

ARITHMETIQUE EN CE₁ A PARTIR D'UNE SITUATION-PROBLEME

LES AIMANTS

*Annie BESSOT
Carmen CHEVROT
Madeleine EBERHARD*

Les activités que nous présentons dans cet article ont été construites dans le cadre du travail de l'équipe "Elémentaire" de l'IREM de Grenoble sur les premiers apprentissages numériques, en particulier l'apprentissage de la soustraction. La situation de base de ces activités nous a été proposée par Carmen CHEVROT.

Quels peuvent être les objectifs de situations-problèmes proposées à des élèves de CE₁ avant l'introduction structurée de la soustraction (début du deuxième trimestre de l'année scolaire) ?

– Réinvestir et mettre à l'épreuve des connaissances supposées acquises : propriétés de la suite numérique, addition et écritures additives.

– Faire apparaître des procédures élémentaires sur lesquelles peut s'amorcer l'apprentissage ultérieur de la soustraction.

– Mettre en relation plusieurs notions : addition et soustraction, multiples d'un nombre, ordre sur les nombres.

Ces activités ont été reprises et analysées plusieurs fois, en particulier dans le cadre de la formation didactique des élèves-instituteurs (Deug Premier Degré) : ainsi ont pu être repérées des régularités au niveau des comportements des élèves.

Vous trouverez dans cet article :

– une analyse de la structure mathématique et des variables de la situation-problème (paragraphe I) ;

– un compte rendu d'une séquence menée dans le CE₁ d'Hélène BENZAKEN (école Meylan Mi-Plaine, Isère) (paragraphe II et III) ;

– la présentation des procédures soustractives élémentaires pouvant apparaître dans une exploitation adéquate de la situation (paragraphe IV).

PLAN DE L'ARTICLE

- I – ANALYSE PREALABLE DE LA SITUATION-PROBLEME : "LES AIMANTS"
 - 1.1 Structure mathématique des problèmes posés
 - 1.2 Variables de la situation-problème : "Les aimants"

 - II – MISE EN PLACE DE LA SITUATION-PROBLEME EN CLASSE
 - 2.1 L'énoncé 2 : un problème ouvert ?
 - 2.2 Déroulement
 - 2.3 Procédures
 - 2.4 Le problème du reste
 - 2.5 La question des enfants en échec

 - III – EXPLORATION DE LA SITUATION-PROBLEME
 - 3.1 Etude de solutions proposées par les élèves (séance 2)
 - a) Rappel
 - b) Etude de procédés de résolution
 - c) Etude de réponses
 - 3.2 Mise à l'épreuve d'un procédé numérique de contrôle de solutions (séance 3)

 - IV – PROCEDURES SOUSTRACTIVES AVANT L'APPRENTISSAGE DE LA SOUSTRACTION
 - 4.1 Préalable
 - 4.2 Les problèmes soustractifs
 - 4.3 Les problèmes soustractifs et les procédures de résolution
 - 4.4 Résultats et conclusion
-

I – ANALYSE PREALABLE DE LA SITUATION-PROBLEME : "LES AIMANTS"

Voici deux énoncés initiaux possibles de la situation-problème dite "Les aimants" :

énoncé 1 :

J'ai 36 aimants. Je veux accrocher des feuilles au tableau. J'ai trois sortes de feuilles : il y a des grands dessins faits à la peinture, des petits dessins faits aux crayons feutres et des images. Il faut 6 aimants pour accrocher un grand dessin, 4 aimants pour accrocher un petit dessin et 1 aimant pour accrocher l'image.

Combien puis-je accrocher de grands dessins, de petits dessins et d'images ?

énoncé 2 :

J'ai 45 aimants. Je veux accrocher des feuilles au tableau. J'ai deux sortes de feuilles : des petites jaunes et des grandes blanches. J'utilise 4 aimants pour les feuilles jaunes et 6 aimants pour les feuilles blanches.

Combien vais-je pouvoir accrocher de feuilles ?

