VÉRITÉ DES AXIOMES ET DES THÉORÈMES EN GÉOMÉTRIE - VÉRIFICATION ET DÉMONSTRATION[1]

Gilbert ARSAC
Université Lyon I et CNRS-IRPEACS
équipe COAST

I. Axiomes et théorèmes

Un exposé systématique de la géométrie, (et nous nous limiterons dans tout ce qui suit à désigner par ce mot, sauf mention expresse du contraire, la géométrie euclidienne plane), tel qu'il a été tenté par Euclide et mené à bien par Hilbert, pour ne citer que deux auteurs emblématiques, comporte d'une part un ensemble d'énoncés admis comme vrais, les axiomes, et d'autre part un ensemble d'énoncés démontrés à partir des précédents, les théorèmes, propositions, etc...

A posteriori, on peut cependant considérer aussi l'ensemble des énoncés de la géométrie, axiomes et théorèmes, placés en quelque sorte sur un pied d'égalité quand à leur valeur de vérité, et étudier leurs relations de dépendance logique. C'est le genre d'étude que l'on mène, soit quand on cherche les relations de dépendance entre axiomes, soit encore quand on cherche des énoncés équivalents à un axiome donné. Ce genre de recherche ne peut être fructueux que si l'on adopte à la manière de Hilbert un point de vue résolument formaliste, c'est-à-dire si, tout au moins du point de vue méthodologique, on renonce à l'interprétation intuitive de la géométrie. L'histoire des fausses démonstrations du "postulat d'Euclide" (axiome des parallèles) montre en effet que sinon, on est conduit à admettre explicitement ou implicitement des résultats souvent évidents sur la figure, tout au moins apparemment plus évidents que l'axiome original d'Euclide, qui se sont en fait révélés par la suite, grâce au cadre formaliste, équivalents à celui-ci (pour un bref résumé sur la question de l'axiome des parallèles, cf le commentaire de B. Vitrac relatif à cet axiome in Euclide, 1990).

Pour ce qui nous intéresse, nous retiendrons de ce qui précède la conséquence suivante : l'étude des dépendances logiques entre énoncés géométriques montre que, du point de vue formaliste, le choix d'un système d'axiomes pour la géométrie est relativement arbitraire, en ce sens qu'il n'est soumis à aucune règle. De fait, si les axiomes d'incidence, pour reprendre la terminologie classique de Hilbert, comme "par deux point distincts, il passe une droite et une seule" ou "deux droites distinctes ont au plus un point commun", sont pratiquement les mêmes dans toutes les axiomatiques

1 Cet article reprend un texte paru dans la publication du séminaire de l'équipe "DidaTech" de Grenoble (1991 - 1992) sous le même titre.

proposées pour la géométrie, le choix des énoncés pris comme axiomes d'ordre ou de congruence est variable suivant les auteurs, et est effectué en fonction de considérations d'esthétique et de simplicité des démonstrations ultérieures des théorèmes, qui relèvent largement des opinions personnelles des mathématiciens. De toute façon, au bout du compte, l'ensemble des énoncés géométriques vrais est toujours le même.

Cependant, ce caractère arbitraire, en droit, du choix des axiomes de base n'est vrai que dans un cadre formaliste, comme celui de Hilbert. Il n'en est plus de même en revanche, si l'on interprète la géométrie comme science de l'espace, devant exprimer, dans une certaine mesure, que nous discuterons plus loin, des propriétés empiriquement vérifiables (ce qui nous conduirait logiquement à étendre ici notre propos à la géométrie dans l'espace) sans pour autant renoncer à en donner un exposé déductif dans lequel les démonstrations n'utilisent que des axiomes clairement énoncés. Dans ce cas, les axiomes de base devront exprimer des propriétés sur lesquelles l'accord se fait aisément parce qu'elles apparaissent comme évidentes à tout le monde. C'est la position de Pascal dans son écrit "De l'esprit de géométrie" (Pascal, Clair éd. 1985), où après avoir rappelé la nécessité, que nous n'abordons pas ici, de termes primitifs non définis (dans l'axiomatique de Hilbert, il s'agit des termes "point", "droite", "entre", "congru", "incident"), il rappelle qu'on ne peut tout démontrer et en vient à souligner la nécessité des axiomes :

Il est évident que les premiers termes que l'on voudrait définir, en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions que l'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent ; et ainsi, il est clair que l'on n'arriverait jamais aux premières.

Il précise ensuite comment on détermine les axiomes :

Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve.

On voit que Pascal introduit ici, comme nous l'avons annoncé, un critère de clarté pour la sélection des axiomes parmi les énoncés vrais de la géométrie. Sans être absolu, ce critère fournit au moins une base de discussion sur le choix des axiomes, comme il est dit explicitement dans le même écrit à propos des "Règles pour les axiomes" :

1) N'admettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être.
2) Ne demander en axiome que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes.

On peut relever la contradiction partielle entre 1) et 2) : alors que 2) sous entend que l'évidence a un caractère parfaitement objectif, ("des choses évidentes d'elles-mêmes"), l'énoncé 1) souligne qu'il faut que l'évidence soit accordée par l'interlocuteur, ce qui n'est pas toujours le cas, comme Pascal en a déjà donné lui-même un exemple auparavant : la possibilité de diviser indéfiniment un espace est refusée par certains (il s'agit du chevalier de Méré) quand elle paraît évidente à Pascal.

Le caractère non absolu du critère apparaît à l'évidence quand on considère l'inégalité du triangle : Euclide la démontre (livre I, proposition 20), mais l'opportunité de cette démonstration est contestée, d'après Proclus par les Epicuriens (cf le commentaire de B. Vitrac in Euclide, 1990) et, au dix-septième siècle, dans ses "Nouveaux éléments de géométrie", Arnauld admet que le lecteur sait ce qu'est une ligne droite et qu'elle est le plus court chemin d'un point à un autre (cf Coolidge, 1949). Ainsi réapparaît le problème de l'évidence : celle-ci renvoie toujours à un accord social, il y a donc des degrés dans l'évidence. Pour ce qui nous concerne, nous retiendrons que, comme celui de l'axiome des parallèles, le caractère d'évidence de l'inégalité du triangle est en débat. Dans la suite, nous aurons à nous intéresser principalement à sa réciproque : si trois nombres vérifient l'inégalité, ils sont les mesures des côtés d'un certain triangle.

La position énoncée clairement et explicitement par Pascal est sans doute celle de la majorité des mathématiciens : la géométrie est la science de l'espace. La position formaliste de Hilbert peut être comprise, nous l'avons souligné, comme un moment nécessaire de la pensée mathématique dans sa recherche d'une certitude du caractère non contradictoire de la géométrie, mais ne saurait servir de base épistémologique à l'enseignement élémentaire de la géométrie, c'est tout au moins le choix que nous faisons, et nous ne connaissons pas d'auteur qui en fasse d'autre (l'ouvrage d'Arnauld cité plus haut se présente d'ailleurs comme un ouvrage d'enseignement). Il peut être opportun de rappeler ici que dans les débats sur l'enseignement de la géométrie qui ont eu lieu à propos de la réforme dite des mathématiques modernes, le désaccord portait sur le rôle de l'axiomatique et des structures algébriques associées dans l'enseignement mais qu'il n'y avait pas de désaccord sur la nécessité de choisir des axiomes à partir de l'observation (cf Lichnerowicz, (1972), Choquet, (1964)).

Cependant la réflexion montre la difficulté, nettement perçue historiquement depuis les débats sur les géométries non euclidiennes, de vérifier expérimentalement les axiomes de la géométrie, d'asseoir leur évidence sur des bases solides. C'est ce que nous allons montrer maintenant, et nous verrons par la suite que les problèmes qui apparaissent ici ressurgissent au niveau de l'enseignement.

II. Le problème de la vérification des axiomes

Dans la mesure où la géométrie est envisagée comme une théorie physique, une science de la nature, elle ne saurait être vraie seulement en un sens purement formel, comme théorie non contradictoire, elle doit aussi fournir une description fidèle de la réalité qu'elle représente. Ceci implique, comme le remarque Granger (1992) que les axiomes doivent être vérifiés, par opposition aux énoncés de théorèmes qui eux doivent être démontrés, ce qui n'exclut d'ailleurs pas leur vérification éventuelle. Le même auteur relate les tentatives de vérification empirique des axiomes de Riemann concernant la géométrie par Poincaré et Helmoltz. Le mot de vérification renvoie ici à une confrontation aux faits. D'une manière générale, il renvoie à l'idée que la vérité mathématique n'est pas seulement liée à la cohérence formelle mais à une correspondance avec une réalité, une interprétation : on trouve dans Richards (1980) la relation de ce débat sur la nature de la vérité en mathématiques chez les algébristes anglais du début du 19ème siècle.

L'histoire, aussi bien que la réflexion, soulignent la difficulté d'une telle entreprise, en effet comment faire, comme le remarque Granger (loc cit) pour vérifier un énoncé du type "par deux points distincts passe une droite et une seule" ? Une vérification expérimentale ne peut être qu'approchée et la géométrie est incapable de fournir l'ordre de grandeur de l'approximation exigible pour que l'expérience soit considérée comme concluante. Cette difficulté a bien été vue par Poincaré et Helmoltz. Il y a certes des différences entre leurs positions, mais tous deux excluent la possibilité d'une expérience véritable sur le modèle fourni par la physique et renvoient, pour la vérification des axiomes de la géométrie à des opérations de la pensée, seulement "quasi-empiriques" que nous désignerons par la suite par "expériences mentales". Gauss et Lobatchevski partageaient l'idée suivant laquelle la vérité de la géométrie comme science de l'espace dépend de l'expérience (cf Kline, 1980). Ils ne semblent pas toutefois avoir analysé les raisons théoriques pouvant rendre problématique cette vérification expérimentale : Lobatchevski proposait de recourir à des observations astronomiques pour décider du caractère euclidien ou non de la géométrie de l'espace ambiant.

