# PSYCHOLOGIE DU DEVELOPPEMENT COGNITIF ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES :

## un exemple : les structures additives*

*Gérard VERGNAUD,*
*C.N.R.S.*

*Le problème le plus difficile pour une recherche interdisciplinaire comme la recherche en didactique est de développer des concepts et des méthodes susceptibles de constituer une approche scientifique. Les psychologues tendant à transporter purement et simplement leur cadre de référence habituel, qu'il s'agisse de l'apprentissage associatif pour les empiristes, des structures logiques pour les piagetiens, du traitement de l'information pour les cognitivistes influencés par les modèles informatiques, de la psycholinguistique pour d'autres. De leur côté les mathématiciens et les professeurs de mathématiques tendent à se satisfaire du type de connaissances mathématiques qui leur est familier et de quelques théories éducatives générales.*

C'est actuellement un enjeu scientifique de très grande importance que d'étudier les processus de transmission et d'appropriation des connaissances mathématiques comme un domaine scientifique propre, qui n'est réductible ni à la psychologie, ni aux mathématiques, ni à aucune autre science. Cela ne signifie pas pour autant que la didactique des mathématiques soit indépendante des idées venant des autres sciences bien au contraire ; mais elle a une identité propre qu'il faut essayer de caractériser. Cette identité tient principalement à la spécificité des contenus de connaissance dont elle étudie la transmission et l'appropriation, à l'originalité des phénomènes d'enseignement en classe, et à la nécessité dans laquelle elle se trouve d'étudier des processus qui se situent à des échelles de temps très différentes : la croissance des connaissances à long terme chez l'enfant et l'adolescent, et l'évolution à court terme des conceptions et des procédures de l'élève face à des situations nouvelles et aux explications qui lui sont données. J'aborderai successivement les quatre points suivants :

1 – Une conception interactive de la formation des connaissances.

2 – Une approche développementale.

3 – Les concepts de théorème-en-acte et de champ conceptuel.

4 – La représentation et les rapports entre signifiés et signifiants.

---

***** *Cet article reprend la plupart des thèmes et des exemples développés dans un article antérieur en anglais "Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education : some theoretical and methodological issues" For the learning of Mathematics, 3, 2, 1982, 31-41.*

## 1 – CONCEPTION INTERACTIVE DE LA FORMATION DES CONNAISSANCES

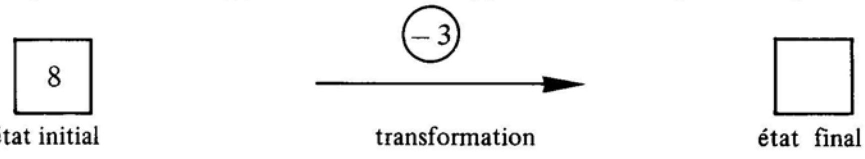
Dans ses aspects pratiques d'abord, mais aussi dans ses aspects théoriques, le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser. On le constate dans l'histoire des sciences et des techniques, également dans le développement des instruments cognitifs du jeune enfant, notamment dans la maîtrise de l'espace et dans la compréhension et la catégorisation des objets usuels. Cela devrait être vrai également dans l'enseignement de mathématiques ; mais ce n'est guère le cas. La tendance la plus courante est d'enseigner des "manières de faire" ou des algorithmes en rapportant ces procédures à des classes relativement étroites de problèmes. Par "problème" il faut entendre, dans le sens large que lui donne le psychologue,toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution : cette procédure n'est pas nécessairement la plus générale ou la plus économique ; elle peut même être fausse, elle n'en est pas moins une procédure, qu'il faut étudier au même titre que les autres.

En prenant "problème" dans ce sens général, c'est un "problème" pour l'enfant que de comparer les effectifs de deux collections ou le contenu de deux récipients, que de sérier une suite d'objets en fonction de leur taille ou de leur poids, ou que de reconnaître la gauche et la droite d'un personnage qui se situe vis-à-vis de lui ; c'est évidemment un "problème" que d'organiser des données numériques pour savoir lesquelles il faut utiliser et dans quel ordre il faut les traiter ; mais c'est aussi un "problème" pour les enfants que de calculer l'effectif d'un ensemble composé de deux parties sans avoir à recompter chacune des deux parties (si l'on a déjà compté chacune d'elle).

C'est un objectif prioritaire, dans la recherche en didactique, que de rechercher, analyser et classer, aussi exhaustivement que possible, les situations-problèmes qui donnent sa signification et sa fonction à un concept. Cela permet en premier lieu de faire appel dans l'enseignement à une plus grande variété de relations et de problèmes ; en second lieu d'approfondir l'épistémologie d'un concept, c'est-à-dire principalement sa fonction (à quels problèmes il répond) et son assise (sur quels autres concepts il s'appuie). Les conceptions des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées. Cela peut entraîner de graves écarts entre ces conceptions et les concepts mathématiques : par exemple si un élève de 4ème ne comprend le concept de fraction que comme une quantité fractionnaire, dans un rapport partie-tout (part de gâteau, part d'une collection) il ne peut pas apercevoir la richesse et la puissance des nombres rationnels. De même pour les nombres négatifs, s'il considère que les nombres représentent des quantités : comme il n'y a pas de quantité négative, les nombres négatifs n'ont guère de sens.

**Prenons l'exemple de la soustraction.**

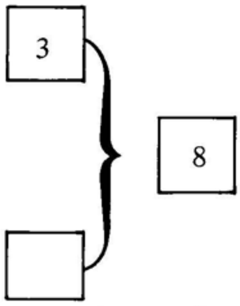
La première conception de la soustraction, pour un jeune enfant, consiste dans la diminution d'une quantité initiale, par consommation, perte ou vente par exemple.




**Exemple 1** : Jean avait 8 bonbons ; il en mange 3. Combien de bonbons a-t-il maintenant ?

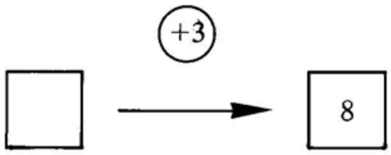
A partir d'une telle conception, ce n'est pas immédiat de comprendre la soustraction :

– comme un complément



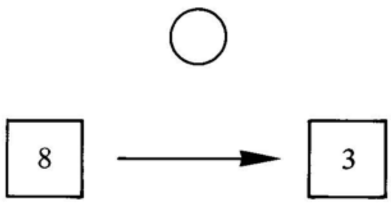

**Exemple 2** : Il y a 8 enfants à table pour l'anniversaire de Dorothée. 3 sont des filles. Combien de garçons y-a-t-il ?