1.1 Structure mathématique des problèmes posés

Pour dégager la structure mathématique des problèmes posés, reprenons chacun des énoncés en les formalisant :

énoncé 1 :

On cherche trois entiers positifs ou nuls, x , y et z tels que :

$$6x + 4y + z = a \quad a \leq 36$$

a : nombre d'aimants utilisés

x : nombre de grands dessins

y : nombre de petits dessins

z : nombre d'images

énoncé 2 :

On cherche deux entiers positifs ou nuls, x et y tels que :

$$6x + 4y = a \quad a \leq 45$$

a : nombre d'aimants utilisés

x : nombre de grandes feuilles

y : nombre de petites feuilles

La structure des problèmes posés par ces énoncés est donc à la fois additive et multiplicative et elle fait intervenir une inégalité entre des entiers : le nombre d'aimants utilisés, a , doit être inférieur ou égal au nombre d'aimants disponibles N ($N = 36$ ou $N = 45$).

1.2 Variables de la situation-problème "Les aimants"

La comparaison des deux énoncés formalisés met en évidence des variables de la situation-problème "Les aimants" ayant des valeurs différentes : **le choix de certaines valeurs peut**

changer la nature du problème. C'est ce que nous allons essayer de montrer à partir des deux énoncés proposés. Tout d'abord, nous donnons dans un tableau les valeurs prises par les variables de la situation-problème "Les aimants" dans chacun des énoncés :

Enoncé \ Variables	1	2
N	36	45
P	3	2
a_1	6	6
a_2	4	4
a_3	1	X

Tableau 1

Valeurs prises par les variables de la situation-problème "Les aimants" dans les énoncés 1 et 2

Remarquons, en premier lieu, que le choix fait pour N (dans l'énoncé 1 aussi bien que dans l'énoncé 2) place des élèves de CE 1 (2ème trimestre) dans un domaine familier, c'est-à-dire un domaine où ils maîtrisent la comptine et l'addition de deux entiers, savent manipuler des écritures additives (souvent à l'aide d'arbre de calculs) et ont, en général, effectué de nombreux exercices, en particulier de calcul mental, du type : compter de n en n en avançant, en reculant, ajouter n_1 à un nombre, puis n_2 au résultat, puis n_3 . . . De plus ce domaine permet la représentation dessinée des éléments de la collection d'aimants.

Dans ce domaine familier, la question posée à la fin de chacun des deux énoncés est *a priori* ouverte. Expliquons nous.

Pour l'énoncé 2, voici deux solutions au problème :

1 feuille lourde et 1 feuille légère ($6 + 4 = 10 ; 10 < 45$)

4 feuilles lourdes et 1 feuille légère ($4 \times 6 + 4 = 28 ; 28 < 45$)

Il y a donc non-unicité de la solution et pour avoir une solution, il **suffit** d'utiliser un nombre d'aimants inférieur à N. Ceci est un caractère essentiel de la situation-problème "Les aimants". Or il est assez inhabituel de poser ce type de problème aux élèves : le contrat implicite entre le maître et ses élèves est le plus souvent que tout problème posé a une solution liée à une égalité (et non à une inégalité). L'existence de ce contrat nous conduit à faire l'hypothèse que les élèves transformeront le problème initial en un problème "habituel" :

énoncé 1 transformé :

on cherche trois entiers positifs ou nuls, x , y et z tels que :

$$6x + 4y + z = 36$$

énoncé 2 transformé :

on cherche deux entiers positifs ou nuls, x et y tels que :

$$6x + 4y = 45$$

Le choix des valeurs des variables dans chacun des énoncés a les conséquences suivantes : dans le premier énoncé transformé il y a au moins une solution et dans le second il n'y en a pas !

Cela veut dire que la transformation de l'énoncé 2 n'est pas acceptable : si le maître a posé ce problème, il doit y avoir une solution. On peut alors se demander comment l'élève va de nouveau transformer l'énoncé 2. Nous verrons dans le paragraphe II ce qui s'est passé dans une classe.

II – MISE EN PLACE DE LA SITUATION-PROBLEME EN CLASSE

Nous avons posé aux enfants de la classe de CE 1 d'Hélène Benzaken (janvier 1984), l'énoncé 2 :

J'ai 45 aimants. Je veux accrocher des feuilles au tableau. J'ai deux sortes de feuilles : des petites jaunes et des grandes blanches. J'utilise 4 aimants pour les feuilles jaunes et 6 aimants pour les feuilles blanches. Combien vais-je pouvoir accrocher de feuilles ?

