UN NOUVEAU MODÈLE DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE COMME ALTERNATIVE À L'«ARITHMÉTIQUE GÉNÉRALISÉE»

Josep GASCÓN
Universitat Autònoma de Barcelona

I. Le besoin d'expliciter le modèle épistémologique utilisé

Dans la plupart des recherches en didactique des mathématiques, on fait généralement référence, d'une façon plus ou moins directe, à un domaine particulier du savoir mathématique : la "proportionnalité", la "géométrie", la "résolution de problèmes de démonstration", "les nombres décimaux", "l'algèbre élémentaire", etc. Malheureusement, dans nombre de cas, le savoir mathématique est supposé ne pas donner lieu à différentes interprétations. On voit alors se reproduire, dans certains discours, un phénomène qui relève de la situation "normale" du système d'enseignement où, non seulement le savoir mathématique ne peut pas être mis en cause, mais, comme nous l'a montré la théorie de la transposition didactique, la distinction entre savoir savant et savoir *enseigné* ne peut même pas être posée.[1]

Avant d'aborder le cas particulier de "l'algèbre élémentaire", nous voulons souligner quelques aspects de cette ouverture de la didactique sur le savoir mathématique.

(a) On peut considérer qu'il existe, dans toute institution didactique où l'on enseigne des mathématiques, des *modèles implicites* des différents domaines du *savoir mathématique enseigné,* d'où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique. Ces différents modèles implicites locaux, ainsi que le supposé modèle général (global) du savoir mathématique vont de soi et ne sont pas généralement mis en cause.

Nous trouvons, par exemple, dans l'enseignement primaire et secondaire, un modèle implicite de l'algèbre élémentaire, déterminé en partie par les différentes pratiques que

[1] La mise en évidence d'une distance entre ces deux régimes du savoir est, de fait, la porte d'entrée du savoir mathématique dans la problématique didactique et constitue, en conséquence, l'un des postulats fondateurs de la *didactique fondamentale.* Voir Chevallard (1991b), pp.15-16 en particulier.

l'institution considère comme relevant de l'algèbre, mais agissant à la fois comme un système de conditions et de contraintes sur ces pratiques, en permettant l'existence de certaines d'entre elles et en empêchant que d'autres puissent apparaître.

(b) Toute recherche en didactique qui se propose d'étudier les phénomènes relatifs à un domaine des mathématiques (par exemple l'algèbre élémentaire), et dans une institution didactique donnée, ne devrait pas assumer tel quel le modèle implicite prévalant dans l'institution, mais devrait le prendre en compte en tant qu'objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base "empirique" de la recherche.

Pour cela, le chercheur a besoin d'un "point de vue" particulier, c'est-à-dire d'un modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de cadre de référence pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie. Or, tout modèle local utilisé pour étudier un domaine particulier des mathématiques enseignées va prendre sa place dans un modèle global de l'activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur.

(c) La recherche en didactique devrait pouvoir expliquer pourquoi un certain modèle implicite existe dans une institution didactique au détriment d'autres modèles possibles ; comment ce modèle implicite agit sur la structure et les fonctions des différents dispositifs didactiques ; et comment les phénomènes qui s'y produisent dépendent des caractéristiques de ce modèle. Elle devrait pouvoir expliquer, par ailleurs, comment la perception de ces phénomènes peut varier suivant les différents modèles du savoir mathématique qu'adopte le chercheur.

On ne peut donc que souligner l'importance de *construire au moins un modèle spécifique* de chaque domaine mathématique étudié, construction qui constitue un instrument indispensable pour l'étude des phénomènes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage de ce domaine.[2] Par conséquent, il serait souhaitable que le modèle épistémologique utilisé soit explicite —ou, en tout cas, potentiellement explicitable—, étant donné qu'il conditionne de façon décisive ce que l'on entendra par "enseigner et apprendre l'algèbre élémentaire" (par exemple) —et, par extension, "enseigner et apprendre des mathématiques". Plus concrètement, l'assomption (plus ou moins explicite) d'un *modèle spécifique* d'un domaine déterminé du savoir mathématique (en cohérence avec le modèle général adopté) détermine fortement :

(i) les phénomènes didactiques qui seront "visibles" ;

(ii) la description de ces phénomènes ;

(iii) les tentatives d'explication de ces phénomènes ;

(iv) les projets d'ingénierie didactique qui pourront être proposés pour modifier les processus d'enseignement et d'apprentissage ou pour provoquer des phénomènes divers.

---

2 A notre avis, la notion de "situation fondamentale" (spécifique de telle ou telle connaissance) élaborée par Guy Brousseau constitue un bon exemple de la productivité, pour la recherche en didactique, de ces "modèles spécifiques", chaque situation fondamentale élaborée par le chercheur pouvant être entendue comme un modèle spécifique particulier.

L'originalité de la *didactique fondamentale* consiste précisément en ce qu'elle *ouvre une nouvelle voie d'accès à l'étude des phénomènes didactiques à travers l'étude du savoir mathématique lui-même,* tel qu'il est enseigné et transformé dans les institutions didactiques. Il est donc nécessaire de *problématiser* ce savoir mathématique enseigné si l'on veut dépasser l'illusion de la transparence de ce savoir.

II. L'interprétation de l'algèbre élémentaire comme arithmétique généralisée

Dans le cas de l'algèbre élémentaire, comme dans beaucoup d'autres, le modèle implicite dominant dans l'enseignement secondaire correspond à ce que nous pourrions appeler la "conception du bon sens". Sa caractéristique principale est *l'identification de l'algèbre élémentaire à une arithmétique généralisée,* modèle qui met l'accent sur le "symbolisme algébrique" et l'oppose à un supposé "langage arithmétique" que le premier est censé élargir et généraliser. Il faut noter, en outre, qu'un grand nombre de recherches relatives aussi bien à l'histoire de l'algèbre[3] qu'à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire[4] assument en grande partie et, de façon plus ou moins explicite, cette caractérisation de l'algèbre élémentaire.

Au risque de simplifications abusives, j'essaierai d'expliciter brièvement ci-dessous les caractéristiques principales du système de pratiques qui déterminent ce modèle implicite de l'algèbre élémentaire. Etant donné qu'il s'agit, comme j'ai dit plus haut, d'entendre l'algèbre comme une "arithmétique généralisée", ces pratiques vont être interprétées comme un prolongement des pratiques arithmétiques et en opposition à celles-ci.

(i) A l'égal des pratiques arithmétiques, "l'arithmétique généralisée" ne caractérise pas un unique type de problèmes : on y trouve la résolution d'équations et d'inéquations, la manipulation d'identités et de fonctions élémentaires, l'application de formules, la résolution de problèmes "concrets". Notons qu'il y a une tendance, dans la pratique enseignante, à séparer chacun de ces types de problèmes des autres, ce qui conduit à une véritable désarticulation du corpus de problèmes de l'arithmétique généralisée.