– comme l'inverse d'une augmentation



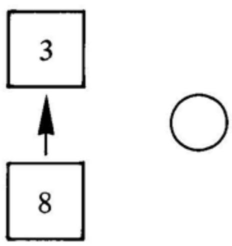

**Exemple 3** : Janine vient de recevoir 3 francs de sa grand'mère. Elle a maintenant 8 francs. Combien avait-elle avant ?

– comme une différence entre états successifs



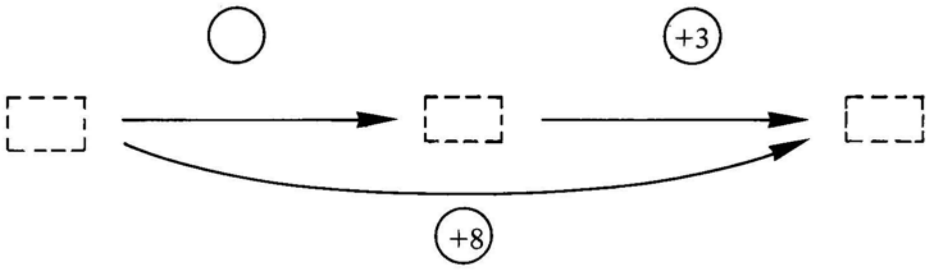

**Exemple 4** : Robert avait 8 billes avant de jouer avec Isabelle. Il a maintenant 3 billes. Que s'est-il passé pendant la partie ?

– comme une relation de comparaison



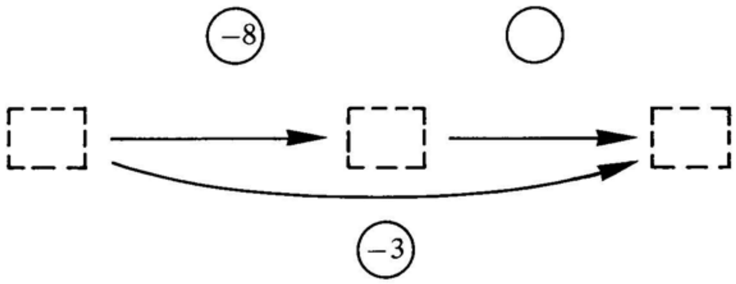
**Exemple 5** : Suzanne a 3 francs en poche. Berthyl en a 8. Combien Suzanne a-t-elle de moins que Berthyl ?

– comme une différence entre transformations

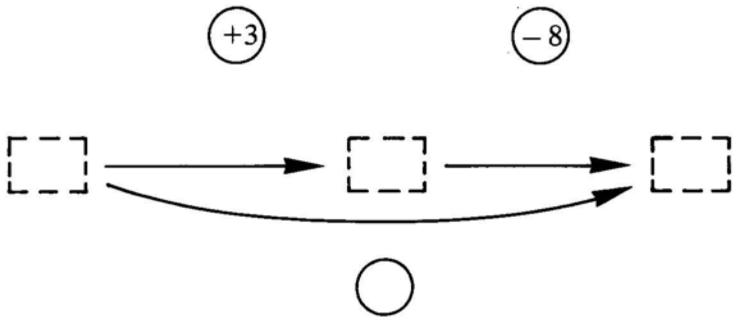



**Exemple 6** : Frédéric a joué deux parties de billes. A la seconde il a gagné 3 billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. Mais quand il compte ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il a gagné 8 billes en tout. Que s'est-il passé à la première partie ?

– d'autres catégories de problèmes pourraient être proposées par exemple :




trouver la seconde transformation

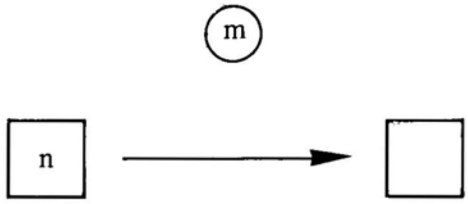



trouver la transformation "totale"

On peut imaginer aisément les difficultés que les enfants peuvent rencontrer dans l'extension de la signification de la soustraction à ces différents cas, à partir de leur conception primitive de la soustraction comme "diminution". Chacun des cas évoqués plus haut suppose un calcul relationnel (calcul sur des relations) distinct ; et pourtant tous ces calculs relationnels aboutissent au choix de la même opération arithmétique 8 – 3.

Les chercheurs commencent à connaître assez bien les moyens par lesquels les enfants abordent ces différents problèmes (Carpenter, Moser, Romberg 1981) et les étapes par lesquelles ils passent, au fil des longues années de l'enseignement élémentaire . . . et de l'enseignement secondaire. La plupart des enfants rencontrent des difficultés, pour l'addition et la soustraction de transformations ou de relations, jusqu'à la fin du cycle des collèges et au-delà.

On observe des conflits importants et durables entre les conceptions des enfants et les concepts du professeur de mathématiques. Par exemple les conceptions des enfants, pour un très grand nombre de problèmes, sont mieux représentées par un modèle d'opération unaire que par le modèle de la loi de composition binaire. En effet, l'addition peut souvent être envisagée sur le modèle d'une opération externe de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ (si l'on raisonne sur des entiers)

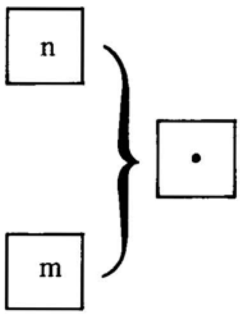



$n \in \mathbb{N}$

$m \in \mathbb{Z}$ m peut être positif ou négatif

par exemple $n = 6$ $m = +4$

plutôt que sur celui de la loi interne dans $\mathbb{N}$, qui ne reflète bien que la composition de deux quantités




$n, m \in \mathbb{N}$

par exemple $n = 6$ $m = 4$

Les transformations dans le temps et les relations de comparaison ne peuvent être adéquatement représentées par une composition de deux quantités (loi binaire interne) car elles mettent en jeu des nombres relatifs.

En outre le modèle de l'opération unaire est plus proche de la conception primitive des enfants (partir d'un état initial, agir). Nous verrons d'autres conséquences de ce décalage entre conceptions du sujet et concepts mathématiques quand nous aborderons les représentations symboliques.