Avant de présenter ce qui s'est passé dans la classe, reprenons le problème de la transformation de l'énoncé 2 soulevé dans l'analyse préalable.

2.1 L'énoncé 2 : un problème ouvert ?

La question posée admet des réponses variées comme, par exemple :

- (1) "Je peux accrocher une feuille blanche et deux feuilles jaunes".
- (2) "Onze est le plus grand nombre de feuilles que je peux accrocher".
- (3) "Je peux accrocher cinq feuilles jaunes et quatre feuilles blanches et je ne peux plus accrocher de feuilles avec les aimants qui restent".

En effet, on peut l'interpréter de plusieurs manières :

– "que puis-je faire avec ces aimants ?" et il suffit alors de donner un exemple, parmi beaucoup d'autres, d'utilisation des aimants.

– "quel est le plus grand nombre de feuilles que je peux accrocher ?"

Comme les feuilles jaunes nécessitent moins d'aimants que les blanches, il s'agit alors de trouver le plus grand nombre de feuilles jaunes que l'on peut accrocher.

La première interprétation met l'accent sur : "**je vais pouvoir**" tandis que la deuxième va dans le sens d'une **réponse optimale** en ce qui concerne le nombre total de feuilles. Enfin, la

réponse (3) est une sorte de compromis. En effet, "je peux accrocher cinq feuilles blanches et quatre feuilles jaunes" est un exemple de réponse possible. Mais dans ce cas "je ne peux plus accrocher de feuille avec les aimants qui restent", si bien que la réponse (3) a un **caractère de réponse optimale** à un degré moindre que (2) bien sûr.

Nous avons fait l'hypothèse que les enfants résoudre le problème en cherchant à utiliser tous les aimants et que leurs procédures reviendront, le plus souvent, à passer d'un état possible analogue à la réponse (1) à un autre état possible en augmentant le nombre de feuilles blanches et de feuilles jaunes . . . tant qu'il restera assez d'aimants pour cela.

Ces procédures conduiront l'enfant à se confronter à ce que nous appelons le problème du reste : que faire quand le nombre d'aimants non utilisés est inférieur à quatre ?

Quand ce problème est surmonté nous pouvons prévoir que les enfants proposeront des réponses analogues à la réponse (3).

Présentons l'ensemble de ces réponses dans le tableau ci-dessous en mettant en évidence la valeur du reste.

	jaunes	blanches		aimants	} Tableau 2
Nombre de	11	0		1	} Réponses optimales possibles et restes
feuilles	9	1		3	} associés
utilisées	8	2		1	}
pour chacune	6	3		3	}
des réponses	5	4		1	}
	3	5		1	}
	2	6		1	}
	0	7		3	}

lecture du tableau : par exemple, ligne 3 : "je peux accrocher 8 feuilles jaunes et 2 feuilles blanches (et il me reste 1 aimant) "

2.2 Déroulement (1 h.)

matériel collectif : – une pile de feuilles blanches
 – une pile de feuilles jaunes dont les dimensions sont inférieures à celles des feuilles blanches
 – des aimants (et un tableau magnétique !)

La maîtresse écrit l'énoncé 2 au tableau devant les enfants. Elle le fait lire successivement par deux enfants tout en montrant, quand il en est question, les feuilles blanches et jaunes empilées sur son bureau.

Puis elle demande à un élève de venir accrocher au tableau (magnétique !) une feuille jaune "comme on doit le faire ! ". L'élève n'utilise qu'un seul aimant et la plupart de ses camarades protestent. La maîtresse insiste alors sur la **règle** qu'elle a imposée : " aujourd'hui, on a décidé d'utiliser quatre aimants pour accrocher une petite feuille jaune. Pour les feuilles blanches, on a décidé d'utiliser six aimants. "

Les élèves travaillent individuellement. Certains trouvent très vite une solution. Chaque fois qu'une solution lui est proposée, sous forme de calcul ou de dessin, M demande (*) qu'elle soit explicitée : "fais une phrase pour répondre à ma question : combien de feuilles puis-je attacher ?" et, quand il est nécessaire de relancer l'enfant : "combien de jaunes ? combien de blanches ?".