III. Problèmes didactiques correspondants

Un texte de l'académie des sciences, cité dans les instructions accompagnant le programme des collèges de 1987 (circulaire n° 78-392 du 16 Nov 1978) est à mon avis bien représentatif de la position épistémologique adoptée majoritairement dans l'enseignement :

> Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de Quatrième et de Troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en sixième et en cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien (...) Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève; ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non explicitement formulées et a fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin, il faut éviter qu'une propriété simple, qui

est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu.

On retrouve ainsi l'idée que la géométrie est une science déductive travaillant à partir de propositions considérées comme évidemment vraies sur une base "expérimentale", "de l'expérience" "intuitive". Les différences essentielles entre cette conception et la méthode axiomatique sont les suivantes : le mot d'axiome n'est pas prononcé, les axiomes choisis (c'est-à-dire les propositions considérées comme évidentes) peuvent être largement surabondants, leur choix est laissé à l'initiative de l'enseignant suivant le niveau de la classe, le problème de la non-contradiction n'est pas soulevé : on fait manifestement confiance à la réalité, source de la vérité des propositions admises, pour ne pas être contradictoire. L'origine empirique des axiomes n'est pas contestée et éloigne évidemment complètement du point de vue formaliste. Remarquons que l'appel à l'intuition peut coïncider avec ce que nous avons appelé expérience mentale.

Se posent alors de nombreuses questions :

- les propriétés admises sont-elles évidentes ? Pour qui? Pour l'élève ou pour l'enseignant ?
- l'élève doit-il (peut-il) les vérifier?

Sous-jacent à cette dernière question, il y a évidemment un problème de contrat didactique : à qui revient l'affirmation de la vérité des axiomes, qui décide ce qui doit être démontré et ce qui doit être admis ? On retrouve des problèmes rencontrés chez Pascal.

La lecture d'interviews de mathématiciens contemporains recueillies par Nimier (1989) montre bien que le problème est loin d'être imaginaire et même qu'il peut provoquer chez certains élèves une perplexité durable : on en trouve en effet une trace chez deux mathématiciens qui ont été suffisamment frappés à l'époque de leur scolarité par ces problèmes de coexistence de propriétés, dont certaines sont réputées intuitives ou expérimentales alors que d'autres sont à démontrer, pour s'en souvenir durablement :

Je n'ai pas toujours des souvenirs très précis, mais là j'ai un souvenir très précis [...] on nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc...Et puis on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, je vois bien ce qu'exactement j'ai fait, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et ...démontrer..., bon je ne sais pas pourquoi. Cette règle du jeu était absurde, en réalité, mais je l'ai acceptée, ça m'a amusé; comme pour n'importe quel jeu, comme j'aurais joué aux échecs, n'est-ce pas, et puis bon, ça marchait bien. Je comprends d'ailleurs que pour la plupart des élèves c'était complètement absurde...(Nimier, loc. cit., p. 54).

...Je n'aime pas les choses où il fallait admettre. Ainsi, dans l'enseignement secondaire : quand on faisait de la géométrie, je ne savais pas ce qu'on admettait, ce

qu'était une droite et l'image d'un fil tendu, cela ne m'a jamais satisfait; j'ai trouvé qu'il y avait un cercle vicieux, qu'il y avait quelque chose qui n'allait pas et à l'époque, je n'ai pas pu obtenir d'explication de la part de mon professeur parce que lui-même n'était pas non plus très sûr sur cette affaire là ; c'est bien plus tard avec l'axiomatique que j'ai vu comment on pouvait sortir de ces difficultés [...] Je ne savais plus si on faisait de la physique ou si on faisait des mathématiques...(Nimier, loc. cit., p. 69).

Revenons maintenant, au moins provisoirement, à un point de vue expérimental sur la géométrie. En matière de géométrie plane, l'élève dispose d'une technique qu'il maîtrise en partie : la pratique du dessin et ses instruments, la règle, le compas, l'équerre. C'est cette pratique graphique qui pourra être mise en œuvre ou invoquée pour le choix des axiomes, ainsi le fait que par deux points passe une droite et une seule sera-t-il considéré comme l'énoncé correspondant à une vérité d'expérience : on peut tracer un seul trait à la règle entre deux points. Les propriétés de l'angle droit renvoient à la manipulation de l'équerre, etc...C'est bien semble-t-il, ce que suggère le texte de l'Académie des sciences.

Ce choix soulève les questions suivantes : l'ambiguïté du recours à l'expérience est-elle ressentie par les élèves ? Comment est-elle gérée dans le contrat didactique ?

Une première constatation permet de voir que ces difficultés existent bel et bien : affrontés au problème *"trouver le plus court trajet AMB où A et B sont deux points donnés dans un même demi-plan limité par une droite D et M un point de D"*, des élèves qui ont trouvé expérimentalement (par la mesure) un point M qui leur semble convenir maintiennent que ce point est une meilleure solution que celui fourni par la démonstration exposée par l'enseignant. Ici, la dévolution du problème, qui a permis aux élèves de trouver leur solution, qui les satisfait, est une sorte de piège pour l'enseignant qui ne parvient pas à imposer la solution mathématique, même en usant de son autorité : cette modification du contrat n'est pas admise par les élèves. Nous en verrons d'autres exemples (§ V et VII).

IV. Le cas de l'inégalité triangulaire

IV.1. Présentation

Nous allons maintenant exposer les résultats obtenus en s'intéressant à l'inégalité du triangle (ou à sa réciproque), dont on a vu historiquement qu'elle avait été considérée parfois comme évidente, donc ne pouvant et ne devant pas être démontrée. Cette inégalité est d'ailleurs l'un des axiomes de base de la notion de distance générale alors que le cas où il y a égalité, et où les points sont alignés, est en outre axiome pour les distances "géométriques" et est relié aussi en principe à une autre vérité d'évidence suivant laquelle "le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite".

IV.2. Le problème général de la réciproque de l'inégalité triangulaire

Dans le cadre de l'innovation "problème ouvert" de l'IREM de Lyon (cf. Arsac et al. 1988) le problème suivant avait été posé aux élèves de début de collège (classes de 5ème ou 4ème) :

Choisis trois nombres a, b, c ; est-il toujours possible de trouver un triangle dont les mesures des côtés soient ces trois nombres ?

ou encore :

Choisis trois nombres.
Essaie de construire un triangle dont les mesures des côtés soient ces trois nombres.
Cela est-il toujours possible quelque soient les trois nombres choisis ?
Si cela n'est pas toujours possible, quelle relation doivent vérifier ces trois nombres pour que cela soit possible ?

Ce problème a aussi été expérimenté à l'IREM de Bordeaux (IREM de Bordeaux, 1987) et est un classique du problème ouvert : il déclenche chez les élèves une activité de recherche intense et ils arrivent à produire des conjectures parmi lesquelles l'inégalité du triangle, mais aussi des conditions suffisantes comme *"chacun des plus petits côtés doit être plus grand que la moitié du plus grand côté"*.

La stratégie de base des élèves consiste à construire, à l'aide de la règle et du compas, un triangle ayant pour mesures des côtés les trois nombres donnés : l'affirmation de l'existence du triangle ou de la possibilité de sa construction est alors fondée sur le constat de succès de cette méthode. Dans toutes les classes, l'hypothèse d'impossibilité, même si elle n'est pas spontanément envisagée au départ par suite de la coutume scolaire (quand le maître demande de tracer un triangle ayant pour côtés trois longueurs données, c'est toujours possible et l'on y arrive par une construction standard utilisant la règle et le compas) finit par être envisagée et vérifiée. L'idée de l'inégalité apparaît également, mais lors du débat qui suit la recherche, les élèves butent sur la question suivante : l'inégalité doit-elle être large ou stricte ? Autrement dit, lorsque $a = b+c$, ils n'arrivent pas à décider s'il existe un triangle de côtés (a, b, c). C'est ce que nous appellerons le cas du triangle aplati.

Nous nous trouvons bien là devant un résultat "évident", reconnu comme tel historiquement, mais non vérifiable expérimentalement (au sens que nous avons donné à ce mot) par les élèves, alors que l'énoncé particulier "si l'inégalité est stricte, le triangle existe", apparaît comme vérifiable.

Dans le cas du triangle aplati, la difficulté de la vérification provient du fait que ayant tracé un côté, on est amené à la recherche de l'intersection de deux cercles qui sont en fait tangents extérieurement ou intérieurement. Il y a ambigüité sur l'existence et l'emplacement du point commun (est-il unique d'ailleurs ?) et vu la précision du tracé des élèves, beaucoup trouvent graphiquement que dans ce cas il existe réellement un triangle (non aplati) alors que d'autres "voient" immédiatement, avec ou sans dessin, que ce triangle n'existe pas et affirment, contre les certitudes graphiques de leurs camarades, en s'appuyant sur l'égalité a = b+c, que les deux cercles ne peuvent se couper qu'au point A du segment BC = a tel que AB = c et AC = b.