Les enseignants ne sauraient ignorer le fait que les conceptions des élèves sont façonnées par les situations de la vie ordinaire et par leur "première compréhension" des relations nouvelles qu'ils rencontrent. Ils doivent savoir à quoi s'en tenir et mieux connaître ou reconnaître les conceptions les plus primitives, les erreurs et les incompréhensions qui s'en suivent, la manière dont elles changent ou peuvent changer : à travers quelles situations ? quelles explications ? quelles étapes ?

Les problèmes d'enseignement des mathématiques ne se résolvent pas par des définitions, et les conceptions erronnées des élèves ne peuvent changer vraiment que si elles entrent en conflit avec des situations qu'elles ne permettent pas de traiter. Il est essentiel que les maîtres puissent envisager et maîtriser l'ensemble des situations susceptibles d'amener et d'aider les élèves à "accommoder" leurs vues et leurs procédures à des relations nouvelles (l'inversion, la composition et la décomposition de transformations par exemple) ou à des données nouvelles (grands nombres, décimaux, fractions . . .). C'est le seul moyen d'amener les élèves à analyser les choses avec plus de profondeur et à réviser ou élargir leurs conceptions.

**La résolution du problème est la source et le critère du savoir opératoire.** Nous devons toujours conserver cette idée en tête et être capables d'offrir aux élèves des situations visant à étendre la signification d'un concept et à éprouver les compétences et les conceptions des élèves. C'est l'essentiel pour une théorie des situations didactiques comme pour une théorie de la connaissance opératoire. Cette déclaration peut sembler excessivement tournée vers les apprentissages pratiques, mais il n'en est rien : conceptions et compétences sont deux faces d'une même pièce de monnaie ; les compétences sont toujours reliées à certaines conceptions, même si celles-ci sont faibles et fragmentaires. Il n'y a pas de procédure qui puisse se développer et survivre par elle-même, libre de toute représentation des relations qu'elle traite ou qu'elle implique. Réciproquement un concept ou un théorème qui ne peuvent pas être utilisés dans des situations-problèmes pour lesquelles ils sont pertinents demeurent vides de sens

Cela dit, il n'existe pas que des problèmes pratiques. Il existe aussi des problèmes théoriques comme par exemple l'extension de la multiplication aux nombres relatifs : la multiplication de deux nombres négatifs ne peut guère être référée à un problème pratique véritablement significatif de la multiplication sauf bien sûr à considérer l'usage du calcul algébrique comme un problème pratique. Disons plutôt que la cohérence des calculs, problème éminemment théorique, apparaît aussi comme un problème pratique. Cette dialectique n'est pas un simple effet rhétorique : pratique et théorie sont en dernière analyse indissolublement liées.

## 2 – UNE APPROCHE DEVELOPPEMENTALE

**Les conceptions et les compétences se développent sur une longue période de temps.** Ceci n'est pas vrai seulement pour les structures générales de la pensée, mais aussi pour les contenus de connaissances. Par exemple, les concepts de fraction et de rapport prennent leurs racines dans des activités qui ont du sens pour des élèves de 7 à 8 ans, lorsqu'il s'agit de valeurs simples comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ ; et cependant le concept du nombre rationnel est une source durable de difficulté pour les élèves de 15 à 16 ans et pour beaucoup d'adultes. En ce qui concerne les structures additives, bien que certains principes de l'addition et de la soustraction soient compris par les élèves de 3 à 4 ans, 75% des élèves de 15 ans échouent à des problèmes comme les suivants (Marthe, 1982):

**Exemple 7** : Jean a reçu 45 francs de sa grand'mère. Ensuite il va dans un grand magasin et achète différentes choses. Quand il compte son argent, il trouve qu'il a 37 francs de moins que ce qu'il avait avant de recevoir de l'argent de sa grand'mère. Combien a-t-il dépensé ?

**Exemple 8** : Mr Dupont est voyageur de commerce. Il commence par descendre le long de la loire 35 km. vers l'ouest ; puis il repart vers l'est. Lorsqu'il s'arrête, il se trouve à 47 km. à l'est de son point de départ, le matin. Quelle est la distance parcourue lors de la deuxième partie de son trajet ?

Pourtant les mêmes élèves de 15 ans ont reçu un enseignement sur les relations de Chasles en géométrie qui sont directement pertinentes pour l'exemple 8.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Longrightarrow \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = \text{abs}(B) - \text{abs}(A)$$

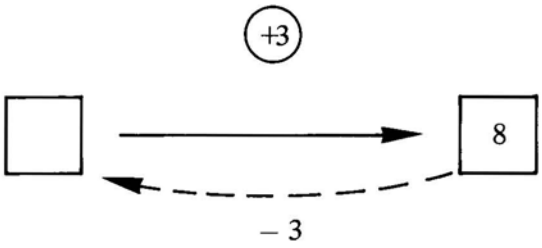
ainsi qu'un enseignement d'algèbre qui devrait leur permettre de résoudre n'importe quelle équation de la forme :

$$a + x = b \quad \Longrightarrow \quad x = b - a$$

C'est compter sans la difficulté qu'il y a à concevoir pleinement les transformations et les relations qui sont impliquées dans les exemples 7 et 8.

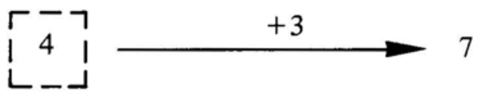
La description de stages généraux de développement, comme ceux décrits par Piaget ou par d'autres psychologues du développement ne permet pas de comprendre le développement des "compétences-connaissances" impliquées dans les problèmes de soustraction ou d'addition cités plus haut. Il faut des modèles beaucoup plus fins, directement associés au contenu mathématique des problèmes.

La première priorité est donc de reconnaître la variété des classes de problèmes possibles, d'analyser avec soin leur structure et les opérations de pensée nécessaires pour les traiter. Par exemple, ce n'est pas la même opération de pensée que d'inverser une transformation directe (exemple 3), de trouver un complément (exemple 2), ou de rechercher une différence (exemple 5). Ce n'est pas non plus la même opération, dans l'exemple 3, que d'inverser la transformation

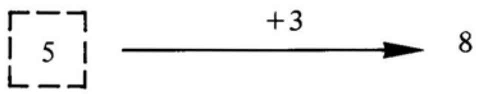



$8 - 3 = 5$

ou de faire une hypothèse sur l'état initial, puis de le corriger après essai.




