L'ÉQUIVALENCE LOGIQUE EN COLLÈGE : FANTASME DIDACTIQUE OU IMPÉRATIF CATÉGORIQUE ?

Francis REYNÈS
Collège Grand Air ARCACHON
I.R.E.M. D'AQUITAINE

Les relations engendrent des objets, des êtres et des actes, non l'inverse.
Michel SERRES

Cet article présente un point de vue particulier sur une question délicate. Il n'engage que son auteur. La rédaction de «petit x»

Deux concepts me semblent primordiaux à construire durant la scolarité du Collège : l'égalité (des dénominations d'objets)[1] et l'équivalence logique (des propositions). En effet, chacun correspond à l'un des deux domaines de sens des écritures mathématiques et participe de façon essentielle à leur structuration. Chacun joue un rôle déterminant dans la construction et la corrélation des schèmes fondateurs du savoir mathématique, qui sont enracinés dans le "sens commun" et la "logique naturelle". Remplacer "maman" par "ma mère" ou "Paris" par "la capitale de la France", c'est déjà faire la substitution par égalité qui conduira à remplacer $\frac{15}{21}$ par $\frac{5}{7}$, $x + 2x$ par $3x$, $\sqrt{64}$ par 8, etc. Remplacer "Pierre est plus grand que Jacques" par "Jacques est plus petit que Pierre", c'est déjà effectuer la substitution par équivalence qui conduira à remplacer $x + 13 = 7$ par $x = 7 - 13$ ou $3xm = 5$ par $m = \frac{5}{3}$.

D'ailleurs, *égalité et équivalence sont indissolublement liées par la propriété de substitution puisque le remplacement, dans une proposition, d'une dénomination par une dénomination égale fournit une proposition équivalente.*

Exemple : $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ donc $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$.

---

[1] cf. Reynès F. (1993-94) "Le concept d'égalité, clef ou verrou ?", *petit x*, n° 35

Bien entendu, la similitude de fonctionnement de ces deux concepts est source de confusion, ce qui amène certains à proscrire l'usage du signe "$\Leftrightarrow$" et même du mot "équivalence". Pour le signe, pas d'objection : on sait bien que ce n'est pas l'introduction d'un signe formel qui facilite l'installation d'un concept ; ce serait plutôt le contraire : il risque de faire écran au sens par une utilisation prématurément "automatisée" (on en a un exemple paradigmatique avec le signe "="). Cela dit, si le concept commence à avoir du sens pour l'élève, pourquoi ne pas utiliser le signe s'il apporte une "économie de gestion", comme on le fait avec le signe "=" ? Mais pour le mot j'en appelle à la cohérence : si l'on refuse d'appeler un chat un chat, alors il faut bannir de son vocabulaire tous les "c'est-à-dire", "autrement dit" et autres "à savoir"...

Ignorer les symptômes ne soigne pas la maladie : par exemple, la confusion bien connue entre "aire" et "périmètre" ne se dissipe pas en étudiant les deux concepts séparément : tout au contraire, et puisqu'ils sont liés, convient-il de les mettre en scène conjointement pour pouvoir révéler à la fois ce qui les relie et ce qui les différencie. Alors, dans les premiers temps, il ne faut pas s'affoler de trouver des "*phrases égales*" ou des "*nombres équivalents*" : après tout, il y a bien pire, on le sait d'expérience... Mais au moins aura-t-on les moyens de faire rectifier ces confusions : les écritures sont-elles des propositions, des phrases, ou bien des dénominations d'objets (mathématiques) ?

En tout état de cause, et dans la mesure où le concept d'équivalence est tout aussi fondamental et tout autant employé que celui d'égalité, je ne vois pas au nom de quoi on lui refuserait le droit de se montrer tout aussi explicitement.

La mise en œuvre de toute définition et de toute notation exige l'utilisation de l'égalité et de l'équivalence : écrire "$C(A; r) = \{M / AM = r\}$" ne pourra servir à quelque chose que grâce à la *traduction* : $B \in C(A; r) \Leftrightarrow AB = r$. Appeler "médiatrice de [E F]" l'ensemble des points équidistants de E et de F ne sera utile que si l'on sait *traduire* : $LE = LF \Leftrightarrow$ L est un point de la médiatrice de [E F]. Noter "$\frac{1}{m}$" l'inverse d'un nombre m ne prend son sens que par la suite de *traductions* : t est l'inverse de m $\Leftrightarrow t \times m = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{m}$. Il est facile de multiplier les exemples.