B________A________________C

D'autre part, une préexpérimentation (conduite dans la classe de collège de M.Mante, en 1987) nous avait conduit à observer un phénomène qu'apparemment personne n'avait signalé auparavant : des élèves considéraient que l'existence du triangle pouvait dépendre de l'ordre des côtés et répondaient par exemple que, en ce qui concerne le triplet (2, 3, 5), quand on prend pour base 2, le triangle existe, alors que si l'on prend pour base 3, il n'existe pas. Ceci nous a suffisamment surpris pour que nous ayions, après cette observation faite pendant la recherche du problème en classe, un entretien avec les quatre élèves du groupe concerné qui montre que nous avions bien saisi leur position : au cours de cet entretien, les élèves nous ont exposé par exemple que *"1, 3, 5, ça ne va pas avec 5, mais ça va avec 1"*. Ils nous ont précisé qu'ils désignaient par base du triangle, non pas le plus grand côté, comme nous l'avions cru tout d'abord, mais celui qu'ils tracent en premier pour faire la construction. Ici, c'est en somme le troisième cas d'égalité des triangles qui apparaît comme outil non disponible et comme autre axiome qui doit lui aussi être vérifié, d'une manière ou d'une autre.

Ainsi, nous savions que le problème posé permettait de faire apparaître la question de la vérification graphique et de ses limites, que la conception sur le rôle de l'ordre des côtés apparaissait chez certains élèves (chez d'autres elle n'apparaît absolument pas) et il nous semblait probable que le problème de savoir si un triangle aplati doit être ou non considéré comme un triangle apparaîtrait vraisemblablement. Mais nous avions pu observer aussi que, contrairement à ce qu'on pourrait penser spontanément, la situation associée à ce problème de l'inégalité triangulaire est très ouverte : de nombreux débats autres que ceux que nous venons de signaler peuvent apparaître qui risquent de les noyer. Par exemple, les débats se tournent volontiers vers l'arithmétique dans la mesure où, lorsqu'on dit aux élèves de choisir trois nombres, ils choisissent spontanément des nombres entiers. Ils cherchent alors à relier les propriétés géométriques de constructibilité des triangles à des propriétés de ces nombres n'ayant rien à voir avec l'inégalité triangulaire, par exemple le fait qu'il s'agit ou non d'entiers consécutifs. Nous avons même vu à la suite de la considération par certains élèves du cas d'un côté de longueur nulle apparaître un débat sur le fait que zéro est ou n'est pas un nombre ! On peut certes préciser dans l'énoncé que les nombres peuvent être décimaux, par exemple :

Est-il toujours possible, étant donné trois nombre décimaux, de tracer un triangle dont les mesures (en centimètres par exemple) de ses côtés soient ces trois nombres ?

Si ce n'est pas possible, quelle condition doivent vérifier ces trois nombres pour qu'il soit possible de tracer ce triangle ?

On voit alors apparaître des réponses du types suivant : "non ce n'est pas possible car avec des nombres décimaux de plus de 2 chiffres après la virgule, on ne peut pas faire un triangle avec des mesures exactes." Ce type de réponse engage le débat dans une voie très différente, qui bien entendu a son intérêt, mais il ne fait pas apparaître les questions que nous visons.

IV.3. Le cas du triangle aplati

De façon à centrer le débat sur le problème de l'utilisation du dessin comme outil de preuve, et après un certain nombre de préexpérimentations, nous avons choisi finalement de poser des énoncés du type suivant, portant directement sur le cas douteux de la constructibilité du triangle et dont nous pensions a priori qu'ils devraient conduire à des débats relativement clairs.

"Existe-t-il un triangle dont les côté mesurent a cm, c cm et b cm ?"

où a, b, c sont trois nombres réels strictement positifs tels que $c = a+b$ (nous avons choisi $a = 5$, $b = 4$ ou $a = 2$ et $b = 4$, etc...). Le nombre c est en général écrit en second pour éviter d'induire immédiatement la remarque que $c = a+b$.

Ces problèmes ont été expérimentés en classe et hors classe dans des conditions qui seront précisées lors de la description des résultats.

IV.4. Analyse a priori du point de vue de la validation

Nous allons faire une première analyse a priori de ces problèmes en nous centrant sur "le point de vue de la validation" (Margolinas, 1989), autrement dit en nous demandant s'il existe un "milieu" indépendant du maître auquel l'élève peut avoir recours pour tester la validité de son résultat. Nous serons amenés à faire, dans le cours de cette analyse, quelques hypothèses sur le comportement des élèves qui nous semblent raisonnables au vu des observations réalisées.

Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que la stratégie de base majoritaire sera celle qui consiste à essayer de construire le triangle à l'aide de la règle et du compas, suivant la méthode standard décrite plus haut. Trois cas peuvent alors se produire :

- C1 : les cercles ne se coupent pas
- C2 : les cercles se coupent en dehors du segment
- C3 : les cercles (tangents) se coupent exactement sur le segment.

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne le comportement des élèves qui font confiance au dessin qui résulte de la pratique graphique :

- H1 : l'éventualité C3 est exceptionnelle, vu la précision des tracés que peuvent effectuer des enfants de cet âge avec le matériel dont ils disposent et C2 est plus fréquente que C1, cette prédominance étant liée à la technique d'usage du compas des élèves (Verkerk, 1990).

- H2 : De plus, C2 correspond mieux à la coutume scolaire, donc devrait être préféré en cas de confrontation avec C1 ou C3. Par exemple, en cas d'apparition de C1, cette coutume devrait amener à remettre en doute le résultat, donc à effectuer un nouveau dessin dans lequel C2 a de grandes chances d'apparaître et d'éliminer C1 considéré comme une erreur. A fortiori, le même phénomène devrait se produire en cas de confrontation de C2 et C3. En cas de travail de groupe, il est peu probable que C2 n'apparaisse pas, vu sa fréquence. On devrait donc voir alors C2 dominer C1 et C3.

C'est donc la pratique graphique définie plus haut qui fournit ici le milieu cherché et l'essai de construction du triangle devrait conduire majoritairement vers la réponse : oui, le triangle existe. Ceci est conforté par ce qu'on sait des résultats de multiples préexpérimentations relatives à l'inégalité du triangle. Cependant cette conclusion ne peut être garantie, car la pratique graphique apparaît comme un milieu fournissant des réponses ambiguës (résultats contradictoires quant à l'existence du triangle ou tout au moins quant à sa forme).

Ces multiples préexpérimentations rendent aussi vraisemblable l'apparition, soit spontanée, soit suscitée par l'ambiguïté du milieu précédent, soit par l'apparition du résultat C3, d'expériences mentales (nous en discutons ci-dessous les caractéristiques) appuyées sur le fait que $c = a+b$ et aboutissant à la conclusion d'aplatissement. Ces expériences mentales devraient, pour autant qu'on puisse les décrire, consister à se représenter le tracé des deux cercles. Elles fournissent un deuxième milieu pour la validation.

IV.5. Caractéristiques de l'expérience mentale

Nous définissons a priori ce que nous appelons expérience mentale dans ce cas par les caractéristiques suivantes :

- l'affirmation soutenue par une expérience mentale est plus forte qu'un résultat contradictoire obtenu par la pratique graphique : dans l'expérience mentale, il y a soit absence totale de dessin, soit dessin symbolique, soit rectification de dessin, soit en cas de contradiction, affirmation que le dessin est faux.
- cette affirmation est mise en relation avec l'égalité entre la longueur du plus grand côté et la somme des longueurs des deux autres.

Bien entendu, l'expérience mentale s'oppose au recours à la pratique graphique quand les résultats obtenus sont divergents, mais les élèves n'ont pas de raison a priori de supposer que ces deux méthodes de validation conduisent à des résultats contradictoires : la rectification du dessin pourra être le moyen de faire coïncider les deux points de vue, ou encore, un dessin d'un triangle très aplati, mais pas complètement, pourra être vu comme approximation de ce qui devrait se passer. On peut s'attendre aussi à ce que la constatation graphique de l'aplatissement ou la difficulté à conclure puisse faire évoluer de l'expérimentation par le dessin à l'expérience mentale.

Du point de vue du langage, l'expérience mentale se traduira par des affirmations qui tendent à *anticiper* le résultat du tracé : ça *doit* se comporter de telle et telle manière...Remarquons que cette anticipation est spéciale en ce qu'elle prévoit le résultat d'un dessin parfait, infiniment précis, idéal, et pratiquement irréalisable. L'anticipation ne porte donc pas en fait sur les objets concrets du dessin mis en jeu dans la pratique graphique mais bien sur ceux de la géométrie dont le comportement peut être prévu par le raisonnement. Toutes les fois qu'il y a verbalisation de cette expérience, pour convaincre un autre élève ou pour répondre à une question de l'observateur, il s'agit d'une description statique ou dynamique, du dessin, mise en relation avec l'égalité relative aux trois longueurs données.

IV.6. Conclusions de l'analyse a priori

Finalement, le point de vue de la validation aboutit à la conclusion suivante : il existe deux milieux possibles pour la validation, l'un matériel, l'appel à la pratique graphique, l'autre interne, le recours à l'expérience mentale, le premier milieu présentant une certaine instabilité quant à ses réponses. Pour l'élève, ces milieux ne sont pas a priori contradictoires, ils ne le deviennent que lorsque, étant confrontés, ils fournissent de plus des réponses incompatibles au problème posé, ce qui devrait être le cas en général, le milieu matériel conduisant majoritairement à C2 et le milieu interne uniquement à C3.