Les interventions éventuelles de la maîtresse portent sur la justesse des calculs et non sur les procédures, sauf pour trois enfants restés bloqués après vingt minutes et trois autres qui ne parviennent pas à expliciter les représentations dessinées qu'ils ont proposées comme solution.

Bilan

• Vingt élèves sur vingt-trois s'engagent dans une procédure de résolution sans l'intervention de la maîtresse :

– dix-sept terminent en fournissant une réponse donnant explicitement les nombres de feuilles blanches ou jaunes.

– un enfant répond :



et il me reste une unité

car 24 feuille et 22 feuille

Il manifeste là une confusion entre les feuilles et les aimants.

– un enfant répond :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} = 10 \quad | \quad \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} = 10 \quad | \quad \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} = 10 \\ \begin{array}{c} 4 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \square \\ \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} = 10 + 5 \end{array}$$

Par- ce- que 4 fois 4+6 sa fait 40+5 sa fais 45

– un enfant ne donne pas de réponse.

• Quinze élèves fournissent une deuxième proposition à la suite d'une relance de la maîtresse : "essaie de trouver une autre solution."

* Bien entendu, ce M désigne la maîtresse. Ce sera ainsi dans le reste de l'article.

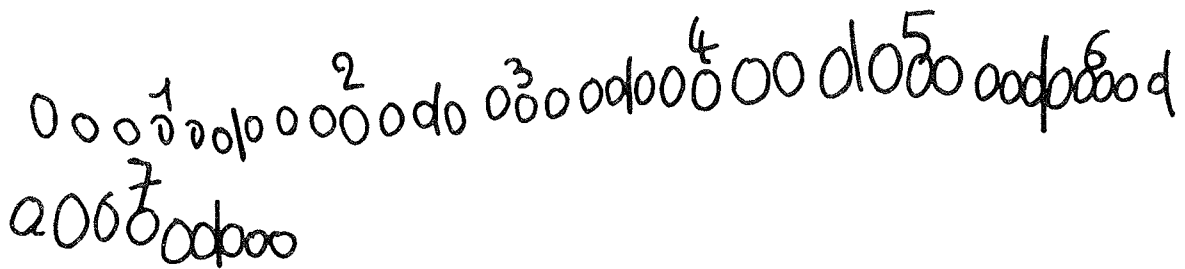
2.3 Procédures

Examinons tout d'abord les **procédures qui ont permis aux élèves de trouver une solution**.

– procédures **R** mettant en jeu des **représentations** des aimants et des feuilles :

RA représentation: des 45 aimants puis regroupement par paquets de 6 ou de 4 aimants (2 élèves).

L'explicitation de la solution exige alors que l'on désigne les paquets en terme de feuilles : il suffit alors de dénombrer les paquets.

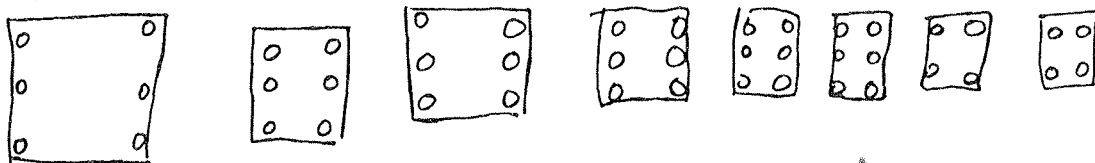


RF représentation des feuilles (19 élèves)

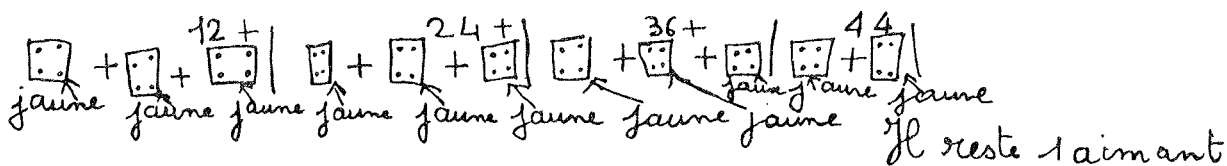
● **RF re** : représentation de feuilles **puis** comptage des aimants utilisés (1 élève). S'il y a trop d'aimants utilisés, réajustement en barrant les feuilles. S'il y a moins de 45 aimants, réajustement en rajoutant des feuilles et utilisation de la procédure **RF c**.



