qu'un travail technique au compas et à la règle est demandé pour placer de tels points.

[9] D'autres solutions exigeraient d'autres analyses du même type mais exigeraient des recherches plus fines dans les cahiers de cours et d'exercices ; c'est ainsi que pour la solution évoquée visant à étudier les triangles ADB et BDC, on peut se demander à quel moment le professeur montre l'usage de sur-figure, de points auxiliaires ; en d'autres termes l'usage de gestes techniques spécifiques de l'étude géométrique.

b - Dans le dialogue enregistré, il est manifeste que Mathieu ne "lit pas la figure" comme nous venons de l'indiquer. Au contraire, il en fait une lecture qui, pour ainsi dire l'aveugle : il voit A et I se projetant en D et par ailleurs B et J se projetant en C. Il mobilise ici deux fois un geste de lecture présent dans son cours : le projeté d'un point A est matérialisé par une droite passant par ce point et son intersection avec la droite sur laquelle on projette. La lecture adéquate, avec la représentation de projetés simultanés de plusieurs points n'apparaît pas.

Mais l'élément présenté ci-dessus est cependant de faible portée pour "défendre Mathieu" ou pour simplement comprendre ce qui se passe : il y a bien dans la première page du cours, référence à deux droites pour définir une projection, et Mathieu semble ne pas avoir "retenu" qu'une projection est caractérisée par une direction de projection unique.

c - On peut penser qu'un élève comme Mathieu, bon sans être brillant, est sensible contractuellement, à la *viabilité technique* des objets mathématiques présentés. Il va tenter de voir dans le cours, dans le développement des exercices, ce qui est utile dans la leçon pour satisfaire ce qu'on va lui demander. Or, ici, l'objet projection, sa propriété de conservation du milieu servent à faire vivre "la droite des milieux" d'un triangle. Les exercices montrent que c'est là l'essentiel de la leçon. Mathieu sait cependant sa leçon, c'est-à-dire qu'il a aussi appris à réciter ce qui est sensé être appris par coeur (il met en marge un symbole représentant un coeur dans la marge), ce qui permet de comprendre qu'il fasse référence à la projection des milieux.

d - Preuves de la faible viabilité de la configuration et de la propriété "projection des milieux" :

- On ne les trouve pas dans les exercices d'applications relevés par Mathieu.

On pourrait nous objecter que cela n'est pas vrai, car dans l'exercice 1 de son manuel, on peut y voir cette configuration : cependant Mathieu ne manifeste pas dans ce qu'il a écrit réellement la présence de celle-ci. Cet exercice peut apparaître comme délivrant une technique à savoir pour diviser un segment en trois parties égales.

- La propriété est énoncée sans configuration associée.

- Les démonstrations des propriétés 1 et 2 relatives à la droite des milieux n'apparaissent pas : on peut supposer qu'elles ont été réalisées en classe, mettant ainsi en scène les techniques qui auraient été utiles à Mathieu, *mais leur "absence" dans le cahier de cours ne permet pas à Mathieu de les retravailler.*

Ainsi, la configuration et la propriété "projection des milieux" ont pu vivre seulement un instant dans la classe, le temps d'en user pour démontrer les deux propriétés de la droite des milieux.

III. Quelques remarques théoriques

On peut essayer d'examiner quels sont les outils intervenant dans les deux analyses proposées [10].

III.1. Objet emblématique et complexe objectal

Un objet mathématique ne fonctionne pas (ne vit pas) [11] seul : il se co-ordonne avec d'autres pour former une organisation équilibrée (un équilibre écologique) [10]. Ce point de vue est cependant souvent masqué car un complexe d'objets, *un complexe objectal*, ne peut se dire avec toute sa complexité : *pour le désigner on se sert d'objets particuliers qui fonctionnent alors comme des emblèmes.*

Ainsi, dans la première étude, les objets "triangle rectangle" et "théorème de Pythagore" servent d'emblèmes au fonctionnement du complexe objectal mis en oeuvre dans la leçon. C'est ainsi que dans l'analyse de la leçon, nous avons tenté de faire émerger d'autres organisations, non emblématiques, mais présentes, comme la décomposition du premier type. Dans le scénario fictif élaboré, une telle décomposition pourrait servir, avec d'autres, d'objet emblématique.