V. Première série d'expériences hors classe

V.1. Conditions expérimentales

Il s'agit de l'observation du travail de deux élèves de cinquième confrontés à un même problème mettant en jeu l'inégalité du triangle. Après qu'ils l'aient résolu indépendamment, ils confrontent leurs résultats en présence d'un observateur, le prétexte à cette confrontation étant en général la demande par cet observateur de rédaction d'un message commun afin d'expliquer à d'autres ce qu'ils ont fait. Ensuite a lieu un entretien avec l'observateur. Tous les débats sont enregistrés et les conclusions ci-dessous (Gava, 1988) résultent du décryptage de ces enregistrements.

V.2. Première expérience

L'énoncé proposé est le suivant :

Indique toutes les remarques que tu peux faire à propos de la construction des trois triangles désignés au dos de cette feuille.
Triangle 1 : ses côtés mesurent 5 cm, 4 cm et 3 cm.
Triangle 2 : ses côtés mesurent 2 cm, 8 cm et 7 cm.
Triangle 3 : ses côtés mesurent 2 cm, 3 cm et 5 cm.

De plus, l'expérimentateur possède en réserve le triangle (8, 6, 14) qu'il soumettra éventuellement aux élèves pendant la phase de travail commun.

Les principales conclusions de cette première expérimentation, décrite en détail dans Gava (loc. cit.) sont les suivantes :

1) Elle permet de contrôler que la constatation expérimentale de l'aplatissement amène à recommencer le dessin pour que le triangle existe (hypothèse H3). Ici se situe une suite d'actions et de remarques particulièrement intéressantes des deux élèves, (désignées dans ce qui suit par Susan et Alberte), résumées ci-dessous dans l'ordre chronologique. Soulignons que cette suite d'actions se déroule sans intervention de l'observateur.

- comme Susan, pendant la phase de travail individuel, a tracé deux fois le triangle 2 et a oublié le triangle 3 (2, 3, 5), à la demande de l'expérimentateur, elle trace ce dernier en présence d'Alberte et constate l'aplatissement sur le dessin. Elle en conclut qu'elle s'est trompée dans les mesures : "*Hou là ! oh !, regarde! J'ai dû me tromper dans les mesures*".
- Elle refait alors un autre dessin où le triangle a "*une forme allongée*", mais existe.
- Alberte énonce alors la remarque suivante : "*J'ai trouvé que quand on additionne ça, parce que là, c'est 8, 7 et 2. Donc le total, ça fait 9 et puis y avait déjà une hauteur assez réduite. Là, il y a 5 et puis là, 3 plus 2 ça fait 5 et l'hauteur elle est encore plus réduite et pis là ça fait heu 5, là ça fait 4 et 3, donc ça fait 7...*"

Ainsi, conformément à l'analyse a priori, C3 est éliminé au profit d'un autre tracé faisant apparaître C2 et, plus étonnant, la conjecture d'Alberte, dont on pourrait attendre a priori qu'elle conduise à l'idée de l'aplatissement par "passage à la limite" (c'est-à-dire à une expérience mentale) ne sert qu'à expliquer l'allongement du triangle, renforçant finalement la confiance dans le dessin.

A part cela, cette première expérimentation montre effectivement les élèves aux prises avec l'instabilité du milieu matériel, c'est-à-dire affrontées aux réponses variables fournies par la pratique graphique. Elles constatent elles-mêmes cette variabilité, et y sont de plus renvoyées par les interventions de l'observateur qui les incite fortement à comparer leurs résultats et à prendre conscience des différences de tracés obtenus alors qu'elles ont le même énoncé. Ceci les amène même à mettre en cause le matériel :

Alberte : *...les règles elles ont pas les mêmes dimensions...*
Susan : *C'est peut-être les règles, j'sais pas...ou les crayons, parce que tout à l'heure on...on a trouvé...avec le crayon noir tout à l'heure, je sais pas si, c'est peut-être idiot, avec le crayon noir tout à l'heure, on a trouvé les mêmes dimensions, avec le crayon bleu des dimensions plus grandes...*

Il faut toutefois rappeler que cette mise en cause des crayons se fait en réponse à une demande d'explication pressante de la part de l'observateur.

V.3. Deuxième expérience

Les énoncés utilisés sont les suivants (les variantes d'un élève à l'autre sont signalées entre parenthèses) :

Parmi les triangles suivants, indique ceux dont la construction est possible et ceux dont la construction est impossible :

-Le triangle de côtés 8 cm, 7 cm, 2 cm (resp. 5 cm, 2 cm, 3 cm)
-Le triangle de côtés 5 cm, 3 cm, 2 cm (resp. 2 cm, 8 cm, 7 cm)
-Le triangle de côtés 4 cm, 5 cm, 6 cm (resp. 6 cm, 4 cm, 5 cm)
-Le triangle de côtés 5 cm, 4 cm, 9 cm (resp. 9 cm, 5 cm, 4 cm)
-Le triangle de côtés 14 cm, 8 cm, 6 cm (resp. 6 cm, 8 cm, 14 cm)

De plus, l'un des élèves dispose de papier blanc, l'autre de papier quadrillé, ce qui pourrait donner lieu à une analyse détaillée en termes de variables didactiques qui ne sera pas faite ici. Remarquons simplement que l'énoncé ne propose pas de triangle "franchement inconstructible", mais que l'expérimentateur se réserve la possibilité d'en introduire pendant la phase de confrontation. En fait, dès la phase de recherche personnelle, l'expérimentateur proposera à l'un des élèves désigné par Charles, le triangle (9, 4, 3) et à l'autre, désigné par Simon, le triangle (3, 9, 4).

Cette deuxième expérimentation confirme à nouveau l'instabilité des réponses du milieu matériel car :

- lors de la confrontation des résultats, pour Charles, (8, 7, 2) (4, 5, 6) et (8, 6, 14) sont constructibles, alors que (5, 3, 2) et (5, 4, 9) sont inconstructibles, tandis que pour Simon, (2, 8, 7) (6, 4, 5,) et (9, 5, 4) sont constructibles, alors que (5, 3, 2) et (6, 8, 14) sont inconstructibles.
- après les remarques de l'expérimentateur sur le caractère contradictoire de certains résultats, les élèves reprennent à l'aide du dessin l'étude des cas litigieux (8, 6, 14) et (9, 5, 4) et aboutissent à un accord total : le premier n'est pas constructible, alors que le deuxième l'est.
- l'observateur intervient alors dans le débat des élèves en faisant remarquer que l'on a $8 + 6 = 14$ et $5 + 4 = 9$ et que pourtant les élèves ont classé ces deux triangles dans deux catégories différentes.

A la suite de cette remarque, les élèves finiront par énoncer et utiliser ce critère d'aplatissement, mais les interventions de l'observateur sont ici trop lourdes pour que l'on puisse tirer des conclusions assurées.

V.4. Troisième expérience

Deux binômes d'élèves travaillent d'abord indépendamment sur les énoncés suivants :

1er énoncé

a) Est-ce qu'il existe un triangle de côtés (7, 9, 6) ?
b) Est-ce qu'il existe un triangle de côtés (4, 9, 3)?
c) Parmi les triangles suivants, reconnaître ceux qui existent et ceux qui n'existent pas :
- triangle 1 de côtés (3, 6, 1).
- triangle 2 de côtés (4 ,7 ,3).
- triangle 3 de côtés (6, 8, 5.)
- triangle 4 de côtés (5, 9, 4)

Vous aurez à vous mettre d'accord sur le résultat pour l'expliquer à vos camarades de l'autre groupe.

2ème énoncé (dont l'existence n'est mentionnée aux élèves que lorsqu'ils considèrent qu'ils ont terminé leur travail sur le premier)

Comment est-ce qu'il faut choisir trois nombres (positifs et différents de zéro) pour être sûr que le triangle de côtés ces trois nombres existe ?

Les conditions précises d'expérimentation sont les suivantes : les deux binômes travaillent dans deux salles séparées, dans chaque salle un observateur enregistre les débats mais n'intervient pas dans la résolution des problèmes, après quoi les quatre élèves se retrouvent pour confronter leurs résultats sur les deux problèmes en présence des deux observateurs toujours neutres. Ensuite seulement, l'observation est complétée par une interview. Comme nous nous attendons à ce que, conformément à ce que nous avons relaté au § précédent, il y ait des chances pour que les deux groupes soient d'accord sur l'inégalité large du triangle (cf § IV ci-dessus), nous avons prévu une fausse production pour relancer le débat (cf le compte rendu d'expérience ci-dessous).

Effectivement, les deux groupes aboutissent à l'inégalité triangulaire large, avec suffisamment de confiance pour l'utiliser, sans revenir au dessin, comme critère de décision pour certains des triangles proposés. Voici l'énoncé sur lequel le groupe 1 s'est mis d'accord :

Pour choisir les mesures d'un triangle, il faut que la somme des deux plus petits côtés soit égale ou supérieure au plus grand côté.
Ex : les mesures 6, 9, 1 sont impossibles car 6 + 1 = 7 et 7 < 9.
les mesures 6, 9, 4 sont possibles car 6 + 4 = 10 et 10 > 9.

On peut même remarquer que le groupe 1 s'est mis d'accord sur cet énoncé en n'utilisant que la règle comme instrument de dessin : ce n'est qu'à la fin de la recherche qu'ils se sont aperçus qu'ils avaient aussi un compas.