● **RF c** : représentation des feuilles accompagnée de comptage (18 élèves). Au fur et à mesure que les feuilles sont représentées, le nombre d'aimants qui leur correspond est compté. La représentation est interrompue lorsque 45 est atteint. En cas de vérification, il est nécessaire de dénombrer ou de recalculer tous les aimants, à moins que l'on ait noté au fur et à mesure de la représentation. le nombre d'aimants utilisés (deux élèves).

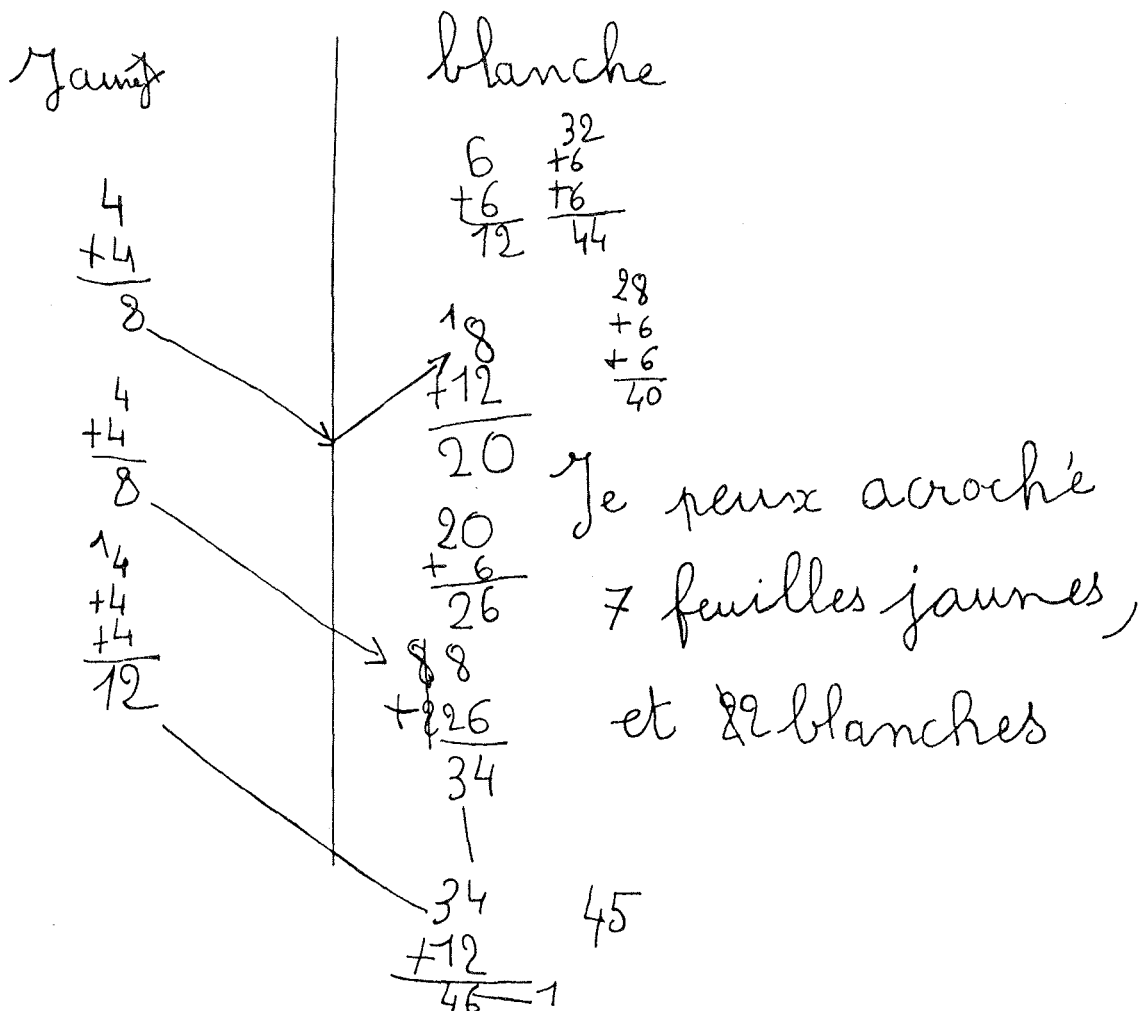


J'ai 6 feuilles blanches et deux feuilles jaunes



J'ai trouvé 11 feuilles jaunes

- procédures C mettant **directement** en jeu des calculs sur les nombres.
- CA additions successives de 4 et de 6 ou de 10 visant à atteindre 45 (1 élève).