$4 + 3 = 7$
ça ne marche pas




$5 + 3 = 8$
ça marche

A l'évidence, ces deux "raisonnements" n'ont pas la même puissance ; la seconde n'a guère qu'une valeur locale, et dépend beaucoup des valeurs numériques prises par les variables. Les petits nombres entiers, certains nombres ronds (300-800) permettent de résoudre certains problèmes, par des procédures non canoniques. Un moyen possible d'amener les élèves à rechercher et maîtriser des procédures plus puissantes et des conceptions plus générales est justement de changer les valeurs numériques, et d'utiliser par exemple des grands nombres ou des nombres démaux (Brousseau, 1981).

Evidemment, ceci n'est pas indépendant du développement cognitif des élèves ; et la description de la complexité relative des problèmes et des procédures repose largement sur une approche développementale (ou psychogénétique) de l'apprentissage des mathématiques. Il faut remarquer en même temps que cette description, pour avoir du sens, ne doit pas considérer un ensemble trop limité de problèmes, ni une période trop brève du développement des enfants ou de la scolarité. On peut trouver en effet des décalages de plusieurs années entre enfants pour la même compétence, et les conduites observées pour un problème ne prennent leur sens que si on peut les rapporter aux conduites observées dans d'autres problèmes (de même catégorie ou de catégorie différente).

Il existe de fortes corrélations, de fortes hiérarchies et aussi de nombreuses substitutions métaphoriques dans le traitement des problèmes numériques. C'est cette considération qui m'a conduit à la conviction qu'il est nécessaire, pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des **champs conceptuels**. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens.

Avant d'expliquer sur l'exemple des structures additives ce que j'entends par "champ conceptuel" et par "théorème en acte", je voudrais conclure brièvement ce paragraphe sur le développement.

La lenteur du développement des connaissances est dangereusement mésestimée par les enseignants, les parents et les programmes. Par exemple, on considère trop souvent qu'un chapitre de mathématiques qui a été étudié doit être compris, au moins par une proportion importante des élèves, et qu'on peut donc le considérer comme acquis l'année suivante. Toutes les recherches empiriques montrent au contraire qu'il serait beaucoup plus sage de revenir sur les mêmes choses année par année, en allant un peu plus en profondeur à chaque fois et en introduisant des situations de plus en plus complexes, contenant de nouveaux aspects, plus puissants, d'un même concept ou d'un même ensemble de concepts, éventuellement d'un concept nouveau. Les activités de résolution de problème ou de traitement de situations nouvelles devraient être largement privilégiées, tant il est vrai que différentes catégories de problèmes existent, et appellent la maîtrise de propriétés différentes d'un même concept. C'est un aspect essentiel pour une approche développementale.

## 3 – LES CONCEPTS DE THEOREME-EN-ACTE ET DE CHAMP CONCEPTUEL

Il est assez largement reconnu dans l'éducation que l'activité des élèves soit être favorisée parce qu'elle est le seul moyen de leur permettre de construire ou de s'approprier un savoir opératoire. Mais on en reconnaît pas pour autant en quoi cette action en situation favorise la formation de concept. A ce point, il nous faut clarifier un problème théorique essentiel.

Les mathématiciens et les enseignants savent en général ce qu'est un invariant : une propriété ou une relation qui est conservée sur un certain ensemble de transformations. Par exemple en géométrie, la rotation et la symétrie conservent certaines propriétés des figures, l'homothétie ne conserve pas les mêmes propriétés, la projection non plus. Mais les mathématiciens et les enseignants n'ont pas toujours bien reconnu le fait bien établi par la psychologie cognitive développementale (et par Piaget en premier lieu), qu'il existe de nombreux invariants dont l'identification par les enfants donne lieu à une laborieuse et progressive construction, alors même que l'adulte n'imagine même pas que cela puisse faire problème.

Piaget identifie le premier quelques-uns de ces invariants et notamment des invariants quantitatifs (Piaget, 1941, 1978) :

– le cardinal d'une collection quand on en change la disposition spatiale ;

– la quantité de jus d'orange quand on le transfère d'un verre large dans un verre étroit ;

– etc . . .

N'est-il pas évident, pour le jeune enfant, qu'il y a plus de jus d'orange quand ça monte plus haut (dans le verre étroit) ?

Les invariants constituent un thème théorique récurrant dans l'œuvre de Piaget, et pourtant Piaget n'a pas pleinement reconnu l'importance des invariants les plus nombreux en mathématiques et en physique : les invariants relationnels. Par "invariant relationnel", je désigne une relation qui reste invariante pour un ensemble de transformations d'opérations ou de variations.

Prenons un exemple dans les relations de parenté : il n'est pas facile pour un jeune garçon de comprendre l'idée que la relation "fils de " est vraie à la fois pour lui et son père, pour lui et sa mère, son ami Mathieu et les parents de Mathieu, et même son propre père et ses grand' parents : comment son père peut-il être à la fois père et fils ?

Des problèmes semblables sont soulevés par les relations spatiales (derrière, à l'ouest de . . .), les relations d'ordre entre grandeurs et entre nombres (plus grand que, multiple de, n de plus que . . .) et par d'autres relations.

A côté de ces relations binaires les enfants rencontrent, y compris à des âges précoces, des relations de plus haut niveau logique qu'on appelle normalement des théorèmes : par exemple si Pierre est né avant Janine et Janine avant Robert, Pierre est né avant Robert ; si Joël et André sont face à face, le bras droit de Joël est en face du bras gauche d'André ; si on compte une collection A puis une collection B on obtient le même résultat que si on compte la collection B puis la collection A.

L'enfant rencontre un grand nombre de tels théorèmes lorsqu'il agit sur le réel et qu'il résoud des problèmes dans l'espace, dans le temps, dans le domaine des quantités et des grandeurs. Ces **théorèmes-en-acte** ne sont évidemment pas exprimés sous une forme mathématique, ni même parfois sous une autre forme. C'est la raison pour laquelle je les appelle "théorèmes-en-acte". Ils n'ont souvent qu'une validité locale pour les enfants, et sont associés à certaines valeurs des variables, mais c'est là une première base qui pourra être élargie par la suite.

Le but essentiel d'une analyse cognitive des tâches et des conduites est d'identifier de tels théorèmes-en-acte, même si cela n'est pas facile et s'il n'est pas facile d'arriver à un accord sur les critères comportementaux de ces théorèmes.