(ii) La résolution des problèmes "par l'arithmétique" comporte toujours la résolution successive d'une chaîne de problèmes simples dont le résultat numérique est calculable et interprétable dans les termes de l'énoncé. Les *problèmes algébriques*, par contre, ne répondent pas à ce schéma au sens où ils n'admettent pas une décomposition de ce type. Nous illustrerons cette distinction dans la section suivante.

---

[3] Voir les exemples cités par Piaget et García (1982).

[4] Voir, par exemple, Matz 1980, Küchemann 1981, Booth 1984 et 1987, Kieran 1985 et 1988, Filloy et Rojano 1984 et 1989, Gallardo et Rojano 1988, Cortés 1993, entre autres

(iii) Le résultat d'une pratique arithmétique est normalement un nombre, alors qu'une pratique algébrique peut aboutir à une relation entre deux grandeurs (par exemple une expression du type $2a^3+ b^2 = 5$ où a et b désignent deux grandeurs, ou même une expression du type $4a-b$), ce qui va à l'encontre des expectatives arithmétiques des élèves selon lesquelles une "réponse bien formée" doit être forcément un nombre —comme le montre l'expérimentation réalisée par Matz (1980).

(iv) Alors que, en arithmétique, on travaille toujours avec des "nombres concrets", en algèbre on manipule aussi des symboles qui doivent être interprétés de diverses manières, en fonction du contexte. En interprétant librement la "tradition piagetienne", on voit apparaître[5] une distinction entre, au moins, trois utilisations différentes des symboles :
(a) en tant que "nombres inconnus spécifiques" (cas des *équations*) ;
(b) en tant que "nombres généralisés" (*identités* du type $a(b+c)=ab+ac$) ;
(c) en tant que "variables" (cas des *fonctions* ou des *formules*).

(v) L'activité algébrique met en jeu des "signes" ou "symboles" qui, dans le contexte arithmétique, ont des référents concrets et donc un sens précis. Or, dans le "langage algébrique", le sens de ces signes est modifié de façon essentielle Ainsi, par exemple, dans le "langage arithmétique", les signes +, =, -, x, etc., indiquent uniquement des *actions*, tandis que dans le "langage algébrique" ces signes possèdent une certaine *dualité* qui complique leur utilisation et interprétation. Cette *dualité des opérations* fait référence au fait que, dans le langage algébrique, une opération signifie soit une action (comme en arithmétique : $x+5=8$), soit une permanence (comme il en va de l'opération de multiplication dans l'expression $a(b+c)=ab+ac$). La *dualité de l'égalité* indique que le signe = en algèbre peut signifier aussi bien une *action* —par exemple, dans $2a+3a$ =("donne")$5a$— qu'une *équivalence* —comme dans l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.[6]

L'assomption de ce modèle implicite de l'algèbre élémentaire —dont je n'ai montré que quelques caractéristiques— comporte des limitations dès qu'on essaye de l'utiliser pour expliquer des phénomènes didactiques. Etant donné que ce modèle caractérise l'algèbre élémentaire en prenant comme donné l'arithmétique, les phénomènes visibles de ce point de vue (y compris, en premier lieu, les différents types de difficultés scolaires rencontrées lors de "l'acquisition du langage algébrique"), ainsi que les tentatives d'explication proposées, seront toujours enfermées dans un "cadre arithmétique de référence".[7]

---

[5] Cette "tradition piagetienne" part des travaux de Collis (1975 et 1980) et continue avec Küchemann (1981) et Booth (1984).

[6] Voir, pour le détail, Filloy et Rojano (1984, 1989) ou Gallardo et Rojano (1988).

[7] Nous faisons ici un usage libre (étendu au cas des chercheurs) de cette expression qui a été utilisée par Kieran et Filloy (1989) pour désigner la dépendance des élèves débutant en algèbre vis-à-vis des acquis en arithmétique.

Notons bien qu'on ne peut comprendre les limitations de ce cadre arithmétique que si nous disposons d'un modèle alternatif de l'algèbre élémentaire qui permette de formuler des phénomènes nouveaux et de reformuler les anciens selon une perspective plus large. L'interprétation historique qui correspond à ce cadre arithmétique et qui situe la genèse de l'algèbre dans l'école d'Alexandrie (en faisant coïncider l'origine de l'algèbre avec l'introduction de "valeurs indéterminées" représentées par des lettres à la place des nombres) n'est pas satisfaisante. En effet, à partir de l'ouvrage de Jacob Klein, Piaget et García (1982, pp.135-141) montrent que cette interprétation ne permet pas d'expliquer certains phénomènes historiques importants, tels les difficultés rencontrées par les Grecs dans la solution de nombreux problèmes géométriques, difficultés qui ne peuvent s'expliquer que par l'indisponibilité d'instruments leur permettant de formuler les problèmes géométriques en termes d'opérations. Pour rendre raison de ces phénomènes, il convient de postuler, comme l'observe Klein (1934), que Viète crée une "nouvelle discipline" avec un niveau de généralisation qui n'était pas à la portée des Anciens. Deux démarches indépendantes convergent dans la genèse de cette "nouvelle algèbre" : l'analyse géométrique de Pappus et les méthodes arithmétiques de Diophante —d'où le fait que la nouvelle algèbre de Viète puisse être considérée à la fois comme *arithmétique* et *géométrique.*

Pour ce qui est des phénomènes didactiques déjà mis en évidence et qui ne peuvent pas s'expliquer à partir de la définition de l'algèbre élémentaire comme une "arithmétique généralisée", nous pouvons citer en premier lieu le phénomène d'*arithmétisation de l'algèbre* qui montre que, non seulement l'arithmétique enseignée n'a pas été absorbée par l'algèbre enseignée, mais encore qu'elle a subsisté en tant que savoir enseigné en empruntant des instruments de travail typiquement algébriques (symboles =, +, -, etc.).

Chevallard (1989) a montré en outre que l'algèbre enseignée n'est pas à proprement parler une arithmétique généralisée, étant donné qu'elle ne contient pas strictement l'arithmétique enseignée : d'une part, la résolution algébrique de certains problèmes arithmétiques suppose des instruments qui ne font plus partie de l'algèbre telle qu'elle est enseignée aujourd'hui ; d'autre part, l'algèbre enseignée possèderait une thématique propre qui n'est, en aucun sens, une généralisation de celle de l'arithmétique. Il a par ailleurs mis en évidence que le *calcul algébrique* n'est pas un épiphénomène du numérique, mais qu'il doit être considéré en soi comme un élément essentiel de production de nouveaux systèmes de nombres.

Les travaux de Piaget et García ainsi que ceux de Chevallard montrent qu'il se produit, aussi bien dans la genèse historique que dans la genèse didactique de l'algèbre, un changement *qualitatif* dans le développement du savoir mathématique. Il est prévisible qu'un modèle comme celui de "l'arithmétique généralisée", qui postule une *continuité* et une *dépendance exclusive* de l'algèbre vis-à-vis de l'arithmétique, présente des limitations lorsqu'on l'utilise comme un instrument pour la production de connaissances didactiques ou pour interpréter les faits historiques relatifs à la genèse de l'algèbre.