CM additions de multiples de 4 et de 6 ou de 10 visant à atteindre 45 (2 élèves)

4 feuilles jaunes = 16 aimants

3 feuilles blanches = 18 aimants

$$\begin{array}{r} 1 \\ 16 \\ + 18 \\ \hline 32 \end{array}$$

3 feuilles jaune = 12 aimants

$$\begin{array}{r} 32 \\ + 12 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 04 \\ + 03 \\ + 03 \\ \hline 10 \end{array}$$

feuilles

10 me fait 44 aimants il me reste un aimant

7 feuilles ~~jaune~~ jaunes et 3 feuilles blanches.

L'explicitation de la solution exige alors que les calculs puissent être réinterprétés dans les termes de la situation.

Notons que certains élèves ont donné plusieurs réponses en utilisant plusieurs procédures. Notons aussi que les représentations dessinées ont pu se propager par "contagion". Enfin plusieurs enfants ont implicitement fermé le problème dans un premier temps en n'utilisant qu'une sorte de feuilles ou en alternant les feuilles.

Ces procédures conduisent à des réponses de type (3) si les enfants acceptent qu'il puisse rester un ou trois aimants que l'on n'utilise pas.

Dans ce cas la procédure RA met directement en évidence qu'il reste des aimants et les aimants qui restent.

Les autres procédures visent en général à approcher par défaut le nombre 45 à l'aide d'une succession d'essais fournissant un nombre différent de 45 et comparé à 45. Dès qu'un essai fournit 44 ou 42 l'essai suivant fournit des nombres supérieurs à 45.

2.4 Le problème du reste

Examinons comment les enfants ont pris en compte le problème du reste :

RA Les deux fois où cette procédure a été mise en œuvre il n'y a pas eu d'explicitation des résultats.

RF Qu'elle utilise ou non un marquage systématique du nombre d'aimants déjà utilisés, cette procédure permet la représentation de moins ou de plus de 45 aimants.

Quatre enfants accrochent une feuille jaune avec 3 ou 5 aimants ou une feuille blanche avec 5 aimants pour utiliser tous leurs aimants.

Cinq enfants représentent seulement un ensemble de feuilles qu'ils peuvent accrocher et les aimants correspondants (moins de 45 aimants) ou ne parlent pas des aimants utilisés.

Huit enfants, explicitent, qu'il reste des aimants.

RC Les deux enfants qui n'ont utilisé qu'une procédure de ce type ne parlent pas de reste.

On peut s'interroger sur les raisons qui ont conduit deux enfants à abandonner cette procédure. L'un des enfants est entré dans le problème en écrivant : "4 dizaines d'aimants, 5 unités," l'autre en faisant :

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 + 4 \\
 + 6 \\
 + 4 \\
 + 6 \\
 + 4 \\
 + 6 \\
 + 4 \\
 + \underline{5} \\
 45
 \end{array}$$

Puis ils ont changé de procédure. Est-ce faute d'avoir su réinterpréter les nombres en terme de feuilles, est-ce faute d'avoir pu prendre en compte l'existence d'un reste ?

2.5 La question des enfants en échec

Nous avons vu que trois enfants sont restés bloqués durant un grand laps de temps : qu'avaient-ils compris de la situation ? Trois autres enfants qui ont dessiné des représentations de feuilles accrochées ne sont pas parvenus, seuls, à utiliser leurs représentations pour fournir une réponse.

De tels échecs ont pu être observés dans plusieurs classes de CE 1 où l'énoncé 2 a été proposé dans les mêmes conditions. Dans la perspective d'un prolongement de la situation des aimants, il est primordial que ces élèves puissent accéder à une certaine maîtrise du problème posé par l'énoncé 2.

Voici comment Carmen Chevrot (CE 1, Ecole Clémenceau de Grenoble, février 1985) a organisé dans sa classe un soutien pour cinq élèves qui n'ont pas su trouver de solution.