Au niveau du Collège, il n'est évidemment pas question de donner une définition rigoureuse du concept d'équivalence. Mais on dispose de suffisamment d'exemples "élémentaires" de la chose pour lui donner du sens : il n'est, à ce niveau, qu'une première spécification mathématique du "*autrement dit*" du langage courant : deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles expriment la même idée, traduisent la même situation. $12 = 5 + 7 \Leftrightarrow 5 = 12 - 7$. A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow (A B) = (B C)$; $12 = 3 \times 4 \Leftrightarrow 4 = \frac{12}{3}$; $F \in [K L] \Leftrightarrow KF + FL = KL$.

L'un des buts de l'apprentissage mathématique est précisément d'enrichir le répertoire des propositions équivalentes, car *plus on dispose de moyens différents d'exprimer une idée, plus on est capable de l'adapter à la situation dans laquelle on se trouve, au problème que l'on a à résoudre.* Certains des blocages au démarrage d'une activité de démonstration proviennent de l'incapacité à remplacer la question posée par une question équivalente, c'est-à-dire à changer de point de vue. Cela est particulièrement flagrant lors des "changements de cadre" :

$(A B) // (E F) \Leftrightarrow$ pente de $(A B) =$ pente de $(E F)$, d'où : $K \in (E F) \Leftrightarrow (K E) = (E F) \Leftrightarrow (K E) \mathbin{//} (E F) \Leftrightarrow$ pente de (K E) = pente de (E F).

A titre d'illustration, voici une liste (non exhaustive !) de propositions équivalentes qui devrait pouvoir être connue et reconnue comme telle en fin de troisième puisque "toutes les notions utilisées sont au programme" (mais y a t-il des moments dans les classes où l'on apprend à mettre en relation ces diverses propositions ?) :

Le triangle RST est rectangle en R
$(RS) \perp (RT)$
$\widehat{SRT} = 90°$
R est un point du cercle de diamètre [ST], (sauf S et T)
R est le projeté orthogonal de S sur (TR)
R est le projeté orthogonal de T sur (SR)
SR est la distance de S à (TR)
TR est la distance de T à (SR)
(RS) est tangente en R au cercle de centre T et de rayon TR
(RT) est tangente en R au cercle de centre S et de rayon SR
$TR_2 + RS_2 = TS_2$
R est l'orthocentre du triangle RST

On peut faire une liste au moins aussi longue avec un triangle isocèle ...

La possibilité de traduire, d'exprimer d'une autre façon, n'est pas un luxe mais une nécessité pour la résolution des problèmes. D'autre part il est tout aussi indispensable de comprendre que la possibilité de traduction provient de la liberté de RE-dénomination des objets, et qu'elle est donc indissolublement liée au concept d'égalité. Pour s'en convaincre voici deux exemples "élémentaires" :

Exemple 1

Définition : la différence de t et de m est le nombre qu'il faut additionner à m pour égaler t.
Notation : ce nombre s'écrit "t – m".

Ce qui précède permet d'écrire : (t – m) + m = t. Non seulement cela ne permet d'écrire rien d'autre, mais cette formulation n'est d'aucune utilité ! Ce n'est que la RE-dénomination de ce nombre et l'équivalence obtenue par substitution qui vont amener à la mobilité opératoire : je décide d'appeler "d" ce nombre déjà appelé "différence de t et de m", c'est-à-dire que "je pose : d = t – m". Alors "d est la différence de t et de m" signifie, par définition, que d + m = t, (ce que l'on obtient en remplaçant "t – m" par "d" dans l'égalité donnée au début) et se traduit littéralement par : d = t – m.

Autrement dit : $d = t - m \Leftrightarrow d + m = t$.
Alors, définissant la soustraction comme l'opération qui, à deux nombres "t" et "m" pris dans cet ordre, fait correspondre leur différence "d", on obtient *le lien de réciprocité indispensable à la "réversibilité opératoire"* : $d \underset{-m}{\overset{+m}{\rightleftarrows}} t$

(Un exemple similaire est obtenu avec le quotient et la division).

Exemple 2

Notation : si $m \geq 0$, le nombre positif qui a pour carré m se note $\sqrt{m}$.

Alors : si $m \geq 0$, $\sqrt{m} \geq 0$ et $(\sqrt{m})^2 = m$. Et c'est tout, et c'est inutilisable !

Il faut "poser" : "$r = \sqrt{m}$" pour pouvoir traduire : "r désigne le nombre positif qui a pour carré m" par : "$r \geq 0$ et $r^2 = m$".