III. Vers un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire

Avant d'esquisser un modèle alternatif de l'algèbre élémentaire comme outil d'analyse des phénomènes didactiques, il est nécessaire de présenter en quelques mots un *modèle épistémologique général* du savoir mathématique où s'inscrit, comme cas particulier, le modèle spécifique proposé. Cette explicitation peut être utile car généralement le modèle épistémologique général adopté (que ce soit le "structuralisme", le "constructivisme", les mathématiques comme "système conceptuel" ou comme "langage", etc.) conditionne de façon décisive la nature des recherches en didactique des mathématiques —comme l'a montré, en particulier, Rojano (1994) pour ce qui est des problématiques de recherche de ces dernières décennies.

Je me situerai d'emblée dans la perspective anthropologique développée par Chevallard (1992) qui décrit le savoir mathématique comme un domaine de réalité —"l'univers mathématique"— lié à certaines pratiques sociales —les "pratiques mathématiques"— dont le savoir mathématique apparaît à la fois comme un émergent et une condition. Au lieu de modéliser le *savoir mathématique* (qui est en réalité un terme primitif de la théorie), on modélise les *pratiques mathématiques* qui constituent, lorsqu'on les considère dans leur globalité, ce qu'on peut appeler *l'activité mathématique*. Dans cette perspective anthropologique, l'activité mathématique est interprétée comme une *activité d'étude de types de problèmes* dans laquelle *c'est le développement des techniques d'étude de ces types de problèmes qui engendre l'évolution dynamique des mathématiques.*[8]

Dans ce modèle général de l'activité mathématique, tout modèle spécifique d'un domaine du savoir mathématique se construit à partir de l'analyse des *techniques mathématiques* que l'on utilise dans ce domaine, des *types de problèmes* qu'engendre le développement de ces techniques et de *l'environnement technologico-théorique* qui justifie et permet d'interpréter les pratiques mises en œuvre, et qui évolue de façon conjointe avec les techniques d'étude et les types de problèmes étudiés.

Si nous interprétons maintenant l'algèbre élémentaire comme un type particulier de "pratique mathématique", nous devrions pouvoir la décrire à partir du développement de certaines *techniques mathématiques*, des *types de problèmes* que ces techniques permettent d'étudier, et de l'*environnement technologico-théorique* qui permet de poser les problèmes, de justifier les techniques et d'interpréter l'activité. Et si nous voulons expliquer la "genèse de l'algèbre élémentaire" à partir d'une pratique mathématique antérieure, nous devons étudier les mécanismes par le biais desquels une certaine pratique initiale est transformée en une pratique algébrique. Il s'agira, sans doute, d'un changement qualitatif qui ne se réduira pas à un unique *changement de langage* (du "langage arithmétique" au "langage algébrique"),

---

[8] Le lecteur trouvera des développements plus détaillés dans Chevallard (1991 et 1992b), Bosch et Gascon (1993), Gascon (1993).

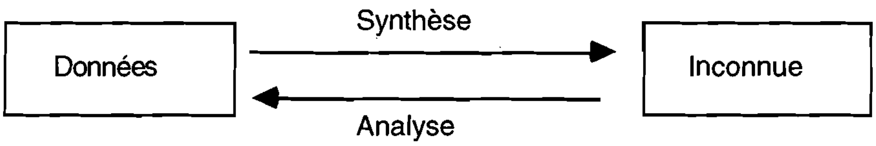
ni au changement que suppose le passage d'opérer avec des nombres concrets à opérer avec des symboles généraux. Tous ces changements font partie d'une transformation plus complexe qu'il s'agit précisément d'étudier. Et chaque interprétation de ces transformations nous fournira un modèle spécifique de l'algèbre élémentaire.

III.1. Le patron d'Analyse-Synthèse en tant que technique mathématique

Nous considérons la notion de *technique mathématique* au sens large que lui a donné Chevallard (1991) de "manière de faire", qui va des techniques plus algorithmiques et visibles (comme, par exemple, l'algorithme de la somme de deux fractions) jusqu'à des techniques moins conscientes ou explicitables (comme celles que l'on utilise pour modéliser mathématiquement un certain système ou pour démontrer une proposition). Ce que nous appelons le *Patron d'Analyse-Synthèse*[9] est une (macro)technique d'étude d'un champ de problèmes initial, a priori non complètement déterminé mais qui se constitue au fur et à mesure que se "matérialise" et se développe cette technique.

Tel que le décrit Pappus, le schéma général du patron d'Analyse-Synthèse comporte deux étapes : un *raisonnement regressif* ou *analyse* qui part de l'objet inconnu d'un problème et aboutit aux données du problème ; et un *raisonnement progressif* ou *synthèse* qui fait le chemin inverse, en partant des données du problème et en aboutissant à la construction de l'objet inconnu :

Patron d'Analyse-Synthèse



Les Grecs pensaient, de manière erronée, que ce patron était uniquement applicable aux *problèmes de construction géométrique*. Son application typique était la suivante : on part de la figure à construire qui détermine l'objectif E_n du problème. On cherche une autre figure E_{n-1} plus accessible à partir des données du problème et à partir de laquelle on puisse construir E_n moyennant une transformation géométrique T_n :

$$E_{n-1} \xrightarrow{\quad T_n \quad} E_n$$

[9] Ce patron nous vient des mathématiciens grecs et est déjà employé par Pappus. Nous avons emprunté l'expression "Patron d'Analyse/Synthèse" des travaux de Polya et de Lakatos.

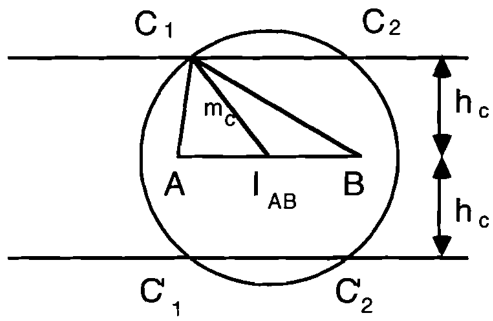
Le processus continue jusqu'à arriver à une figure géométrique $\mathbf{E_0}$ constructible à partir des données du problème. L'Analyse finit en ce point. Commence alors la Synthèse qui est, de fait, assurée par l'Analyse antérieure puisqu'il s'agit uniquement d'appliquer, à partir de $\mathbf{E_0}$, les transformations $\mathbf{T_i}$ construites lors de l'Analyse.

Un exemple typique de problème de construction géométrique (à la règle et au compas) est le suivant :

[1] Construire à la règle et au compas un triangle ABC étant donné un côté c=AB, la hauteur h_C et la médiane m_C issues de C.