Le groupe 2 lui, énonce :

Il ne faut pas que le total des deux nombres inférieurs par rapport au premier soit plus petit que le premier nombre choisi.

Dans les deux groupes, l'existence des triangles "aplatis" proposés dans les énoncés ne fait pas de doute : il s'agit bien de vrais triangles, non aplatis...

Le débat entre les deux groupes tourne rapidement court, puisqu'il y a accord. Conformément à ce qu'ils avaient prévu, les observateurs exhibent alors une réponse au premier problème, soi-disant élaborée par un autre groupe d'élèves : il s'agit de constructions à la règle et au compas des quatre triangles du problème 1 dans lesquelles apparaît l'aplatissement des triangles 2 et 4.

Les quatre élèves sont alors troublés et remettent en cause leurs résultats, ils énoncent même la règle correcte de l'inégalité (stricte) du triangle et sont à un moment tous quatre d'accord sur le fait qu'ils se sont trompés, cependant, après une longue série de vérifications graphiques, ils sont à nouveau persuadés que finalement c'est leur position initiale qui est la bonne. Paradoxalement, ils soulignent eux-même l'instabilité des résultats de la vérification graphique :

"...y z'ont pas fait exact la bonne mesure. Non mais ça n'empêche qu'à un mm près ça peut tout tromper hein ?"

Pendant la phase d'interview qui suit, ils reviendront sur ce point :

On a vérifié les mesures et on a refait les dessins et puis au millimètre près, on a vu que ça pouvait tout changer les dessins...

Lorsqu'un des observateurs suggère de refaire les triangles 2 et 4 sur une feuille de papier quadrillé, après avoir lourdement insisté qur le fait que chaque carré fait un demi-centimètre, l'exécution des dessins ne remet pas en cause leur conviction : une seule construction donne expérimentalement l'aplatissement de (5, 9, 4) qui est immédiatement attribué à une erreur de mesure, et compensé par un autre dessin sur lequel le triangle existe. L'observateur continue sa pression sur les élèves en dessinant explicitement lui-même sur papier quadrillé les trois sommets alignés du triangle (5, 9, 4), mais ceci ne suffit pas à les convaincre et ils maintiennent que dans ce cas, le sommet est juste au dessus...Seule la persistance de la pression des observateurs finira par amener les élèves à l'inégalité stricte du triangle.

V.5. Conclusion sur cette première série d'expérimentations

Cette première série d'expériences met bien en évidence la confiance dans le dessin, c'est-à-dire le recours au milieu matériel pour la validation, mais aussi l'instabilité des réponses de ce même milieu ; de ce point de vue, le travail des quatre élèves de la troisième expérience est tout à fait étonnant : ils effectuent une multitude de dessins en lesquels ils ont pleine confiance, tout en soulignant explicitement la fragilité de ce genre de preuve ! L'apparition spontanée, lorsque la question est abordée, de l'inégalité large du triangle est également confirmée.

Le problème de l'ordre des côtés n'apparaît de manière significative que dans la deuxième expérience, mais chez une seule des deux élèves, et celle-ci se rend assez rapidement aux arguments de l'autre.

Dans ces expérimentations, les élèves étaient choisis au hasard, de sorte que l'accord entre eux se faisait en général sans trop de difficulté sur le choix de la procédure de vérification graphique. Comme des expérimentations en classe nous avaient montré l'apparition d'expériences mentales, nous avons mis en place une deuxième série d'expériences hors classe dans lesquelles le but visé est d'observer des binômes où l'un des élèves pratique le recours au dessin, alors que l'autre procède à une expérience mentale.

VI. Deuxième série d'expériences hors classe

La deuxième série d'expérimentations hors classe (Verkerk, 1990) comporte d'abord une enquête dont le but est d'identifier dans une classe de cinquième donnée des élèves recourant à chacune des deux méthodes envisagées :

- construction effective à la règle et au compas.
- expérience mentale.

Cette enquête, dont le texte figure en annexe, se présente aux élèves comme l'analogue d'un test scolaire dont il est précisé toutefois qu'il ne sera pas noté et qu'il rentre dans le cadre d'une recherche pour laquelle on sollicite la coopération des élèves. La question posée n'est pas exactement celle qui nous intéresse, car on ne désire pas attirer a priori l'attention des élèves sur elle : on demande aux élèves d'estimer directement, en nombre de carreaux d'un quadrillage de dimensions imposées, l'aire de triangles dont on donne la mesure des côtés, soit ici (3, 4, 5), (9, 5, 4) et (1, 4, 5). La construction des triangles apparaît donc comme un outil pour résoudre la question et permet de repérer, à partir du simple examen de la réponse, les élèves qui repèrent l'aplatissement des deux derniers triangles : la réponse dans ce cas sera zéro carreaux et sera éventuellement confirmée, soit par un dessin montrant un triangle aplati, soit par l'absence de dessin. Comme la réponse attribuant aux triangles une aire nulle est certainement inhabituelle, elle comporte une rupture de contrat didactique dont nous pensons qu'elle doit indiquer chez l'élève une assez forte conviction de l'aplatissement sans doute due à une expérience mentale.

Comme nous l'avons déjà dit, si nous distinguons deux méthodes de validation chez les élèves, nous ne faisons pas pour autant l'hypothèse qu'elles sont exclusives l'une de l'autre : ce qui nous intéresse c'est de trouver des élèves qui perçoivent l'aplatissement d'au moins l'un des deux derniers triangles. Nous espérons que chez eux l'expérience mentale est disponible dans certaines situations, ce qui n'implique pas pour autant qu'ils en fassent un usage systématique.

Cette enquête préalable permet de sélectionner des binômes d'élèves choisis pour avoir, l'un reconnu l'aplatissement et l'autre pas. Ils ont alors à répondre à la question de l'existence d'un certain nombre de triangles : (2, 4, 6) (3,5 ; 2,7 ;6,2) (7,5 ; 3,1 ; 4,3) (27, 4, 31) (16 ;7,2 ; 8,9). Sans entrer dans le détail de l'analyse a priori (Verkerk, 1990) signalons que bien entendu, plusieurs variables didactiques sont ici exploitées. Nous nous contenterons de les repérer par leurs effets. Soulignons toutefois que le triangle de côté 31 cm est évidemment là pour forcer l'anticipation, donc l'évolution vers l'expérience mentale : en effet, le plus grand côté tient dans la feuille suivant la diagonale, mais est trop long pour que l'usage du compas soit possible (sauf si les élèves disposent d'une rallonge).

VI.1. Premier binôme : l'évolution des points de vue et ses motifs

Dans une classe de cinquième faible, aucun élève n'a mis en évidence l'aplatissement des deux derniers triangles (ceci est une difficulté, à signaler, pour les situations didactiques fondées sur l'opposition des deux points de vue). L'expérience sera donc réalisée avec deux élèves, Marc et Benjamin, qui tracent correctement des triangles (en fait, il apparaîtra en cours d'expérience que Benjamin avait perçu l'aplatissement, sans l'exprimer dans sa réponse écrite). L'enjeu principal de l'expérience sera d'examiner si la construction du triangle (27, 4, 31) peut déclencher une évolution vers l'expérience mentale.

Conformément à ce qu'on pouvait attendre, les constructions des trois premiers triangles proposés par l'expérimentateur avant le triangle (27, 4, 31) se font avec une confiance totale dans le dessin. Lorsque, pour l'un des triangles, les deux élèves obtiennent des tracés manifestement différents, ils n'arrivent pas à en fournir une explication, sauf en supposant une erreur de mesure qu'ils ne mettent pourtant pas en évidence.

La construction du triangle (27, 4, 31) leur apparaît d'abord comme une tâche matériellement impossible, vu les outils de dessin dont ils disposent, mais ils songent à faire la construction à l'échelle 0,5, donc à tracer le triangle (13,5; 2; 15,5). En comparant les résultats divergents de leurs dessins, Benjamin est amené à réfléchir et apparaît alors un discours typique de l'expérience mentale : *"non, c'est bon, t'as raison, normalement il doit être plat (...) Il doit pratiquement être plat normalement, regarde là tu as 13 euh 15,5 en longueur et 13,5 plus 2 ça fait 15,5...Normalement, ça doit être une droite."*

Ainsi, le passage à l'expérience mentale a bien coïncidé avec le travail sur (27, 4, 31). Cependant dans la mesure où ce travail est passé par l'intermédiaire d'une réduction à l'échelle, il est difficile de conclure en ce qui concerne l'efficacité du "saut informationnel" que représente la donnée de ce triangle. En fait, la constatation de la divergence des dessins, jointe au caractère très aplati du triangle tracé par Marc, a peut-être suffi pour déclencher un changement chez Benjamin lequel, de toutes façons, est beaucoup plus convaincu que Marc du fait que le résultat du tracé est unique, en particulier indépendant de l'ordre des côtés.

Cette expérience a aussi permis de mettre en évidence, lors de l'entretien qui l'a suivie que, chez les élèves, la construction des triangles à l'aide de la règle graduée et du compas est entièrement algorithmisée et complètement détachée de son lien avec les propriétés du cercle : c'est une technique qui est efficace mais dont la justification n'est pas présente à l'esprit des élèves.

VI.2. Deuxième binôme : le lien entre les deux types de raisonnement

Ce binôme, ainsi que les deux suivants, est issu d'une classe de cinquième dans laquelle quatre élèves sur trente ont tracé au moins un triangle plat. L'expérimentateur a constitué trois binômes en rassemblant dans un même binôme, à titre exceptionnel, deux élèves qui avaient toutes deux constaté l'aplatissement. C'est le travail de ce premier binôme qui est décrit ici.