Ce point de vue amène à ne pas considérer comme objets, les seuls objets mathématiques clairement identifiés par un nom, cela reviendrait à ne voir que les objets emblématiques. On peut alors se demander ce qu'est un objet, dans une telle analyse : on peut dire que c'est une organisation émergente d'un ensemble de pratiques coordonnées. C'est ainsi que dans le cas de Mathieu, le complexe objectal manipulé par celui-ci, n'est pas conforme à ce que l'enseignant attend de lui - il sait énoncer les propositions contenues dans son cours - il sait projeter un point sur une droite selon une direction donnée - il sait lire sur une figure une telle projection avec des traits existants, mais il ne sait pas lire une figure avec une mise en scène de la propriété de conservation des milieux : son rapport à l'objet "projection" n'est pas conforme à ce que l'institution "classe de quatrième" attend de lui : le complexe objectal qu'il mobilise dans la tâche étudiée n'est pas identique à celui que l'institution attend.

La notion de complexe objectal permet de regarder une leçon en essayant d'imaginer plusieurs organisations des objets possibles. Elle ne permet pas, cependant, d'expliquer la dynamique de formation, pour un sujet X donné, d'un tel complexe. Pour introduire une dimension temporelle, nous pouvons nous servir à la fois de la notion de chronogénèse et de celle de topogénèse.

---

[10] Outils empruntés à Y. Chevallard : *La transposition didactique* , éd. La Pensée Sauvage et un cours fait lors d'un séminaire à Marseille.

[11] On veut formuler en termes écologiques la "vie" des objets mathématiques.

III.2. Chronogénèse : une première distinction entre l'enseignant et l'enseigné

"L'enseignant, dit Y. Chevallard [12], est donc celui qui sait *avant* les autres, qui sait déjà, qui sait plus... L'enseignant se distingue tout de même de l'élève, sur l'axe temporel de la relation didactique, en ce qu'il est capable d'anticipation."

Connaissant le futur des complexes objectaux mis en scène dans une leçon, l'enseignant sait les organisations utiles au *futur didactique* de la classe. L'élève, quant à lui, occupe une position différente par rapport au fonctionnement du savoir : *il ne connaît pas le futur des objets qui lui sont présentés.*

Or, on peut supposer que l'élève va bâtir ce futur, anticiper sur les tâches qui seront les siennes en fonction d'indices donnés par l'enseignant.

- Dans la première étude, c'est un bon élève : nous avons fait l'hypothèse que celui-ci était à l'affût d'organisations objectales délivrant des techniques mathématiques nécessitant un travail. C'est ainsi que les techniques de décomposition, leurs traductions numériques et littérales pouvaient être perçues par cet élève comme constitutif de son futur d'élève en mathématique dans la classe. C'est ce que nous avons voulu illustrer avec la séquence fictive présentée.

Notons que le moment où se situe notre étude est important. On peut facilement supposer que la difficulté de cet élève aurait été levée suite à une séance d'exercices sur le théorème de Pythagore ; la configuration de son avenir serait devenu plus réaliste.

- Dans le cas de Mathieu, l'étude est proposée à un moment où cours et exercices d'application se sont déjà développés, mettant en évidence l'importance de l'objet "droite des milieux dans un triangle" pour les tâches à venir. Cours, exercices occultent pour Mathieu, un avenir possible de la conservation du milieu dans une projection, au profit de la droite des milieux dans un triangle.

III.3. Topogénèse : une seconde différence entre professeur et élèves

On vient de voir que l'élève, dans la chronogénèse du savoir, va essayer avec plus ou moins de réussite de construire un futur aux objets mathématiques mis en scène dans une leçon. Or, les positions respectives du professeur et des élèves font que ceux-ci ne vont pas manipuler les complexes objectaux de la même façon. Les positions "synchroniques" du professeur et de l'élève ne sont pas les mêmes : c'est ainsi qu'il appartient à l'enseignant, pour faire vivre un théorème comme celui de Pythagore d'en donner une démonstration. Cela va le contraindre à manipuler des complexes objectaux comme les décompositions du premier et du second type. L'élève, quant à lui, n'a pas à faire la démonstration : on le sait, en quatrième, on attend de lui qu'il use du théorème de

---

[12] in Y. Chevallard (1985). *La transposition didactique*, éd. La Pensée sauvage, p.71 et suivantes.