Prenons l'exemple du troisième axiome de la théorie de la mesure.

$$\forall\ (x, y) \qquad m\,(x * y) = m\,(x) + m\,(y)$$

pourvu que l'opération $*$ soit adéquatement choisie.

Dans le cas des quantités discrètes et des cardinaux, cet axiome devient

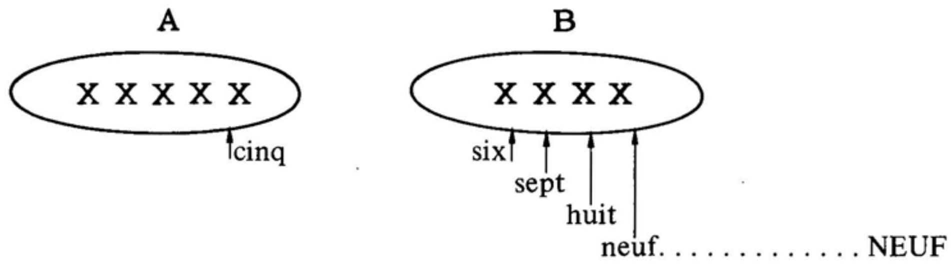
$$\forall\ (X, Y) \qquad \text{card}\ (X \cup Y) = \text{card}\ (X) + \text{card}\ (Y)$$

pourvu que l'opération d'union soit l'union disjointe ($X \cap Y = \phi$).

Un tel axiome est nécessairement utilisé par un enfant lorsque, pour mettre la table, il compte les personnes qui sont dans le salon, les personnes qui sont dans le jardin, puis fait la somme des deux nombres pour savoir combien il y a de personnes en tout. C'est une procédure plus économique (et socialement plus acceptable) que de rassembler tout le monde dans le jardin pour compter l'ensemble.

De nombreux travaux ont été faits sur les premiers apprentissage de l'addition. Ils montrent l'émergence progressive d'un tel théorème-en-acte.

La procédure qui consiste à ne pas recompter le tout quand on a déjà compté les parties, mais à "compter en avant" (counting on) en partant du cardinal du premier ensemble et en comptant autant de fois qu'il y a d'éléments dans le second ensemble.




constitue une étape cruciale dans la reconnaissance par l'enfant de la propriété des mesures énoncée plus haut.

Cette procédure implique d'ailleurs un autre théorème important :

$$\forall\ (m, n) \qquad \underbrace{m \xrightarrow{+1}\ \xrightarrow{+1} \cdots \xrightarrow{+1}}_{n \text{ fois}} \quad m+n$$

Cette procédure de "comptage en avant" est une étape intermédiaire décisive entre la procédure qui consiste à recompter le tout, et la procédure qui consiste à additionner m et n. Pour plus de détails on peut se reporter à (Fuson, 1981).

Il y a ainsi plusieurs autres axiomes et théorèmes impliqués dans la construction du concept de nombre naturel comme mesure des quantités discrètes. Certains d'entre eux sont saisis et appropriés dès l'âge de 3 ou 4 ans, d'autres seulement à 6 ou 7 ans ; certains sont encore difficiles pour les enfants de 9 ans.

. $2 \xrightarrow{+1} 3$ | quels que soient les objets comptés

. $3 \xrightarrow{+1} 4$ |

. $2 \xrightarrow{+2}$ est équivalent à $2 \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$

. $2 \xrightarrow{+3}$ est équivalent à $2 \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$

. $n \xrightarrow{+2}$ est équivalent à $n \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$

. $m \xrightarrow{+n}$ est équivalent à $m \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1}$ (n fois)

. $2 \xrightarrow{+5}$ est équivalent à $5 \xrightarrow{+2}$

. le nombre d'éléments d'une collection ne dépend pas de sa disposition spatiale (conservation)

. card (A $\cup$ B) = card (A) + card (B) (voir-ci-dessus)

. A $\subset$ Y $\Longrightarrow$ card (A) $<$ card (B) (inclusion)

Beaucoup d'autres théorèmes peuvent être identifiés, qui sont nécessaires pour résoudre les problèmes d'addition ou de soustraction comme ceux des exemples 1 à 8 plus haut. Il serait fastidieux de les énumérer mais ils sont d'une grande diversité.

Le paysage des structures additives est beaucoup plus complexe qu'on ne s'y attend après un premier coup d'œil. Il en va de même pour les structures multiplicatives (Vergnaud, 1983).

Cela résulte à la fois de la diversité des situations d'addition et de soustraction, de la diversité des procédures de traitement et, nous le verrons plus loin, de la diversité des représentations symboliques. Cela résulte aussi de la très progressive et très lente compréhension par les enfants des propriétés des relations en jeu.

C'est cette diversité qui m'a conduit à parler de **champ-conceptuel.** Un concept peut en effet être défini comme un triplet de trois ensembles (S, I, $\varphi$) :

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept ;

I : l'ensemble des invariants qui constituent les différentes propriétés du concept ;

$\varphi$ : l'ensemble des représentations symboliques qui peuvent être utilisées.

J'aborderai plus loin le problème des représentations symboliques. Je me bornerai ici à trois considérations essentielles pour la compréhension de ce qu'est un champ conceptuel et des raisons pour lesquelles il est nécessaire d'étudier de tels champs et non pas des concepts isolés.

– Une situation donnée ne met pas en œuvre en général toutes les propriétés d'un concept. Si l'on veut rencontrer aux élèves toutes ces propriétés ; il faut nécessairement faire référence à une diversité de classes de problèmes.

– Une situation donnée ne met pas habituellement en jeu un seul concept ; son analyse requiert le plus souvent plusieurs concepts, et les difficultés rencontrées par les élèves relèvent en général de plusieurs concepts. Par exemple, les problèmes d'addition et de soustraction peuvent impliquer les concepts de mesure, de transformation, de comparaison, de différence, d'inversion, d'opération unaire, d'opération binaire, de nombre naturel, de nombre relatif, de fonction, d'abscisse et d'autres encore.

– La formation d'un concept, en particulier si on le considère à travers les activités de résolution de problème, couvre en général une très longue période de temps ; avec beaucoup d'interactions et beaucoup de décalages. On ne peut pas comprendre la signification des erreurs ou des procédures d'un enfant de 13 ans si on ne connaît pas la manière dont se sont formées ses conceptions et ses compétences à l'âge de 8 ou 9 ans, ou même à 4 ou 5 ans, et la manière dont ces conceptions et compétences ont évolué à travers un mélange de situations, de définitions, d'interprétations et de représentations symboliques.