Après avoir construit un triangle constructible proposé par l'expérimentateur, Sandrine et Séverine se voient proposer le triangle aplati (2, 6, 4) et sans tracé, sont d'accord sur le fait qu'il n'existe pas parce que 4 + 2 = 6, *"donc ça fait une droite"*, *"c'est logique"*. Le triangle (3,5 ; 2,7 ; 6,2) sera reconnu également comme aplati pour la même raison, mais seulement après des tentatives de tracé donnant des résultats divergents.

En revanche, le triangle (27, 4, 31) va faire apparaître des différences de comportement significatives entre les deux élèves : elles constatent qu'elles ne peuvent pas mettre en œuvre la procédure de construction habituelle à l'aide du compas, Séverine anticipe alors le résultat qu'aurait donné cette construction : elle trace à la règle un segment de 31 cm et marque le point où les arcs ce cercle se rejoindraient : *"31 on va faire comme ça, les points là, ils vont se toucher ici, donc là il y aura 4 cm et là il y aura 27"*. Au contraire, Sandrine n'est pas convaincue, en l'absence de construction effective, elle n'arrive pas à anticiper le résultat : *"ils se croiseraient peut-être par là si on pouvait arriver à faire un arc de cercle, ils se croiseraient peut-être par là ? Ça serait peut-être bon, je ne sais pas."*

D'après les commentaires des deux élèves (Verkerk, 1990), cette différence de comportement provient à la fois d'une différence dans le résultat de l'expérience mentale (pour Sandrine, dans le cas où le triangle est aplati, les arcs de cercle n'ont aucun point commun, alors que pour Séverine, comme on l'a vu, ils se rejoignent sur le segment initialement tracé) et de la confiance relative accordée respectivement à l'expérience mentale et au tracé : pour Séverine, en cas de contradiction, c'est l'expérience mentale qui l'emporte, alors que pour Sandrine, le dessin peut l'emporter sur l'expérience mentale. En ce sens, Sandrine n'est pas encore véritablement au stade de ce que nous avons appelé expérience mentale (elle conçoit d'ailleurs des cercles sans points communs dans le cas aplati).

VI.3. Troisième expérience : l'opposition tranchée des deux points de vue

Le binôme est ici constitué de deux élèves dont l'un, Christophe, a noté les triangles aplatis, sans même en achever la construction, alors que l'autre, Lorraine, a tracé soigneusement deux triangles presque plats.

Après le tracé de (7,2 ; 8,9 ; 16) sans difficulté ni commentaire par les deux élèves, le triangle (2, 6, 4) révèle les raisonnements radicalement différents des deux élèves. Le comportement est ici étroitement corroboré avec le discours : Lorraine construit un triangle presque plat, alors que Christophe ne trace rien. A la question de l'existence, leurs réponses sont les suivantes :

- Lorraine : *moi je dis oui.*
- Christophe : *moi, je dis non. Non, normalement c'est impossible.*

Devant l'étonnement de Lorraine, il justifie son opinion :

"Si tu as un côté du triangle qui fait 6 cm, tu prends 2cm + 4 cm, ça fait 6cm, donc ça fait une droite, un segment"

La suite du dialogue est de la même veine :

Lorraine : *oui, mais si je le construis au compas, ça serait, ça ferait bien...*
Christophe (l'interrompant) : *oui, mais ce n'est pas juste, c'est pas précis en tout cas, logiquement, c'est ça.*

On pourra se convaincre, en consultant Verkerk (1990), que le dialogue offre de manière presque caricaturale l'opposition entre l'assurance fondée sur l'expérience mentale et la confiance dans la constatation sur le dessin. Aux arguments de Christophe sur la logique, sur l'inévitabilité du résultat, sur l'inutilité de regarder le dessin, tels que :

Logiquement, c'est ça, mais peut-être pas sur le dessin.

Lorraine oppose son expérience personnelle :

Ben parce que moi, avec mon compas, ça se croisait pas là sur mon segment de 6 cm mais plus haut.

Le même débat se renouvelle à propos d'un autre triangle aplati (Verkerk, 1990), mais ici Lorraine finit par admettre le résultat de Christophe à condition de le traduire sur le dessin :

Si j'avais été plus précise, ça se serait rejoint ici.

Entraînés par le contrat expérimental qui s'est créé avec l'observateur, les deux élèves reconnaissent ensuite comme aplati un triangle qui est en fait inconstructible (de peu...), mais l'apparition de (27,4, 31) montre que Lorraine est encore loin d'avoir adhéré à la position de Chritophe ; elle constate qu'elle ne peut pas répondre à la question de l'existence faute de pouvoir faire le dessin :

Moi, je ne peux pas, moi, ben le compas.

Ce n'est qu'ensuite qu'elle se rallie à la position de Christophe.

Au total, l'expérience montre une évolution progressive de la position de Lorraine vers celle de Christophe, elle a surtout l'intérêt de montrer combien les positions des élèves peuvent être tranchées au départ.

VI.4. Quatrième expérience : le lien entre les deux types de raisonnements

Les deux élèves choisis sont Lionel qui a semblé faire confiance au dessin dans ses réponses au test et Sébastien qui, tout en répondant que les deux triangles aplatis contiennent "zéro carreau" a cependant fourni des dessins qui laissent un doute sur la nature de son raisonnement.

Au début, les deux élèves font confiance à leurs dessins pour affirmer l'existence d'un triangle constructible et l'inexistence de (2, 6, 4), mais en fait cette dernière affirmation repose sur l'accord sur un tracé où les cercles de construction n'ont aucun point commun, il ne s'agit pas d'un constat d'aplatissement.

Pour le triangle suivant (3,5 ; 2,7 ; 6,2), Lionel fait un tracé précis qui lui permet de constater l'aplatissement, alors que Sébastien trouve un triangle. Mais aussitôt, Sébastien reconnaît :

Ouais, il se trouve sur la droite, oui moi j'ai pris 6,2 au début et ça fait pile une droite (...) parce que 3,5 et 2,7 font 6,2 donc ça on aurait pas dû y faire le triangle. Sans faire le triangle, on aurait pu deviner en faisant les calculs.

Ainsi, Sébastien utilise l'expérience mentale pour conforter une constatation lue sur le dessin, contrairement aux élèves qui se fient au dessin dont on a vu que en général ils remettent en cause les tracés donnant des triangles aplatis. Pour Sébastien, en quelque sorte, l'expérience mentale pallie l'instabilité du milieu matériel. D'ailleurs, pour le triangle suivant qui est inconstructible de peu (de 1mm), après quelques essais qui donnent, contrairement à ce qu'ils avaient prévu, un triangle inconstructible, les deux élèves arrivent à énoncer l'inégalité triangulaire générale.

Pour le triangle (27, 4, 31), le binôme commence une fois de plus par essayer de dessiner, puis devant l'impossibilité de tracer au compas un cercle de rayon 27 cm revient à la règle tirée de l'expérience mentale :

Lionel : *(...) attend, on n'a pas essayé notre soustraction, et je crois que...*

Sébastien (l'interrompant) : *27 et 4, 31, ça fait une ligne droite pas besoin de le faire, ça fait une ligne droite.*

L'activité de ce binôme nous montre comment l'expérience mentale peut être appelée à la rescousse lorsque les élèves ressentent le besoin de fortifier une conjecture tirée du dessin et, au début en tous cas, uniquement dans ce cas, comme en témoigne l'erreur sur le triangle (2, 6, 4).

VI.5. Conclusion générale de cette deuxième série d'expériences hors classe.

Les observations faites confirment l'instabilité du milieu matériel, mais ici l'apparition dans chaque binôme du recours à l'expérience mentale permet surtout de tirer d'autres conclusions : les conditions expérimentales choisies permettent de vérifier l'existence de raisonnements du type expérience mentale chez les élèves de l'âge concerné (12 ans), tout en montrant que ce type de raisonnement peut être rare, voire ne pas apparaître du tout dans certaines classes. L'une des questions posées dans le travail de Verkerk (loc. cit.) était l'identification de cette expérience mentale. En fait, les observations permettant d'inférer la nature de l'expérience mentale (sans doute une action intériorisée) utilisée par les élèves sont peu nombreuses et non décisives, c'est pourquoi il nous semble préférable de nous en tenir à des critères de comportement objectifs prouvant l'expérience mentale sans vouloir en décrire la nature.

Un autre apport de cette deuxième série d'expériences hors classe est le caractère très complexe des types de raisonnement des élèves, entre les deux modèles "purs" représentés par Christophe et Lorraine, tous les intermédiaires sont probablement possibles. On en a vu quelques échantillons.

La confrontation entre l'expérience mentale et la lecture du dessin tourne toujours à l'avantage de la première, mais évidemment on ne peut pas en tirer une conclusion générale vu le petit nombre d'élèves observés.

En ce qui concerne le problème de l'ordre des côtés, il apparaît chez un élève de la première expérimentation mais est rapidement réglé lors de la confrontation avec l'autre et de l'évolution vers l'expérience mentale. Il apparaît également, mais pour être encore plus rapidement réglé, dans le troisième binôme (cf Verkerk, 1990). Il est vrai que nous n'avons jamais rencontré cette conception chez des élèves pratiquant l'expérience mentale et que celle-ci est toujours dominante.