Dans ce cas, nous avons un schéma du type :

$$\begin{tikzcd} & E'_1 \arrow[dr, "T'_2"] & & \\ E_0 \arrow[ur, "T'_1"] \arrow[dr, "T''_1"'] & & E_2 \arrow[r, "T_3"] & E_3 \\ & E''_1 \arrow[ur, "T''_2"'] & & \end{tikzcd}$$



où l'analyse suit les pas suivants :
E_3 : Triangle ABC (INCONNUE)
E_2 : Sommet C
E'_1 : Droites parallèles à AB à distance h_C de AB
E''_1 : Cercle de centre I_{AB} (milieu de AB) et de rayon m_C
E_0 : Côté AB, hauteur h_C et médiane m_C (DONNÉES)

La synthèse se matérialise à travers les transformations géométriques suivantes :
T'_1 : Tracer les droites parallèles à AB à une distance h_C de AB
T''_1 : Tracer un cercle de centre I_{AB} (milieu de AB) et de rayon m_C
T'_2 et T''_2 : Considérer le point d'intersection de E'_1 et E''_1
T_3 : Joindre les points obtenus à A et à B

Cette forme concrète du patron d'Analyse-Synthèse —qui se révèle utile pour résoudre une classe intéressante de problèmes de construction géométrique— est souvent appelée "patron de construction de deux lieux géométriques".

A titre d'exemple du fonctionnement du patron d'Analyse-Synthèse (A/S) entendu comme technique applicable à des problèmes qui ne sont pas de construction géométrique, nous allons l'appliquer au problème suivant (qui est isomorphe à un problème étudié par

Polya[10]). Il nous permettra de montrer que, dès le départ, le type de problèmes que l'on peut étudier par la mise en œuvre du patron d'A/S ne se réduit nullement aux problèmes de construction géométrique :

[2] Un homme met 5 heures et demie pour faire un trajet de 32 km. Il commence par marcher sur un terrain plat puis il monte une pente à la vitesse de 4 km/h. Il fait alors demi-tour et retourne au point de départ par le même chemin qu'à l'aller. Nous savons qu'il a marché pendant 4 heures (2 à l'aller et 2 au retour) sur le terrain plat et que la montée de la pente lui prend le double de temps que la descente. Calculer la longueur de la partie plate du trajet.

L'Analyse peut consister à établir les états suivants, dont chacun est caractérisé par une grandeur déterminée :

E_4 : Longueur de la partie plate du trajet (INCONNUE)
E_3 : Longueur de la pente
E_2 : Durée de la montée de la pente
E_1 : Durée de la montée et descente de la pente
E_0 : Durée du parcours sur la partie plate (DONNÉE)

La Synthèse correspondante peut alors se caractériser par le schéma suivant, où chaque T_i représente une transformation arithmétique :

$$E_0 \xrightarrow{T_1} E_1 \xrightarrow{T_2} E_2 \xrightarrow{T_3} E_3 \xrightarrow{T_4} E_4$$

T_1: Soustraire 4 h des 5 h 30 min (on obtient 1 h 30 min)
T_2: Prendre les 2/3 de 1 h 30 min (on obtient 1 h)
T_3: Multiplier la durée (1 h) par la vitesse à la montée (4 km/h)
T_4: Soustraire à 32 km les 8 km de pente et diviser par 2.

Les limitations du patron A/S considéré comme technique mathématique ont été étudiées de façon détaillée dans Gascon (1993). Nous ne citerons ici que les deux points suivants, à titre de résumé:

(i) Le patron A/S *ne permet pas de résoudre tous les problèmes "isomorphes"* aux problèmes présentés, c'est-à-dire les problèmes que l'on obtient en permutant dans l'énoncé original certaines grandeurs données par des inconnues, sans changer la *structure profonde du problème*, c'est-à-dire la forme que prend la symbolisation globale des conditions du problème (voir Gascon 1989). Nous verrons un peu plus loin cette limitation dans le cas des deux problèmes examinés, en considérant une petite variation de chacun d'eux.

---

[10] Voir Polya 1962-65, pp.46-48.

(ii) Le patron A/S, même s'il permet de chercher et de construire l'objet inconnu, ne permet pas d'en déterminer les *conditions d'existence,* ni de *construire d'autres objets* (ou les conditions d'existence d'autres objets) différents de celui demandé. En ce sens, le patron A/S sépare le processus de recherche de celui de preuve. Une deuxième variation des problèmes [1] et [2] nous permettra d'exemplifier cette limitation.

III.2. Schéma général des variations successives du patron A/S

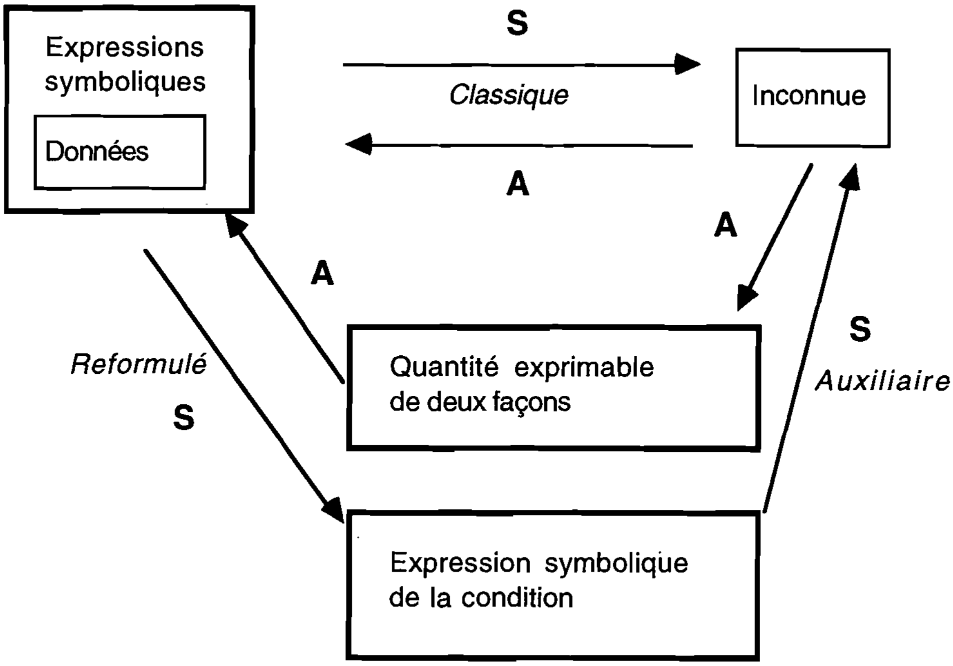
Pour comprendre la continuité entre le patron A/S et la genèse de l'algèbre élémentaire, il est important de rappeler que Viète lui-même a nommé son algèbre "Art analytique" et que, selon une thèse de Jacob Klein que nous reprenons, son œuvre est le fruit d'une féconde conjonction entre l'*analyse géométrique* de Pappus et les *méthodes analytiques* de Diophante. Descartes, qui se considère comme un héritier de cette démarche de pensée, cite explicitement l'analyse des Anciens et l'algèbre des Modernes comme sources de sa Méthode. Nous voyons surgir alors une question de large portée qui n'a pas encore été —à nos yeux— suffisamment clarifiée par les nombreux chercheurs qui l'ont abordée d'une façon ou une autre : *en quel sens pouvons-nous considérer que l'algèbre élémentaire (ou "l'art analytique" de Viète ainsi que "la méthode" de Descartes) constituent un développement du patron d'analyse-synthèse tel que nous le présente Pappus ? Ou encore en quel sens précis l'algèbre est, comme le dit Lakatos (1977), essentiellement "analytique"?*