Autrement dit : $r = \sqrt{m} \iff r \geq 0$ et $r^2 = m$

C'est cette équivalence, et elle seule, qui permettra , par exemple, de résoudre des équations du genre : $\sqrt{2x-5} = x + 3$.

On sait que, sur le plan cognitif, le raisonnement par analogie précède le raisonnement par déduction logique. Les notions de "cause" et de "conséquence", ainsi que la construction du lien de nécessité qui les unit fonctionnellement, se mettent en place tardivement. La notion de "déduction logique" est encore plus abstraite, plus formelle. Le concept d'"équivalence de propositions" est alors particulièrement bien adapté à cette transition : en effet, son mode de fonctionnement est analogue à celui de l'égalité (on peut toujours remplacer une proposition par une proposition équivalente) alors que son champ d'application est d'une autre nature, d'un "type logique" (cf. B. Russel) de degré supérieur puisque situé au niveau des *relations entre objets* et non plus à celui des dénominations d'objets. Il est incomparablement plus facile d'accès et de maniement que le redoutable concept d'implication, même (surtout ?) lorsque ce dernier se cache sous le voile du "si ... alors ...", tant on sait bien que, dans le langage courant, ce dernier sous-entend le plus souvent sa réciproque et fonctionne donc implicitement comme une équivalence !...

Bien entendu, cette présentation "synthétique" du concept d'équivalence engendre un obstacle didactique : il faudra un jour le "casser" puis le "recoller" pour devenir capable de le (re)considérer comme la conjonction de deux implications réciproques. Un tel objectif pourrait être visé à la fin du cursus du Collège si l'équivalence était abordée sans hypocrisie ni terreur dès la classe de sixième[2]. Je reviendrai sur ce point un peu plus loin.

Une méthode extrêmement générale et polyvalente est celle que j'ai baptisée "N.T.R.C." car elle se décompose en quatre temps : Nommer, Traduire, Résoudre, Conclure. Trois exemples algébriques :

Exemple 3

"Démontrer que soustraire un nombre revient à additionner son opposé."

N : soit $d = k - u$ (dénomination du "résultat" de la soustraction proposée)
T : $d = k - u \iff d + u = k$ (définition de la différence de k et de u)
R : $d + u = k \iff d + u + (-u) = k + (-u)$ (propriété de l'égalité)
$\iff d + 0 = k + (-u)$ (définition des opposés)

[2] ce qui n'est pas conforme aux programmes actuels du collège (note de la rédaction)

$\Leftrightarrow$ $d = k + (-u)$
C : $d = k - u$ *et* $d = k + (-u)$, donc $k - u = k + (-u)$,
autrement dit soustraire u revient à additionner $-u$.

Exemple 4

"Démontrer que $a x (-b) = -(a x b)$"

N : ici, tout est déjà fait ...
T : $ax(-b)$ est-il l'opposé de axb ?
R : pour le savoir il faut, "par définition", calculer la somme des deux nombres :

$$a x(-b) + axb = ax(-b + b) = ax0 = 0$$

C : la somme est égale à zéro, *autrement dit* les deux nombres sont opposés, *autrement dit* chacun est l'opposé de l'autre, en particulier $ax(-b)$ est l'opposé de axb, *ce qui s'écrit* : $ax(-b) = -(axb)$.

Exemple 5

"Démontrer que $\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$"

N : soit $m = \dfrac{a}{-b}$ (dénomination du quotient proposé)

T : $m = \dfrac{a}{-b} \Leftrightarrow mx(-b) = a$ (définition du quotient)

R : $mx(-b) = (-m)xb$ donc $mx(-b) = a \Leftrightarrow (-m)xb = a$

$$\Leftrightarrow -m = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{a}{b}$$

C : $m = \dfrac{a}{-b}$ et $m = -\dfrac{a}{b}$, donc $\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

Après dix ans de recherche et d'expérimentation, je peux suggérer que :

1 - De telles démonstrations ne sont pas du tout hors de portée d'un élève "standard" de troisième, à condition qu'il y ait été préparé depuis la sixième par la mise en place progressive et l'utilisation explicite des concepts d'égalité et d'équivalence.

2 - De semblables démonstrations sont indispensables à la prise de conscience de la cohérence interne de l'Algèbre, car ce sont elles et elles seules qui permettent de ressentir les "règles de calcul" d'une part comme des nécessités intrinsèques (donc indéniables et incontournables), d'autre part comme des "rails de sécurité", des points d'ancrage sûrs auxquels il est toujours possible de se référer en cas de doute, et non pas comme des diktats "parachutés" et d'autant plus ressentis comme arbitraires que leur génèse reste occultée.