VII. Expérimentations en classe

VII.1. Le scénario

Le problème du triangle aplati a été utilisé systématiquement en classe dans le cadre d'une recherche menée à l'IREM de Lyon sur l'initiation au raisonnement déductif au collège (Arsac et al, 1992). Le but recherché était de mettre en garde les élèves contre la lecture directe du dessin, en montrant que cette lecture directe ne permet pas de conclure. La *situation de classe* expérimentée vise donc seulement à mettre en évidence l'insuffisance du milieu matériel pour arriver à une conclusion, sans chercher à forcer l'apparition d'une expérience mentale (par exemple par la proposition d'un triangle a priori matériellement impossible à construire). Son fonctionnement repose sur l'hypothèse de l'apparition dans toutes les classes des deux types de validation : pratique graphique et expérience mentale. Dans le cas, rare a priori, où l'expérience mentale n'apparaîtrait pas, il est prévu de lancer le débat en utilisant une affiche censément produite par les élèves d'une autre classe comme en V.4.

L'énoncé utilisé était le suivant :

Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?

L'organisation de la classe est la suivante : dans un premier temps, les élèves recherchent le problème par groupes de quatre et rédigent une affiche par groupe, présentant leur solution et des explications à l'appui de cette solution en vue de convaincre leurs camarades, dans un deuxième temps les élèves débattent collectivement de la validité des solutions proposées et surtout des arguments présentés pour et contre ces solutions, ce qui nécessite une organisation rigoureuse du débat.(cf Arsac et al, 1992). Le but est de permettre à l'enseignant d'institutionnaliser la règle suivante :

En géométrie, un dessin ne suffit pas à conclure

On ne peut évidemment pas s'attendre à ce que les élèves énoncent une telle règle et, de toute manière, même si un énoncé voisin peut éventuellement apparaître chez les tenants de l'expérience mentale, il n'y a pas de raison pour qu'il convainque toujours les partisans de la vérification par le dessin. Il est donc prévu que cette conclusion puisse être tirée par l'enseignant lui-même comme leçon de l'enlisement du débat.

D'autre part, comme toutes les préexpérimentations montrent que le problème de l'ordre des côtés ne se règle pas facilement, ni surtout rapidement par un débat entre élèves, le scénario prévoit que si la question est soulevée par une affiche au moins, l'enseignant interviendra assez vite dans le débat à ce propos et proposera de vérifier expérimentalement que, à partir des mesures correspondant à un triangle "nettement constructible" (par exemple 10, 5, 8), la construction effectuée en commençant successivement par les trois côtés conduit à des triangles ayant tous la même forme, c'est-à-dire superposables, ce qui peut être vérifié par découpage, par transparence, à l'aide d'un calque, etc...Ensuite, l'enseignant énoncera clairement la règle suivant laquelle le résultat de la construction ne dépend pas de l'ordre des côtés afin de pouvoir revenir à un débat centré sur le problème de la confiance à accorder au dessin.

Ici, les expérimentateurs introduisent donc un recours au milieu matériel : lorsqu'on construit un triangle dont on connaît les trois côtés, les dessins obtenus sont tous superposables quel que soit le côté tracé en premier. Mais ce constat est effectué sur un seul triangle, or à l'occasion d'une situation problème précédente, utilisant un cadre arithmétique, les élèves ont appris que des exemples ne suffisent pas à prouver (Arsac et al., loc. cit.), il est donc prévu que l'enseignant précise qu'il demande aux élèves d'admettre que le même résultat est vrai pour tout triangle, ce qui revient à demander aux élèves de considérer l'exemple traité comme générique. Le fonctionnement de la situation suppose que, une fois ce constat institutionnalisé par l'enseignant, les élèves l'utiliseront pour éliminer les réponses dans lesquelles l'existence des triangles dépend de l'ordre des côtés. Notons que ce choix de gestion de la classe est évidemment lourdement influencé par les contraintes du temps.

Ainsi, ce traitement de "l'ordre des côtés" renvoie à la fois au problème de la vérification expérimentale des axiomes et à celui du contrat didactique : on fait appel au milieu matériel, dans un cas où on considère que sa réponse sera sans ambiguïté, puis à un contrat didactique explicite, pour faire admettre comme "évidente" l'indépendance par rapport à l'ordre des côtés.

VII.2. Résultats de l'expérimentation

Nous énumérons tout d'abord brièvement, en renvoyant à Arsac et al. (loc cit.) les résultats qui recoupent ceux obtenus dans les expériences hors classe :

- instabilité du milieu matériel.
- apparition de l'expérience mentale dans la très grande majorité des classes. (dix sur les onze observées).

Ces deux résultats se déduisent de l'observation des mêmes comportements que dans les expériences hors classe : multiplication des dessins dans le cas de la référence au seul milieu matériel, rareté ou absence des dessins en cas de référence à l'expérience mentale, différence dans le style des affirmations (cf Arsac et al, loc. cit.). En général, également, l'expérience mentale s'impose, mais ceci est moins net dans la mesure où ce triomphe est désiré par l'enseignant qui peut donc avoir tendance à le favoriser.

En ce qui concerne non plus l'aspect cognitif, mais les propriétés de la situation de classe, un premier résultat est le fait que, du point de vue des élèves faisant a priori confiance au dessin, le débat ne remet en cause le recours au milieu matériel, que si l'expérience mentale est là pour indiquer une autre possibilité. Sinon, les élèves se heurtent bien à l'instabilité du milieu matériel, mais il n'en résulte pas pour autant qu'ils entrevoient une autre possibilité. Ce problème peut demeurer même après que l'enseignant ait mis en cause le recours au dessin en géométrie. Il s'agit là d'un problème classique de dépassement d'une contradiction (Balacheff, 1977), dont témoignent bien les réflexions suivantes d'une élève :

Elle constate d'abord l'instabilité des réponses du milieu matériel :

Ça me saoule, j'ai fait 36 000 fois, je trouve 36 000 choses différentes.

Puis après que l'enseignant ait souligné qu'un dessin ne peut pas servir de preuve, elle conclut, à la fin de la séance :

Mais qu'est-ce qu'on peut trouver comme preuve alors ?

Alors qu'un autre élève conclut plus brutalement :

Ça fout un coup !

Même si le dilemne posé par la confiance à accorder respectivement aux deux milieux apparaît clairement chez certains élèves, ils ne le théorisent évidemment pas et c'est l'enseignant qui doit tirer cette leçon de l'enlisement des débats. Souvent de plus cette remarque n'apparaît qu'au sein des groupes, et n'est pas rapportée dans le débat public.

Autrement dit, il s'agit d'une situation négative en ce sens qu'elle vise à remettre en cause la confiance dans le milieu matériel, mais ne comporte pas de leçon positive et globale sur la relation entre graphique et raisonnement en géométrie.

VII.3. La gestion de la classe et le problème de l'ordre des côtés

La gestion de la classe prévue par le scénario soulève essentiellement deux problèmes :

- l'enseignant doit juger à quel moment le débat est perçu par les élèves comme sans issue, ce qui lui permet alors de dégager clairement que le recours au dessin ne permet pas de conclure.
- il doit gérer le problème de l'ordre des côtés.

La gestion du premier point n'apparaît comme délicate que lorsque l'expérience mentale n'apparaît pas du tout. Dans la seule classe où se produit ce phénomène, une complication supplémentaire apparaît : un groupe constate de plus sur le dessin l'aplatissement quand on commence par la "base" 9, mais trouve que le triangle existe quand on prend pour point de départ de la construction les côtés de mesure 5 ou 4 (parmi tous les groupes observés dans les différentes classes, c'est le seul cas de ce type).

Cependant, le point le plus délicat à gérer est le traitement du problème de l'ordre des côtés. La connaissance introduite dans la classe par l'enseignant quant à l'indépendance par rapport à l'ordre de construction conformément au scénario proposé se révèle fragile et instable. Ceci n'est d'ailleurs pas étonnant dans la mesure où il s'agit d'une connaissance plaquée visant à remplacer une conception (suivant laquelle l'existence et la forme du triangle dépendent de l'ordre de construction) qui s'avère fortement ancrée chez les élèves. L'enjeu de la situation du triangle aplati est d'ailleurs suffisamment fort pour que, même une connaissance qu'on pourrait considérer comme "acquise", à savoir le fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°, soit remise en cause : pour contester le triangle dessiné par un camarade, certains élèves affirment que la somme de ses angles ne vaut pas 180°, donc que c'est un *"triangle faux"*.

Nous allons détailler maintenant sur l'exemple d'une classe particulière les difficultés typiques qui apparaissent à propos de ce problème de l'ordre des côtés :

- dans un premier temps, les élèves effectuent les constructions demandées par l'enseignant : ils tracent le triangle (10, 5, 8) en commençant successivement par les trois côtés et vérifient ensuite par transparence que les dessins obtenus coïncident. L'enseignant déclare alors que dorénavant, on sera d'accord sur le fait que, quel que soit l'ordre de construction, on obtient toujours le même triangle.
- mais dans un deuxième temps, lorsque l'enseignant demande d'expliquer pourquoi ils n'obtiennent cependant pas toujours le même résultat dans le cas (9, 5, 4) la réponse fuse :

parce que $9 = 5+4$.

- l'enseignant accepte alors que la même expérience soit tentée avec le triangle (10, 6, 4) et ici, de nouveau, la classe n'est plus unanime à reconnaître l'indépendance expérimentale par rapport à l'ordre de construction.