C'est un fait que les élèves essayent de donner du sens aux situations nouvelles et aux concepts nouveaux en appliquant leurs connaissances antérieures et en les adaptant. Comment pourraient-ils faire autrement ?

La conséquence principale de ces trois points est que les psychologues et les didacticiens ne doivent pas prendre pour objets d'étude des objets trop petits, mais au contraire des champs conceptuels assez larges. Faute de cela, le risque majeur est de ne pas pouvoir comprendre le processus complexe et laborieux par lequel les enfants et les adolescents maîtrisent (ou ne maîtrisent pas) les mathématiques.

**Un champ conceptuel** peut être défini comme **un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion.**

Cette définition ne se veut pas rigoureuse ; elle renvoie à un ensemble de situations plutôt qu'à un ensemble de concepts. La description d'un champ conceptuel requiert à la fois l'analyse des situations (ou des problèmes), l'analyse des procédures de traitement utilisées par les élèves, les propos qu'ils tiennent et leurs argumentations, les représentations symboliques qu'ils utilisent. L'usage d'une représentation symbolique peut être une aide efficace, voire cruciale ; elle peut aussi donner lieu à de graves erreurs d'interprétations.

Mais avant d'aborder la question des représentations symboliques, il me faut faire encore deux remarques.

– Le développement des connaissances pratiques et théoriques d'un enfant se fait à travers des champs conceptuels divers : certains sont d'ordre mathématique (les structures additives, les structures multiplicatives, l'espace . . .), d'autres sont d'ordre physique (le dynamique, l'électricité. . .) ou économique (les achats et les prix, les gains et les pertes . . .), d'autres sont d'ordre logique (classifications, logique des propositions et opérations booléennes . . .).

Ces champs conceptuels ne sont pas indépendants mais interagissent entre eux.

– Les théorèmes-en-acte évoqués plus haut concernent une grande variété de contenus et permettent d'évaluer et d'analyser, de manière rigoureuse, les connaissances de l'enfant : lesquelles sont opératoires et lesquelles ne le sont pas ? Il faut souligner en effet que certaines connaissances apprises et prétendument connues des élèves peuvent ne pas être utilisables par l'enfant : des théorèmes qui ne sont pas des théorèmes-en-acte. A l'inverse il existe des connaissances opératoires construites spontanément par l'enfant qui ne prennent nullement la forme d'énoncés vrais : des théorèmes-en-acte qui ne sont pas des théorèmes.

L'un des problèmes de l'enseignement et de la didactique est de favoriser la transformation des théorèmes en théorèmes-en-acte, et réciproquement.

## 4 – LA REPRESENTATION ET LES RAPPORTS ENTRE SIGNIFIES ET SIGNIFIANTS.

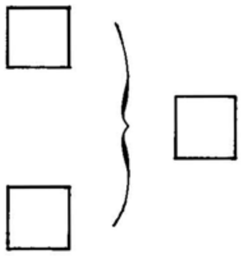
Rappelons dans un premier temps les principales catégories de relations impliquées dans les structures additives.

Les schémas utilisés dans le tableau I font appel à des symboles différents pour la représentation des compositions binaires, des transformations et des comparaisons ; de même pour la représentation des nombres naturels (mesures) et des nombres relatifs (transformations, comparaisons, dettes ou créances, abscisses . . .).

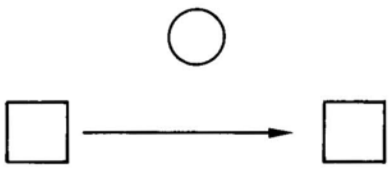
Tableau I : voir page suivante

**TABLEAU I**

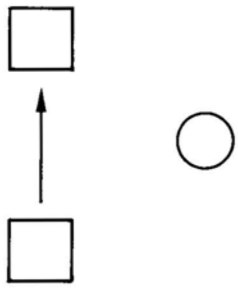
**PRINCIPALES RELATIONS ADDITIVES**



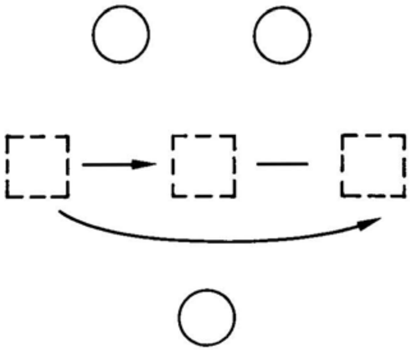
I – Composition de mesures



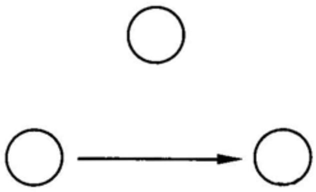
II – Transformation d'une mesure



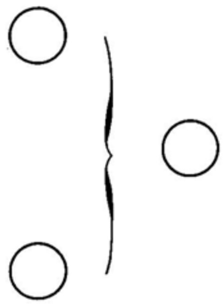
III – Comparaison de mesures



IV – Composition
de transformations



V – Transformation
d'une relation



VI – Composition
de relations

<u>LEGENDE</u>

mesure : nombre sans signe

transformation ou relation : nombre avec signe

composition d'états { états-mesures / états-relatifs

transformation (changement d'état)

relation (entre états)

Les exemples 1 à 8 proposés au cours de cet article ne renvoient à aucune relation de type V ou de type VI. Nous n'avons donc abordé ici qu'une partie des structures additives. Le tableau I fait apparaître une grande variété de problèmes, surtout si l'on considère que, pour chaque relation, il existe plusieurs classes de problèmes.

Prenons la relation II : elle donne lieu à six classes de problèmes selon qu'on cherche l'état final, la transformation et l'état initial, et selon que la transformation est positive ou négative. Quatre de ces problèmes appellent une soustraction, les deux autres une addition. Pour la relation IV, le nombre de classes de problèmes est beaucoup plus grand car le signe des transformations intervient pour chacune d'entre elles, ainsi que la valeur absolue (pour plus de détails voir Vergnaud, 1981).

Le choix de schémas facilite la communication , car ces schémas permettent de distinguer des cas que les élèves, justement, considèrent comme distincts. Une représentation algébrique fait perdre beaucoup d'information parce qu'elle identifie sous le même signe ( +, –, =) des concepts élémentaires relativement différents les uns des autres.