3 - Ces activités sont de véritables recherches, d'authentiques "explorations" qui conduisent à des "découvertes" : il s'agit de trouver comment ça marche !

Par exemple une écriture telle que $\frac{7}{-5}$ n'a, à priori, guère de sens pour les élèves, ce qu'ils manifestent clairement en demandant si l'on ne pourrait pas "mettre le signe moins ailleurs"... Question pertinente mais qui n'a pas de sens algébrique, et qu'il faut donc repenser pour pouvoir la reformuler d'une façon utilisable en Algèbre.

4 - Ces activités installent peu à peu une véritable méthodologie, ce qui est le plus sûr moyen d'éviter la "course aux recettes" dont nous sommes les témoins affligés ; le problème n'est pas de "rendre les mathématiques plus concrètes" – par définition toute tentative dans ce sens est vouée à l'échec – mais de susciter, rendre intelligible, opérationnaliser les processus d'abstraction puis le fonctionnement des concepts ainsi imaginés.

5 - L'assurance de la validité des lois ainsi découvertes et la pratique de la substitution et de la traduction, permettent d'interpréter et de spécifier ou d'étendre les résultats obtenus.

Par exemple "$T\times(-M) = (-T)\times M = -(T\times M)$" veut aussi dire que "l'opposé d'un produit se réalise en remplaçant un (et un seul) facteur par son opposé", ce qui sera utilisé plus tard sous la forme : $x - 2 = -(2 - x)$,

donc $(x-2)^2 + (2-x)(x+5) = (x-2)^2 - (x-2)(x+5)$.

En remplaçant M par 1 on obtient $T\times(-1) = -T$, ce qui signifie que l'opposé d'un nombre c'est son produit par -1.

En remplaçant T par $-M$ on obtient $(-M)^2 = M^2$, ce qui signifie ...

Cette méthode "N.T.R.C.", abondamment utilisée en Algèbre, ne lui est pas exclusive. Elle est également très efficiente en Géométrie. Trois exemples :

Exemple 6

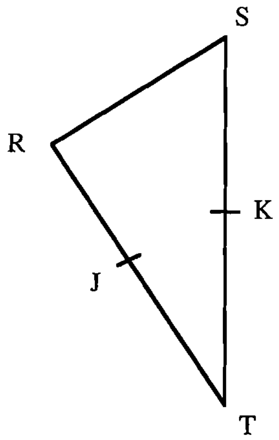
"Les médiatrices d'un triangle ABC.sont concourantes."

N : soit K le point d'intersection de la médiatrice de [A B] et de celle de [B C]
T : K est un point de la médiatrice de [A B] $\Leftrightarrow$ KA = KB
K est un point de la médiatrice de [B C] $\Leftrightarrow$ KB = KC
R : KA = KB et KB = KC, donc KA = KC

C : KA = KC $\Leftrightarrow$ K est un point de la médiatrice de [A C],
autrement dit la médiatrice de [A C] passe par K.

Exemple 7

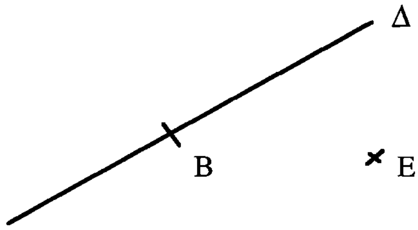
Situation : le triangle SRT est rectangle en R.
Question : le milieu de l'hypoténuse est-il le centre de son cercle circonscrit ?



N : Soit “K” le milieu de [S T].
T : K est-il le centre du cercle circonscrit au triangle SRT ?
$\Leftrightarrow$ K est-il le point de concours des médiatrices du triangle ?
$\Leftrightarrow$ K est-il le point d'intersection de deux médiatrices ?
On est ainsi conduit à considérer deux médiatrices :
celle de [S T], puisqu'elle passe par K,
celle d'un autre côté, par exemple [R T].
N : Désignons par Δ la médiatrice de [R T] et par J son milieu.
T : Δ = la perpendiculaire en J à (R T).
R : $\Delta \perp (R\,T)$ et $(R\,T) \perp (R\,S)$ donc $\Delta \,//\, (R\,S)$.
Δ passe par le milieu “J” de [R T] et $\Delta \,//\, (R\,S)$, donc Δ passe par le milieu de [S T] (projection d'un milieu), autrement dit Δ passe par K.
C : K est donc le point d'intersection de la médiatrice de [S T] et de celle de [R T].