Sans prétendre donner une réponse complète à cette question, nous présentons ci-dessous le schéma d'une ligne de développement du patron A/S qui aboutit, comme nous le verrons, à la *modélisation algébrique*, activité mathématique qui comprend largement ce que nous avons appelé jusqu'ici l'"arithmétique généralisée". Ce développement comprend une étape intermédiaire que nous pouvons considérer comme une *reformulation* du patron A/S :

$$\boxed{\text{Patron A/S}} \xrightarrow[\textit{variation}]{\textit{Première}} \boxed{\text{Patron reformulé}} \xrightarrow[\textit{variation}]{\textit{Deuxième}} \boxed{\text{Modélisation algébrique}}$$

III.3. Une première variation de la technique : le patron "reformulé"

Le schéma suivant pourra rendre visible la relation qui existe entre le patron A/S et ce que nous appellerons le"Patron reformulé". Dans ce dernier, les "données" du problème ne sont pas uniquement des grandeurs connues mais appartiennent à la catégorie plus large des "expressions algébriques élémentaires". Il s'agit là d'une reformulation semblable à celle donnée par Descartes dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (spécialement des règles IV et XIX).



Le patron reformulé peut être interprété comme une technique mathématique obtenue par variation du patron A/S. Pour montrer en quoi cette variation répond —et dépasse— les limitations citées à propos du patron A/S, nous considèrerons les problèmes [1'] et [2'], obtenus par une petite variation de problèmes [1] et [2].

[1'] Construire à la règle et au compas un triangle ABC étant donné le côté c=AB, la hauteur h_c issue de C et la médiane m_A issue de A.

Dans ce cas, il n'est pas possible d'appliquer le Patron de deux lieux géométriques comme nous l'avons fait pour résoudre le problème [1] : après avoir réduit le problème à la construction d'un point (le sommet C), celui-ci n'apparaît plus comme l'intersection de deux lieux géométriques constructibles directement à partir des données du problème. Nous devons alors recourir à une *analyse auxiliaire* (voir le schéma précédent) qui met en évidence les conditions du problème, c'est-à-dire les *quantités que l'on peut exprimer de deux façons différentes*. Il s'agit, dans ce cas, de la hauteur h_c (qui est égale à la distance du point C à la droite (AB)) et de la médiane m_A (qui est égale à la distance entre le point A et le point I_{BC} milieu de BC). On a donc :

$d(AB,C) = h_c$

$d(A,I_{BC}) = m_A$

Nous pouvons appliquer alors l'*analyse reformulée*, qui consiste à décomposer chacun des membres des égalités précédentes en *expressions algébriques élémentaires*. La *synthèse* nous permet ensuite de donner l'*expression symbolique de la condition du problème.*

Si, par exemple, nous prenons A=(3,0), B=(-3,0), C=(x,y), h_C=6 et m_A=5, l'A/S reformulée nous fournit alors la *symbolisation des conditions du problème* que voici :

$|y| = 6$

$[(x-3)/2-3]^2 + (y/2)^2 = 5^2$

La *synthèse auxiliaire* consiste à résoudre ce système d'équations et nous fournit les solutions C_1=(1,6) et C_2=(17,6) qui correspondent à deux triangles semblables ABC_1 et ABC_2 solution. Apparaissent aussi les solutions C_1'=(1,-6) et C_2'=(17,-6) qui correspondent aux triangles ABC_1' et ABC_2' symétriques des précédents.

Considérons maintenant le problème [2'] variation du problème "arithmétique" [2] :

[2'] Il faut à un homme 5 h30 min pour faire un certain trajet. Il commence par marcher sur une partie plate à la vitesse de 6 km/h et continue en montant une pente à la vitesse de 4 km/h. Il fait alors demi-tour et arrive au point de départ en faisant le même parcours qu'à l'aller. Nous savons que la vitesse de descente de la pente est de 8 km/h et que la longueur du chemin de la pente est les 2/7 du parcours total. Calculer la longueur du parcours.

Si nous essayons d'appliquer l'analyse classique qui, partant de l'inconnue "longueur du trajet", aboutit aux données du problème, nous nous trouvons devant l'impossibilité de réaliser une analyse réductive du problème. Cela signifie que ce problème *ne peut pas* se décomposer en une chaîne de problèmes simples avec des résultats intermédiaires "constructibles" (c'est-à-dire calculables) de façon à ce que chacun de ces résultats ne dépende que du résultat précédent :

E_n : longueur du parcours x

E_{n-1} : longueur de la pente $y=(2/7)x$

E_{n-2} : durée de la montée $m=y/4$

E_{n-3} : durée de la montée et de la descente $M=m+m/2=y/4+y/8$

E_{n-4} : durée du parcours sur terrain plat $T=5{,}5-M=5{,}5-(y/4+y/8)$

E_{n-5} : longueur du parcours sur terrain plat $L=x-2y=6T$

La grandeur L ne peut pas être calculée à partir des données puisqu'elle s'exprime en fonction de la longueur du parcours x qui est l'inconnue du problème. Il est nécessaire alors de procéder à l'*analyse auxiliaire* (voir schéma) qui, sans réduire l'inconnue aux données, permet de guider le choix d'une grandeur *qui puisse s'exprimer de deux façons différentes*. Dans ce cas, la grandeur que cette analyse auxiliaire suggère est la "durée du parcours en terrain plat" T qui peut s'analyser de deux façons différentes d'après les étapes E_{n-4} et E_{n-5}.