Enumérons quelques-unes des identifications par lesquelles l'algèbre gagne sa puissance, et confond du même coup des objets qui, très souvent, demeurent différents pour les élèves :

– identification des nombres naturels aux entiers positifs (même chose pour les décimaux ou les réels).

– identification à la même opération d'addition (représentée par le signe + ) de la somme de deux mesures, de l'application d'une transformation positive, de la composition de deux transformations, de l'inversion d'une transformation négative, etc . . .

– identification à la même opération de soustraction (représentée par le signe –) de l'application d'une transformation négative, de la différence entre mesures, entre états, entre transformations, de l'inversion d'une transformation positive, etc . . .

– identification de différentes significations du signe d'égalité : est le même que, donne comme résultat, est équivalent à.

Tout ceci est parfaitement légitime et nécessaire, mais sous quelles conditions, avec quelles explications, et à quel niveau scolaire ?

La relation II est caractérisée par un aspect dynamique (transformation dans le temps), la présence d'une opération unaire positive ou négative, la présence d'une relation partie-tout entre états. Ce sont deux situations relevant de la relation II qui sont à la source des conceptions primitives de l'enfant : l'addition, c'est une quantité qui s'accroît, et la soustraction, c'est une quantité qui décroît (Starkey et Gelman, 1981). On peut donc s'attendre à des difficultés lorsque les enfants vont devoir étendre à d'autres classes de problèmes et à d'autres relations leurs conceptions de l'addition et de la soustraction. Par exemple les relations I et III ne comportent pas d'aspect temporel. La relation III ne comporte pas de rapport partie-tout.

Ces considérations ont des rapports étroits avec le problème des représentations symboliques.

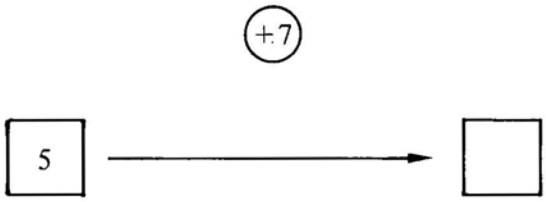
Prenons encore trois exemples de problèmes :

**Exemple 9** : Pierre a 5 billes. Il joue une partie avec des amis et gagne 7 billes. Combien de billes a-t-il maintenant ?

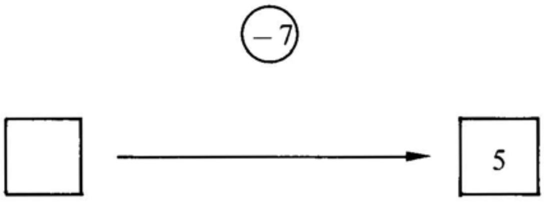
**Exemple 10** : Robert vient juste de perdre 7 billes. Il a maintenant 5 billes. Combien de billes avait-il avant de jouer ?

**Exemple 11** : Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

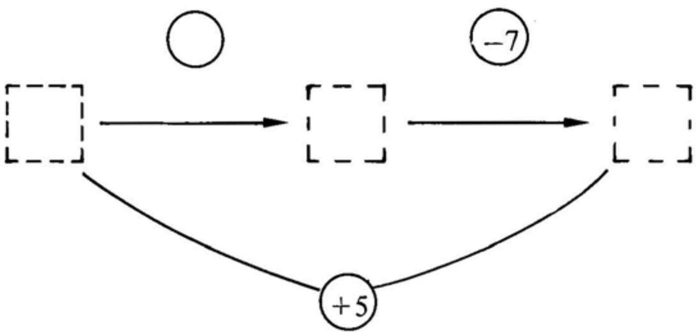
Il est intéressant de savoir que le problème "Robert" est réussi 1 à 2 ans plus tard que le problème "Pierre" et que le problème "Thierry" donne lieu à 75 % d'échecs en sixième. Ceci peut s'expliquer par le fait que le problème Pierre consiste à rechercher un état final:




tandis que le problème Robert consiste à rechercher un état initial,




et que le problème Thierry consiste à rechercher une transformation, dans le cas le plus complexe de la composition de deux transformations successives.



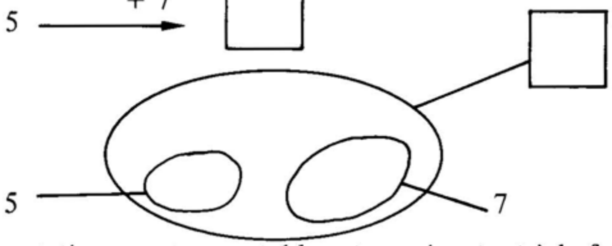

Représenter ces trois problèmes par des équations et par des diagrammes ensemblistes soulève des difficultés très inégales.

Par exemple on peut représenter le problème "Pierre" ainsi :

équation $\qquad 5 + 7 = \square$

schéma $\qquad 5 \xrightarrow{+7} \square$

diagramme ensembliste




Ces trois représentations sont acceptables et représentent à la fois le problème et la procédure de résolution.

Il n'en va pas de même pour le problème "Robert":

représentation du problème

$\square - 7 = 5$

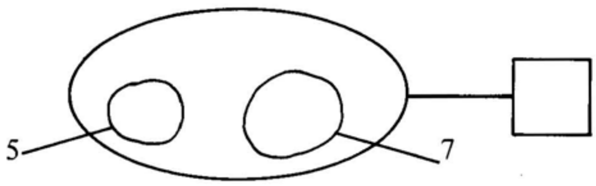
$\square \xrightarrow{-7} 5$

RIEN

représentation de la solution

$5 + 7 = \square$

$5 \xrightarrow{+7} \square$

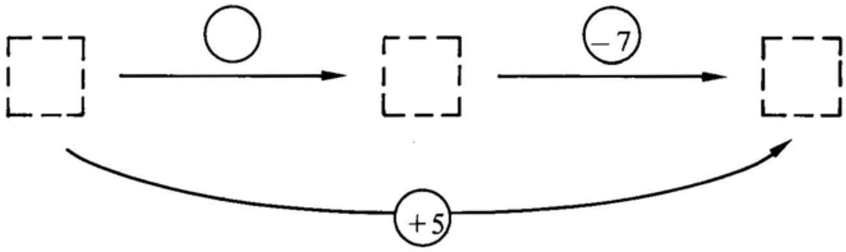



On voit que la représentation du problème "Robert" et celle de la procédure de résolution sont différentes. Les enfants ont du mal à représenter symboliquement le problème ; cela ne leur est d'ailleurs guère enseigné. En outre, le problème "Robert" ne peut pas être représenté par un diagramme ensembliste, car ce symbolisme ne permet pas de représenter les transformations négatives.