En fait, ce phénomène aurait pu être prévu à partir des propriétés du milieu matériel :

- pour les triangles nettement constructibles, il renvoie des réponses sans ambiguïté, et les élèves acceptent dans ce cas de tenir compte des imprécisions éventuelles, des limites de la précision du tracé.
- pour les triangles aplatis, on retombe sur l'ambiguïté des réponses du milieu.

Ce qui était moins prévisible, c'est le refus des élèves, malgré l'intervention de l'enseignant, de transférer le résultat acquis, (c'est-à-dire du point de vue mathématique le troisième cas d'égalité des triangles) dans le cas constructible au cas aplati. En fait, le problème de stabilité du milieu se double d'un problème de contrat : il y a dévolution aux élèves du problème du triangle aplati, qui se manifeste par un engagement souvent passionné des élèves, et ceux-ci n'acceptent pas un intermède où l'enseignant reprend, ne fut-ce que provisoirement, la direction des opérations.

On peut d'ailleurs supposer que ceux qui sont convaincus de l'indépendance par rapport à l'ordre des côtés par l'expérience sur un seul triangle sont ceux chez qui cette expérience apparaît comme un modèle d'expérience mentale, donc générique et qui sont peut-être majoritairement ceux qui avaient déjà conclu à l'aplatissement du triangle.

VIII. Conclusions

Les expériences hors classe et les expériences en classe apportent des éléments de réponse aux questions posées au § III :

- sur le caractère d'évidence de certaines propriétés géométriques (axiomes) et la possibilité de leur vérification, les résultats expérimentaux confirment, dans le cas du triangle aplati, les remarques épistémologiques de Granger (1992), mais dans un cadre restreint à la géométrie plane et à la vérification graphique : l'expérience proprement dite n'est pas concluante, seule l'expérience mentale permet d'accéder à une certitude, mais elle n'est pas disponible chez tous les élèves. Remarquons que l'accès à cette expérience suppose implicitement que l'élève adopte un certain statut pour les objets sur lesquels portent ses affirmations : il ne s'agit plus de traits tracés sur une feuille de papier, comme en témoignent le refus de prise en compte des dessins quand ils sont contradictoires avec l'expérience mentale.

Cette première conclusion soulève différentes questions : l'expérience pourrait-elle être concluante en utilisant un milieu matériel autre que le dessin (matériel tel qu'allumettes, ou environnement informatique) ? Les résultats obtenus éventuellement avec un autre milieu seraient-ils transférables au papier-crayon, ce dernier a-t-il un rôle privilégié dans l'apprentissage de la géométrie ?

La situation est compliquée par le fait que la vérification par recours au milieu matériel semble fiable du point de vue des élèves pour le problème de l'ordre des côtés, tout au moins semble-t-elle avoir un domaine de validité (triangles "nettement constructibles") qui n'est malheureusement pas défini en termes mathématiques. Toutefois cette conclusion, issue d'une observation au cours de séquences expérimentales qui n'avaient pas été conçues à cette fin, demande confirmation.

- en ce qui concerne la possibilité pour l'enseignant de déclarer clairement que certaines propriétés seront considérées comme vraies ou évidentes, nous avons vu, avec le traitement du problème de l'ordre des côtés, que son efficacité est réduite dans les conditions particulières où nous nous sommes placés, c'est-à-dire quand elle introduit une rupture, qui se veut pourtant momentanée, dans un processus de dévolution et qu'elle s'oppose de plus à une conception fortement ancrée chez certains élèves.

On peut conclure de cela que ce n'est pas une bonne tactique de vouloir prendre comme axiome, c'est-à-dire comme propriété évidente, l'inégalité du triangle (ou plus exactement, sa réciproque), car vu les contraintes didactiques, en particulier le temps que l'on peut consacrer à des activités du type de celles qui ont été décrites, il est impossible de déléguer entièrement aux élèves la responsabilité de sa vérification, ce qui amène les contradictions que nous avons soulignées dans la séquence entre le traitement du problème de l'ordre des côtés et les autres activités.

Apparaît ainsi un problème à la fois didactique et mathématique soulevé par l'enseignement déductif de la géométrie : il consiste à déterminer un ensemble d'énoncés et de situations associées rendant possible leur vérification par les élèves (problème didactique) en vue de les prendre comme axiomes, puis à organiser rationnellement la déduction des autres énoncés de la géométrie à partir de ceux-ci (problème mathématique) en vérifiant également la faisabilité (didactique et mathématique) des démonstrations. La difficulté de la vérification des axiomes et son coût en terme de temps pose d'ailleurs un problème didactique de minimisation de leur nombre. La structuration d'un cours de géométrie qui veut rester déductif suivant les recommandations de l'académie des sciences apparaît donc comme un problème non trivial. On trouvera dans une publication de l'IREM de Bordeaux (1987) une proposition d'ordre d'exposition des énoncés de la géométrie qui permet de faire de l'inégalité du triangle un énoncé dérivé, qui propose en somme une autre axiomatique scolaire. Soulignons toutefois que le problème de l'inégalité du triangle, et plus particulièrement du triangle aplati, a le mérite de confronter les élèves, de leur propre point de vue et non à partir du discours du maître, au problème de l'ambiguïté du contrôle graphique. Il n'est pas évident que beaucoup d'autres situations aient cette propriété.

Bibliographie

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988). *Problème ouvert et situation problème*, IREM de Lyon, n° 64, 117 pages.

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992). *L'initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM de Lyon et PUL, Lyon, 188 pages.

BALACHEFF N. (1977). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, n° 2, Mai 1977, p. 147-176.

CHOQUET G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 177 p.

COOLIDGE J. L. (1949). *The mathematics of great amateurs*, 3ème édition, 1990, Clarendon, Oxford, 211 pages.

EUCLIDE (1990). *Les éléments*, vol 1, trad B. Vitrac, PUF Paris, 530 pages.

GAVA R. (1988). *Le triangle aplati*, mémoire de D.E.A.de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon I.

GRANGER G. (1992). *La vérification*, Odile Jacob, Paris, 314 pages.

IREM de Bordeaux (1987). *Enseignement des mathématiques utilisant la réalité*, réed 1992, IREM de Bordeaux, 192 pages.

KLINE M. (1980). *Mathématiques : la fin de la certitude*, traduction française, Christian Bourgois, Paris, 1989, 660 pages.

LICHNEROWICZ A. (1972). Allocution à l'Académie des Sciences, in *L'Education,* n° 125, Janvier 1972, p. 6-7.

MARGOLINAS C. (1989). *Le point de vue de la validation, essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*, thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, 382 pages.

NIMIER J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens (l'heuristique mathématique)*, IREM de Lyon, publication n° 67, 109 pages.

PASCAL B. (1985). *De l'esprit géométrique*, édité par A. Clair, Flammarion, Paris, p. 65-96.

RICHARDS (1980). The art and science of british algebra. A study in the perception of mathematical truth. *Historia mathematica*, vol 7, n° 3 p. 343-365.

VERKERK H (1990). *Du dessin au concept de figure : évidence du dessin et argumentations dans le cadre du "triangle aplati"*, mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon I.

Annexe : texte de l'enquête

NOM PRÉNOM : .... DATE DE NAISSANCE : ..../........./......

CLASSE : .... COLLÈGE : ....

REDOUBLANT (OUI NON)

L'enquête suivante fait partie d'un programme de recherche et elle est proposée à d'autres classes dans d'autres collèges.

Le travail demandé ne sera pas noté mais le plus grand sérieux est nécessaire.

Nous comptons donc sur votre entière coopération pour cette enquête

---

CONSIGNE :

TOUT DOIT ÊTRE FAIT SUR CETTE FEUILLE.

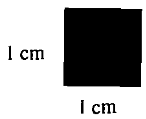
VOUS UTILISEREZ LE MATÉRIEL HABITUEL DE GÉOMÉTRIE.

IL EST INTERDIT D'UTILISER LA GOMME, L'EFFACEUR D'ENCRE OU LE CORRECTEUR BLANC.

TOUTES LES RATURES SONT AUTORISÉES.

SUJET :

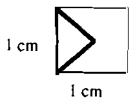
Dans tout ce qui suit, on appelle "carreau" chaque carré de un centimètre de côté :



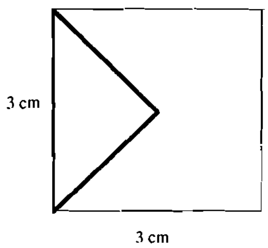
On te demande de trouver le nombre de "carreaux" contenus dans les trois triangles ci-dessous.

Exemples :

Le triangle ci-dessous contient 0,25 "carreaux" :



Le triangle ci-dessous contient 4,5 "carreaux"



1°) D'après toi, combien le triangle de côté 3cm, 4cm, 5cm contient-il de "carreaux" ?

RÉPONDS À CETTE QUESTION EN PRENANT BIEN SOIN D'EXPLIQUER COMMENT TU TROUVES :

2°) D'après toi, combien le triangle de côté 9cm, 5cm, 4cm contient-il de "carreaux" ?

RÉPONDS À CETTE QUESTION EN PRENANT BIEN SOIN D'EXPLIQUER COMMENT TU TROUVES :

3°) D'après toi, combien le triangle de côté 1cm, 4cm, 5cm contient-il de "carreaux" ?

RÉPONDS À CETTE QUESTION EN PRENANT BIEN SOIN D'EXPLIQUER COMMENT TU TROUVES :