Ainsi, le *patron reformulé* nous fournit *l'expression symbolique de la condition* qui est, dans le cas examiné :

$(x-2y)/6 = 5{,}5 - (y/4 + y/8)$ où $y=2x/7$

La *synthèse auxiliaire* se réduit alors à une manipulation algébrique qui nous permet d'obtenir l'*inconnue* du problème ($x=30,8$ km).[11]

La question qui se pose alors est de savoir si nous avons dépassé toutes les limitations du patron A/S. En réalité, le progrès est uniquement partiel, étant donné que, dans les deux cas examinés, nous avons réussi à calculer l'inconnue (ce qui n'était pas possible avec la technique d'A/S antérieure), mais *nous ne connaissons toujours pas les conditions de son existence.* De façon analogue, nous avons pu construire le triangle ABC ou déterminer la longueur y de la pente, sans arriver à connaître les *conditions de possibilité* de cette construction ni de cette détermination. *Quelle nouvelle variation de la technique nous permettra de dépasser définitivement ces limitations?*

III.4. Deuxième variation : la modélisation algébrique

La caractéristique principale du traitement des problèmes algébriques réalisée par Viète et de la géométrie de Descartes est l'introduction systématique de la *représentation littérale*, aussi bien pour désigner les quantités inconnues que les *quantités connues*, ce qui présente l'avantage de traiter des cas généraux et de pouvoir s'intéresser à la *structure des problèmes*, et non seulement à la simple obtention de l'inconnue.

Appliquer "l'art analytique" à nos problèmes signifie, en premier lieu, modifier l'énoncé pour faire apparaître les données comme des *paramètres :*

[1"] Déterminer un triangle ABC étant donné un côté AB, la hauteur h_C issue de C et la médiane m_A issue de A.

Prenons A=(a,0), B=(-a,0) et C=(x,y). Appliquer le patron A/C reformulé consiste à trouver la *symbolisation globale des conditions du problème*, qui est, dans ce cas :

$|y| = h_C$

$[(x-3a)/2]^2 + (y/2)^2 = m_A^2$

Système qui est équivalent à l'équation du second degré

$x^2 - 6ax + (9a^2+ h_c^2 -4m_A^2) = 0$

dont le discriminant $\Delta = 4(4m_A^2 - h_c^2)$ peut s'interpréter comme la *condition d'existence* du triangle cherché : ABC existe si et seulement si $\Delta \geq 0$, soit si et seulement si

---

[11] Il existe une autre technique qui permet, dans grand nombre de cas, de dépasser cette limitation du patron A/S sans arriver a la sophistication du patron reformulé. On la connaît, historiquement, sous le nom de *règle de fausse position.* Sa mise en œuvre dans le problème considéré consisterait en ceci : on suppose que la solution est x = 56 km (par exemple), il en résulte t = 10 h ; or comme les variables x et t sont proportionnelles, on en déduit que pour t = 5,5 h, il faudrait avoir x = 30,8 km. (Au cas où x et t ne seraient pas proportionnelles mais liées entre elles par une fonction affine, on choisirait deux valeurs de x arbitraires, dont la différence serait proportionnelle à la différence des temps correspondants).

$h_c \leq 2\ m_A$.

Si $h_c = 2\ m_A$, on a une solution unique (à une symétrie près) $C=(3a,h_c)$.

Si $h_c < 2\ m_A$, nous avons deux solutions qui correspondent (en laissant de côté les symétriques par rapport à AB), aux triangles non semblables ABC_1 et ABC_2 où C_1 et C_2 ont pour ordonnée h_c et pour abscisse chacune des solutions de l'équation précédente.

Si nous cherchons maintenant les conditions d'existence des deux sommets A et B, en supposant que $C=(x,h_c)$ est connu, nous obtenons l'équation

$9a^2 - 6xa + (x^2+h_c{}^2-4m_A{}^2) = 0$

Cette équation a une solution si et seulement si $(12m_A)^2 - (6h_c)^2 \geq 0$ soit si $h_c \leq 2\ m_A$. Et nous retrouvons l'inégalité précédente.

Nous sommes maintenant en condition de poser de *nouvelles questions* à propos du système sous-jacent au problème : que se passe-t-il si $h_c = 0$? et si $h_c = m_A$? en quels cas le triangle ABC sera-t-il isoscèle ? équilatéral ? rectangle ? etc. La réponse à ces questions nous permettra d'obtenir de nouvelles connaissances sur le système étudié. Les formules citées constituent donc un *instrument pour produire des connaissances sur le système sous-jacent à l'énoncé du problème*. Nous dirons alors qu'il s'agit d'un *modèle* de ce système, d'un *modèle algébrique*.

Reprenons alors l'énoncé général du second problème :

[2"] Il faut à un homme *t* heures pour faire un certain trajet. Il commence par marcher sur une partie plate à la vitesse de *u* km/h et continue en montant une pente à la vitesse de *w* km/h. Il fait alors demi-tour et arrive au point de départ en faisant le même parcours qu'à l'aller. Nous savons que la vitesse de descente de la pente est de *v* km/h et que la longueur du chemin de la pente est *y*. Calculer la longueur *x* du trajet.

La technique mise en œuvre précédemment nous permet d'obtenir la *formule* :

$(x-2y)6w = t - (y/u + y/v)$

qui équivaut à :

$x = w\,(\,t - (1/u + 1/v - 2/w)\,y)$

et qui peut s'interpréter en disant que, dans le cas général, pour déterminer la longueur totale x du parcours, il faut connaître les vitesses de chaque partie du parcours (u, v, w) et la longueur y de la pente (ou une relation entre x et y).

Il faut considérer le cas particulier $1/u + 1/v - 2/w = 0$; c'est-à-dire $w = 2uv/(u+v)$,

qui signifie que la vitesse w dans le partie plate du parcours est la *moyenne harmonique* des vitesses de montée et descente de la pente. Dans ce cas la longueur totale x est indépendante de y et des vitesses u et v. (Il se produit une compensation qui fait que x serait la même si la vitesse pendant le parcours était constante et égale à w.)

En conservant l'esprit des Règles de Descartes, nous devons procéder comme si la longueur de la pente y était une inconnue. On obtient alors:

$(1/u + 1/v - 2/w)\,y = t - x/w$

qui nous dit que la condition nécessaire et suffisante pour que y soit déterminée de manière unique par la longueur du parcours x , par la durée totale t et les vitesses est justement que

$$1/u + 1/v - 2/w \neq 0.$$

Ces formules établies nous permettent maintenant de poser de nouvelles questions relatives au système sous-jacent à l'énoncé du problème : étant donné y et t non nuls, quelles sont les conditions d'existence de x (en fonction de u, v, w) ? Dans quels cas les grandeurs x et t seront-elles proportionnelles ? Que signifie alors la constante de proportionnalité? Etc. Nous avons donc, encore une fois, un *modèle algébrique* du système sous-jacent.

IV. Ebauche d'un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire

L'irruption de *modèles algébriques* en tant qu'outils d'étude de systèmes (mathématiques ou extra-mathématiques) met en évidence que "l'art analytique" de Viète aboutit, de façon naturelle, à un type d'*activité mathématique* que nous pouvons appeler "algèbre élémentaire" et qui possède les caractéristiques suivantes :

(i) Etant donné le modèle général de l'activité mathématique où nous nous situons, "l'algèbre élémentaire" consiste en l'*étude d'un certain champ de problèmes* qui contient, non seulement les problèmes "arithmétiques" (au sens défini plus haut), mais encore les problèmes de "construction géométrique", les problèmes de "dénombrement simple", de "lignes de niveau", etc.[12] Il s'agit en réalité d'un champ immense de problèmes qui se constitue au fur et à mesure que se développe la technique A/S d'après le schéma qui a été esquissé.