La situation est pire pour le problème "Thierry" : les représentations correctes du problème sont une équation dans $\mathbb{Z}$ :

$$x + (-7) = (+5)$$

et le schéma de la composition de transformations




La solution qu'écrivent habituellement les élèves

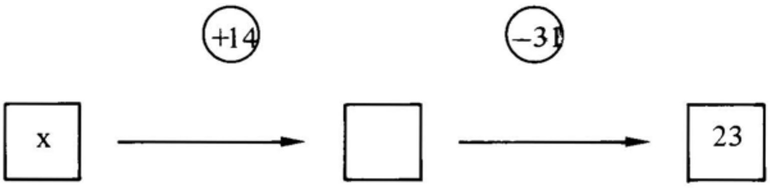
$$5 + 7 = 12$$

(quand ils la trouvent) n'a rien à voir avec la représentation du problème.

Prenons un dernier exemple.

**Exemple** 12 : Juliette a joué aux billes le matin et l'après-midi. Le matin, elle a gagné 14 billes. L'après-midi elle a perdu 31 billes. Quand elle compte ses billes le soir, elle en compte 23. Combien de billes avait-elle le matin avant de jouer ?

Le schéma du problème est le suivant :




Parmi les solutions données par les élèves, retenons les quatre ci-dessous :

A $\quad 23 + 31 = 54 - 14 = 40$

B $\quad 23 + 31 = 54$

$\quad 54 - 14 = 40$

C $\quad 31 - 14 = 17 + 23 = 40$

D $\quad 14 - 31 = 17$

$\quad 17 + 23 = 40$

La solution A représente un traitement tout à fait acceptable du problème : partir de l'état final, ajouter ce qui a été perdu et retrancher ce qui a été gagné. Mais l'écriture viole la symétrie et la transitivité du signe d'égalité.

La solution B ne viole pas ces propriétés. Elle peut être considérée comme meilleure. Mais c'est en fait essentiellement la même procédure que A. Comme A, elle représente la procédure de résolution et pas le problème. Le signe d'égalité est probablement interprété comme l'annonce du résultat (ça donne . . .) non pas comme une relation d'égalité.

La solution C amène un autre commentaire. Bien qu'elle viole aussi la symétrie et la transitivité du signe d'égalité, cette procédure repose sur un raisonnement différent des solutions A et B : on compose les transformations d'abord, et on applique ensuite l'inverse de la transformation ainsi trouvée à l'état final.

La solution D, qui repose sur le même raisonnement que C, révèle une nouvelle faute d'écriture : $14 - 31 = 17$. Mais cette faute repose en fait sur la recherche de la différence entre une transformation positive (+ 14) et d'une transformation négative (– 31). L'élève aurait-il tort d'être content de sa solution ?

On voit ainsi qu'il y a beaucoup de sources de décalages entre signifiants et signifiés dans les structures additives. Certains systèmes symboliques ne permettent pas de représenter tous les problèmes, ou ne permettent pas de distinguer entre représentation des problèmes et représentation des solutions. Enfin certains systèmes symboliques véhiculent des significations qui sont éloignées des significations mathématiques standard.

Comment aider les élèves à remplir ces lacunes ?

## 5 – CONCLUSION

Ma conclusion sera brève. L'analyse précise des contenus conceptuels des problèmes d'addition et de soustraction conduit à distinguer plusieurs relations très différentes les unes des autres, et une grande diversité de problèmes, de procédures, de représentations symboliques.

Le développement des conceptions et des compétences de l'enfant consiste en un cheminement complexe à travers cet ensemble. Pour saisir ce cheminement, il faut analyser dans le détail les conduites des élèves en situation, leurs formulations, leurs procédures, les écarts entre les exigences du maître et les démarches des élèves.

Le paysage des structures additives est complexe : les difficultés rencontrées par les élèves au niveau du collège et même du lycée en témoignent. Le cheminement dans ce champ conceptuel touffu comporte beaucoup de métaphores, d'incompréhensions et de malentendus, et d'étranges relations entre signifiants et signifiés qui se nouent dès l'école élémentaire. Si les actes comptent plus que les paroles et que les écrits, il faut accorder une grande importance aux théorèmes-en-acte découverts ou compris intuitivement par les enfants en situation. Mais on n'explique pas sans recourir à des mots et à des signes sur le papier ; les pièges alors sont légions, et ces pièges renvoient aux multiples significations de l'addition et de la soustraction. Comment les maîtres pourraient-ils n'en être pas avertis ?

Références bibliographiques : voir au verso

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


BROUSSEAU, G. (1981) – Problèmes de didactique des décimaux, **Recherches en didactiques des mathématiques, 2, 37 - 125.**

CARPENTER, J.P., MOSER, J.M., and ROMBERG, T.A. (Eds) (1981) **Addition and Subtraction : a cognitive perspective,** Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum.

FUSON, K. (1981) – An analysis of the counting-on solution procedure in addition. In : **Addition and Subtraction : a cognitive perspective,** Carpenter, T.P., Moser, J.M., Romberg, T.A. (Eds), Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum.

MARTHE, P. (1982) – **Problèmes de type additif et appropriation par l'élève des groupes additifs** Thèse de troisième cycle. Paris, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

PIAGET J., SZEMINSKA, A. (1941) – **La genèse du nombre chez l'enfant,** Genève, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELDER, B. (1948) – **La représentation de l'espace chez l'enfant,** Paris, PUF

PIAGET J., INHELDER, B. (1978) – **Le développement des quantités physiques chez l'enfant,** Genève, Delachaux et Niestlé.

STARKEY, P., GELMAN, R., (1981) – The development of addition and subtraction abilites prior to formal schooling in arithmetic. In : **Addition and Subtraction, a cognitive perspective ,** Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A., (Eds), Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum.

VERGNAUD, G., (1981) – **L'enfant, la mathématique et la réalité,** Berne, Peter Lang.

VERGNAUD, G., (1981) – A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In : **Addition and Subtraction : a cognitive perspective,** Carpenter, J.P., Moser, J.M., Romberg, T.A. (Eds) Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1983) – Multiplicative structures, In : **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,** Lesh, R., Landau, M. (Eds), Academic Press.