Exemple 8

Données : Une droite Δ, un point B sur Δ, un point E n'appartenant pas à Δ.
Problème : Définir un cercle passant par E et tangent en B à Δ.



N : Soit A le centre du cercle cherché (peu importe qu'il existe ou non, l'avenir le dira !)

La définition de A suffit à définir le cercle puisqu'on sait qu'il doit passer par E : la connaissance de A entraîne donc celle de AE, c'est-à-dire du rayon.

T : un cercle de centre A passe par E et B $\Leftrightarrow$ AE = AB
$\Leftrightarrow$ A est sur la médiatrice de [E B].

le cercle de centre A passant par B est tangent en B à Δ $\Leftrightarrow$ $(A\,B) \perp \Delta$ et $B \in \Delta$
$\Leftrightarrow$ A est sur la perpendiculaire en B à Δ.

R : Puisque $E \notin \Delta$, alors (EB) et Δ sont sécantes (en B). Or deux droites respectivement perpendiculaires à deux droites sécantes sont elles-mêmes sécantes. Donc la médiatrice de [E B] et la perpendiculaire en B à Δ sont sécantes.

C : Leur point d'intersection est le point A cherché. Il est donc unique.

Remarques

1 - On retrouve, avec l'équivalence, la même difficulté qu'avec la substitution par égalité : les élèves ont du mal à "abandonner" une formulation au profit d'une autre, précisément parce qu'ils n'ont pas encore une mobilité d'esprit suffisante et qu'il n'est pas immédiat de comprendre le profit qu'on peut en retirer.

2 - Dans la plupart des situations, et tout au moins au niveau du Collège, il est clair que l'activité de traduction par équivalence est plus fréquente, primordiale, décisive que celle de "pure" déduction (qui est même parfois très réduite).

Pour "ouvrir" le concept d'équivalence il faut évidemment étudier des contre-exemples. Deux propositions équivalentes doivent être vraies "en même temps" (et tout autant fausses "en même temps", ce qui suppose que l'on ait auparavant compris et utilisé le fait que, si deux propositions sont équivalentes, alors leurs négations le sont également... Soit dit en passant, cela ouvre une voie vers la contraposition...). Pour justifier la non-équivalence il est donc nécessaire (et suffisant) de fournir une situation où l'une des propositions est vraie "pendant que" l'autre est fausse. On peut commencer avec deux propositions "qui n'ont rien à voir", du genre "il pleut" et "il fait nuit", mais ce qui pose problème est évidemment le cas où "il y a une relation mais pas équivalence".

La "vie quotidienne" offre une mine de questions : "Il pleut" est-il équivalent à "le ciel est nuageux" ? "Je roule à 150 km/h" est-il équivalent à "je suis en infraction avec le code de la route" ? "Je suis malade" est-il équivalent à "j'ai de la fièvre" ? Etc.

L'utilisation de l'égalité donne des implications trivialement vraies alors que leurs réciproques ne le sont pas toujours : si a = b, alors $a^2 = b^2$, mais ... Si A = B, alors (AE) = (BE), mais ...

L'étude des caractérisations des "figures usuelles" est également riche d'enseignements logiques : tout carré est un losange, mais ... Tout triangle équilatéral est isocèle, mais ...

Alors il deviendra possible de reconsidérer des équivalences déjà connues et de les re-connaître comme des conjonctions d'implications réciproques.

Cela dit, lorsqu'une propriété peut s'énoncer en une équivalence, je ne vois vraiment pas l'intérêt de distinguer systématiquement "énoncé direct" et "réciproque", comme d'aucuns s'acharnent à le faire par exemple pour le théorème de Pythagore... Il me semble nettement plus pertinent de pointer la distinction entre les propriétés qui peuvent s'exprimer par une équivalence et celles qui ne peuvent s'exprimer que par une seule implication.

C'est la production de "traductions équivalentes" qui tisse peu à peu un réseau où les significations peuvent circuler, se rencontrer, interférer, se connecter, permettant ainsi au sens de se construire et de s'installer. Cela ne sera réalisable que lorsqu'on abandonnera le quantitatif pour le qualitatif, l'accumulation inconsidérée de "savoirs" éparpillés, et donc promis à l'évaporation, au profit d'une structuration relationnelle dense de concepts fondamentaux en nombre optimum : l'équivalence logique est évidemment de ceux-là puisqu'elle est un outil essentiel de cette structuration.