(ii) La méthode algébrique nous fournit une *symbolisation globale de la relation entre les données et les inconnues du problème*, sans les distinguer d'emblée de façon essentielle. En outre, cette méthode a pour principal objectif l'explicitation de la *structure (formelle) de cette relation* —par exemple, sous la forme d'une équation paramétrique—, et pour objectif second la construction de la solution cherchée (que ce soit une figure géométrique, un nombre, ou n'importe quel autre objet).

(iii) Le langage mis en jeu contient des symboles que l'on peut interpréter comme des "nombres inconnus", des "nombres généralisés" ou des "variables", en faisant un *usage systématique des paramètres* (entendus, en premier lieu, comme des données connues que l'on manipule comme si elles étaient inconnues). Apparaissent ainsi les *formules* qui peuvent

---

[12] Le lecteur peut trouver une description détaillée de ces classes de problèmes dans Gascon (1989).

être interprétées comme des fonctions à diverses variables et qui jouent le rôle de *modèles algébriques* du système sous-jacent au problème.

(iv) La modélisation algébrique *permet de découvrir les conditions d'existence de l'objet inconnu* (qui est le domaine de définition d'une fonction de plusieurs variables), ainsi que la *forme de dépendance de chaque variable par rapport aux autres variables du système.* Elle permet, en particulier, d'étudier comment dépendent les variables "connues" des variables "inconnues".

(v) La modélisation algébrique est utile, en outre, pour déterminer les *conditions d'existence* d'objets *différents* de ceux que l'on se proposait d'étudier. Comme toute activité de modélisation, elle permet de produire de nouveaux problèmes à propos du système modélisé pour produire de nouvelles connaissances à son propos.

Arrivés en ce point, nous pouvons expliquer l'une des raisons qui portent à considérer "l'algèbre élémentaire" comme une "arithmétique généralisée". Si, en effet, nous regardons uniquement les *instruments ostensifs écrits* [13] que met en œuvre cette activité que nous avons appelé "algèbre élémentaire", et si nous nous limitons à ces instruments particuliers que l'on désigne par le terme de "langage algébrique", nous verrons qu'ils vérifient un grand nombre des propriétés citées lors de la considération de l'algèbre comme une "arithmétique généralisée". Ainsi, par exemple, le travail algébrique engage une manipulation de symboles que l'on peut interpréter de différentes façons, le résultat d'un problème peut être purement symbolique et il se produit une dualité de sens pour les opérations indiquées et par le symbole d'égalité. Ce fait expliquerait en partie le modèle classique: identifier l'algèbre élémentaire à une "arithmétique généralisée" serait une conséquence du fait de considérer le *langage algébrique* —qui n'est que l'un des aspects des instruments mis en jeu par "l'algèbre élémentaire"— pour le tout, en confondant la partie la plus visible des techniques utilisées et l'activité toute entière. De notre point de vue, *on ne peut identifier "l'algèbre élémentaire" avec les instruments que met en jeu cette activité*, ni, par ailleurs, détacher ces instruments de la technique qu'ils constituent.

[13] C'est par l'expression d'*instrument ostensif* (ou sémiotique) que M Bosch et Y. Chevallard désignent les objets écrits, oraux, gestuels ou matériels qui sont manipulés lors de la mise en œuvre d'une activité (mathématique en particulier). En ce sens, l'activité algébrique mobilise des instruments ostensifs qui sont essentiellement écrits (bien qu'oralisables), alors que l'arithmétique serait une activité de manipulation d'objets essentiellement discursifs (bien qu'elle inclue aussi des calculs écrits). Voir, sur cette notion, Chevallard (1989) et Bosch (1993).

V. Indices de la capacité explicative du nouveau modèle

(**a**) Le modèle spécifique de la genèse de l'algèbre que nous avons ébauché est compatible avec celui de Jacob Klein (1934) que reprennent Piaget et García dans leur ouvrage sur la *Psychogenèse et histoire des sciences* de 1982 . En situant l'origine de l'algèbre dans les travaux de Viète, ces auteurs ont montré comment ce modèle permet de rendre compte des principaux *faits historiques* relatifs à la naissance et au développement de l'algèbre. Et cela d'une manière plus satisfaisante que le modèle primitif qui, en identifiant l'origine de l'algèbre avec l'introduction de "quantités indéterminées", situait son origine dans l'école de Diophante d'Alexandrie.

(**b**) Dans notre modèle de "l'algèbre élémentaire", *l'utilisation de paramètres* apparaît comme un fait essentiel. Or Chevallard (1989, pp.47-49) a déjà montré que cette condition est primordiale, ne serait-ce que pour pouvoir affirmer que l'algèbre généralise à proprement parler les procédés de l'arithmétique. Par exemple, la solution "arithmétique" (verbale) d'un problème élémentaire comme le suivant :

Diviser un nombre donné en deux parties telles que la première dépasse la seconde en un excés donné.

ne peut être "traduit" en termes algébriques que si l'on utilise des paramètres pour représenter (et manipuler) les nombres supposés donnés. Ce simple fait met en évidence que, *sans l'utilisation systématique de paramètres l'algèbre élémentaire ne peut même pas être considérée comme une arithmétique généralisée.*

(**c**) Or, paradoxalement, l'existence d'un modèle dominant de l'algèbre élémentaire comme arithmétique généralisée est contemporain de l'abandon des paramètres dans l'*algèbre enseignée*. Ce fait pourrait expliquer certains aspects de phénomènes didactiques liés à l'enseignement et à l'apprentissage actuel de l'algèbre, dont nous fournissons ici quelques exemples :

- la faiblesse, dans l'activité mathématique développée à l'école, des techniques algébriques face aux techniques arithmétiques, et la péjoration qui en découle.
- le détachement de l'activité de résolution de problèmes scolaires d'une grande partie de l'algèbre enseignée.
- la séparation excessive et rigide entre différents secteurs de l'algèbre enseignée (les équations algebriques élémentaires, les formules et les fonctions, par exemple) que Chevallard a déjà mis en évidence (1989).

(**d**) Le modèle que nous avons présenté, par le fait qu'il permet de rendre visibles les phénomènes cités, nous permet de poser un problème didactique fondamental qui a déjà été avancé par Chevallard (1989) : sous quelles conditions un enseignement fonctionnel de l'*algèbre élémentaire* serait-il viable dans les systèmes d'enseignement actuels? Ou, pour le dire dans les termes que nous avons introduit : sous quelles conditions l'*algèbre enseignée* ne sera plus enseignée comme une "arithmétique généralisée", mais apparaîtra comme un instrument nécessaire pour l'étude de l'immense *champ de problèmes* que découvre la technique du patron A/S et qui, à travers certaines variations de cette technique, culmine dans la *modélisation algébrique* ?