Pythagore dans diverses situations. Le professeur développe les *raisons* d'une technique, les élèves l'appliquent. Le clivage, cependant, n'est pas si simple car le travail du professeur, plus théorique, est lui aussi de nature technique : une démonstration comporte des manipulations d'énoncés. Il y a aussi des techniques démonstratives qui seraient illustrées théoriquement, par exemple, par la logique mathématique.

- Dans le premier cas étudié, il s'agissait d'un jeune professeur, celui-ci montre aux élèves ce qui relève de sa position relativement aux complexes objectaux mis en scène. Il passe quasiment en silence ce qui, mathématiquement, va relever de la position de l'élève.

On peut ainsi penser, cette erreur de jeunesse le montre en négatif, qu'un professeur chevronné sait montrer, par divers indices, ce qui relève de la position du professeur et de celle de l'élève. Il est à ce propos, d'ailleurs, caractéristique de voir comment le maître de stage du jeune professeur, le titulaire de la classe, reprend celle-ci en main dans la leçon qui suit (Cf. annexe : le prof. titulaire insiste sur l'aspect mathématique spécifique à l'élève).

- Dans le second cas, on peut dire que le professeur pêche au contraire par excès "topogénètique". Il efface du cours des techniques qu'il a dû développer en classe, comme si cela appartenait exclusivement à sa position. Il montre, dans les exercices, en revanche toute une série de techniques démonstratives, difficiles, nécessitant le recours aux théorèmes sur la droite des milieux. Mathieu est en difficulté car les techniques nécessaires à la résolution de l'exercice n'ont pas clairement été distinguées dans son topos mais sont restées dans celui de l'enseignant.

Bibliographie

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique* , Edition La pensée sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Y. (1993). L'observation didactique. *Actes de l'Université d'automne de Fréjus des IUFM du pôle Sud-Est,* Edition IUFM de Lyon

FOUCAULT M. (1963). *Naissance de la clinique,* Edition PUF, Paris

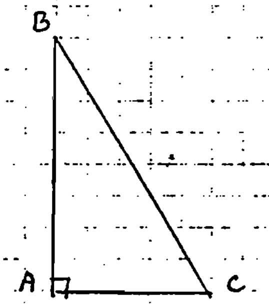
MARTZLOFF J-C. (1990). Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Edition IREM de Besançon et IREM de Lyon

ANNEXE

Reprise par le professeur titulaire de la classe de la leçon sur le théorème de Pythagore

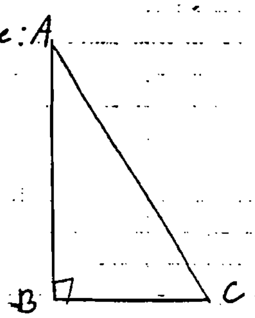
Propriété : Théorème de Pythagore : Si ABC est un triangle rectangle en A, alors, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$



Attention : Si ABC n'est plus rectangle en A, mais en B, la propriété s'écrit d'une autre manière :

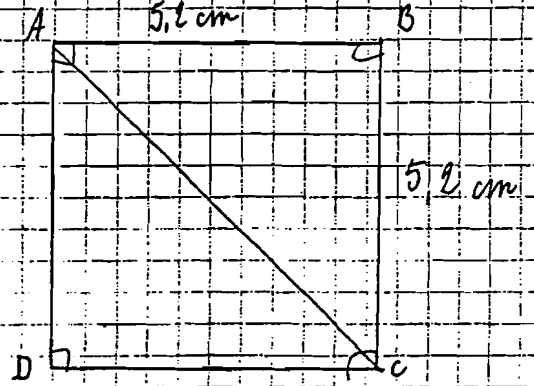
$$\boxed{AC^2 = BC^2 + BA^2}$$



Conclusion : il vaut mieux retenir le théorème de Pythagore sous la forme :

le carré de l'hypothènuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple1 calcule la diagonale d'un carré de 5,2 cm de côté.



Données : $AB = 5,2$

$AC = 5,2$

ABC triangle rectangle en A

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC, on a

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 5,2^2 + 5,2^2$

$= 27,04 + 27,04$

$= 54,08$

$AC = \sqrt{54,08}$

$= 7,35$ par défaut.

Exemple 2 : Calcul de la hauteur avec l'aire

ABC rectangle en A [HA] hauteur.

$AB = 7,5$ cm et $AC = 10$ cm