(**e**) Nous avons essayé de montrer, avec le nouveau modèle, qu'il se produit une claire discontinuité dans le passage du *patron A/S classique* à ce que nous avons désigné comme le *patron reformulé.* Il s'agit là d'un *changement qualitatif du type d'activité mathématique* que ce passage engendre : bien que nous ayons présenté cette transition comme une variation de la technique A/S, le changement opéré est en réalité de portée plus large puisqu'il suppose un élargissement notable du champ de problèmes abordables, de l'environnement technologico-théorique nécessaire pour la mise en œuvre de la nouvelle technique et, bien sûr, du type d'instruments utilisés (les composantes du "langage algébrique"). La *nouvelle activité mathématique* qui en découle doit prendre en compte, en effet, la modélisation algébrique de systèmes non seulement "arithmétiques" (c'est-à-dire étudiés par l'arithmétique), mais aussi des problèmes "géométriques", de "dénombrement", de "logique", etc.

Le changement qui se produit avec l'apparition de l'activité algébrique nous porte alors à postuler l'existence d'un *obstacle épistémologique* (au sens de Brousseau 1983 et 1988) relatif à l'apprentissage de l'algèbre élémentaire qui n'apparaît pas forcément lié au "langage arithmétique" —même s'il peut inclure l'obstacle que Gallardo et Rojano (1988) ont décrit comme une "coupure au moment où il devient nécessaire de manipuler ce qui est représenté".

(**f**) Nous postulons que cette réinterprétation de l'obstacle devrait permettre de *reformuler et d'expliquer* certains phénomènes didactiques déjà connus et, ce qui est plus important, de détecter et prévoir l'apparition de *nouveaux phénomènes* inconnus jusqu'à présent. Parmi les difficultés rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre, il faudrait distinguer entre celles qui relèveraient d'un obstacle *épistémologique* constitutif de l'algèbre et celles qui devraient être considérées comme des obstacles *didactiques* découlant de la façon d'enseigner l'algèbre et non de la "nature" de celle-ci.[14]

Nous pouvons citer, à titre d'exemple de phénomène didactique nouveau et non réductible au "cadre arithmétique de référence", l'incidence de la maîtrise de certaines techniques de construction géométrique sur la difficulté empirique éprouvée par les élèves lorsqu'ils ont à produire un modèle algébrique de certains problèmes de géométrie analytique (voir les détails dans Gascon, 1989, pp.105-111).

Je voudrais signaler, pour terminer, que l'objectif principal de l'élaboration du *modèle spécifique* que nous avons présenté ici est, en premier lieu, celui de fournir une explication plus complète des phénomènes didactiques qui ont déjà été mis en évidence. Mais, c'est

---

[14]Voir Gascon (1993).

seulement dans la mesure où il nous permettra de construire et d'expliquer de nouveaux phénomènes —et de montrer en quoi les anciens modèles étaient insuffisants— que le nouveau modèle conquerra progressivement sa pertinence épistémologique. Comme dans toute discipline scientifique, le chemin doit passer par la mise à l'épreuve expérimentale du nouveau modèle.

Barcelona, mai 1994.

Références

BOOTH, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors,* NFER-Nelson: Windsor, UK.

BOOTH, L. (1987). Equations revisited, *in* BERGERON, J.C.; HERSOVICS, N. ET KIERAN, C. (eds.) : *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Université de Montréal: Montréal, Québec, 280-285.

BOSCH, M. (1993). Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité, *in* Artigues M. (éd.) (1993) : *Colloque "20 ans de la didactique des mathématiques en France"*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH, M. ; GASCON, J. (1993). Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica, *in* FILLOY, E. ET PUIG L. (ed.) : *Memorias del Tercer Simposio Internacional de Investigación en Educación Matemática*, 141-151, Sección de Matemática del CINVESTAV, México.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4, 165-198.

BROUSSEAU, G. (1988). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, communication au *Colloque International : Construction des savoirs - Obstacles et conflits,* Montréal.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'agébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique, *Petit x,* n° 5, 52-94.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

CHEVALLARD, Y (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savant enseigné*, La Pensée Sauvage (2ème édition).

CHEVALLARD, Y (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, 73-112.

COLLIS, K. F. (1975). A study of concrete and formal operations in school Mathematics: a piagetian viewpoint, *A.C.E.R., Research Series,* 95, Melbourne.

COLLIS, K. F. (1980). School Mathematics and stages of development, *in* S.Modgil et C. Modgil (eds.): *Towards a Theory of Psychological Development*, NFER, Windsor.

CORTÉS, A. (1993). Analysis of error and a cognitive model in the solving of the equations, soumis à *P.M.E.* 17.

DESCARTES, R. (1628). *Règles pour la direction de l'esprit,* Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1990.

FILLOY, E. ; ROJANO, T. (1984). From an arithmetical to an algebraical thought (A clinical study with 12-13 years old), *Proceedings offhe PME*, Madison, 51-56.

FILLOY, E. ; ROJANO, T. (1989). Solving Equations : the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics,* 9.2, 19-25.

GALLARDO A. ; ROJANO, T. (1988). Areas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9-2, 155-188.

GASCÓN, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Thèse Doctorale, Université Autonome de Barcelone.

GASCÓN, J.(1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13-3, 295-332.

KLEIN, J. (1934). *Greek Mathemacial Thought and the origin of Algebra,* M.I.T. Press, 1968.

KIERAN, C. (1985). Use of substitution procedure in learning algebraic equation-solving, *in* SHELON, M.; DAMARIN, S. (ed.), *Proceedings of the 7th Anual meeting of PME-NA,* Ohio State University, 145-152.

KIERAN, C. (1988). Two differents approaches among algebra learners, *in* COXFORD, A.F. (ed.), *The ideas of algebra, k-12,* Yearbook, NCTM, Reston, 91-96.

KIERAN, C.; FILLOY, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica" *Enseñanza de las Ciencias,* 7-3, 229-240.

KÜCHEMANN, D. E. (1981). Algebra, *in* K. M. Hart (ed.) : *Children's Understanding of Mathematics,* 11-16, John Murray, London.

LAKATOS, I. (1977). *Mathematics, Science and Epistemology : Philosophical Papers,* vol.2, Cambridge University Press.

MATZ, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence, *Journal of Mathematical behaviour,* Vol.3, 93-166.

PIAGET, J.; GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Siglo XXI, Madrid.

POLYA, G. (1962-65). *La découverte des mathématiques,* vol. 1 et 2, Dunod, Paris.

ROJANO, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza, *Enseñanza de las Ciencias,* 12(1), 45-46.

VERGNAUD, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, *in* Laborde Ç. (ed.): *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique,* 189-99, La Pensée Sauvage, Grenoble.