Pour aider ces élèves nous leur avons demandé de reformuler l'énoncé. Puis, ils ont dû donner à tour de rôle des solutions différentes en **utilisant le matériel** (45 aimants, feuilles jaunes, feuilles blanches). Afin de conserver ces solutions un secrétaire représentait ce que faisait son camarade et inscrivait le nombre de feuilles accrochées.

Chaque élève a donc eu la possibilité de trouver une réponse : nous lui avons demandé d'indiquer le nombre a d'aimants utilisés, en fournissant ce nombre à partir du dessin, et de le comparer à 45.

Dans la deuxième séance de soutien, les élèves ont été en mesure de fournir une solution individuellement sans avoir recours au matériel :

- trois élèves ont utilisé la procédure RFc
- deux élèves ont utilisé la procédure RF re

Ces élèves sont alors capables de donner une solution à l'aide d'une représentation dessinée.

III – EXPLORATION DE LA SITUATION-PROBLEME

Nous présentons ici une suite d'activités réalisées dans le CE 1 d'Hélène Benzaken après la séance 1 décrite ci-dessus. Ces activités se sont déroulées durant trois semaines, à raison d'une séance hebdomadaire d'une heure.

3.1 Etude de solutions proposées par les élèves (séance 2)

Au cours de la séance 1, l'aide individuelle apportée aux enfants en difficulté a permis à chaque enfant de disposer d'une procédure de résolution pour le problème posé par l'énoncé 2.

Dans la séance 2 nous avons les objectifs suivants :

- assurer chez les élèves la maîtrise des représentations dessinées ;
- donner aux élèves l'occasion de travailler directement sur des nombres en donnant un sens aux opérations ;
- rendre les élèves capables de valider une assertion donnée comme réponse.

Pour cela nous avons choisi de leur faire étudier successivement trois procédures mises en œuvre par des élèves et deux réponses.

Déroulement

a) Rappel

M fait rappeler par les élèves ce qui a été l'objet de la dernière séance.

La question "qu'est-ce que vous deviez chercher ?" amène la suite des réponses suivantes :

- "combien de feuilles on pouvait accrocher ? "
- "il fallait que tous les aimants soient accrochés "
- "il faut pas, par exemple, qu'il reste 5"
- "... utiliser le plus d'aimants possibles."

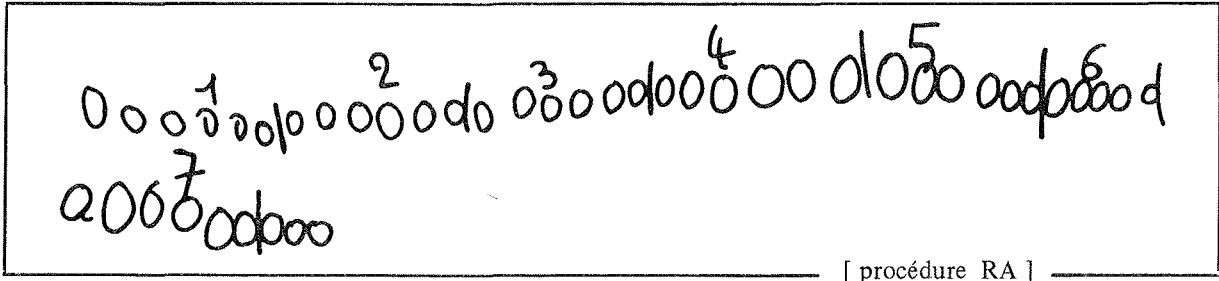
M commente : "ce qui vous a plu à tous, c'est d'utiliser le plus possible d'aimants . . . mais on ne vous l'avait pas demandé".

L'intervention d'un élève : "il fallait écrire combien on peut mettre de feuilles blanches" provoque une discussion qui lève cette restriction : "on pouvait faire ce qu'on voulait avec les jaunes et les blanches".

Remarque : on voit bien ici comment les élèves ont transformé l'énoncé.

b) Etude de procédés de résolution (phase collective)

M. affiche au tableau un agrandissement de la solution proposée par Yannick.



M. : "Est-ce que vous comprenez ce qu'a voulu faire Yannick ?" Certains élèves répondent négativement.

E : "on dirait qu'il a voulu accrocher 6 feuilles blanches et il restera 2 aimants".

Yannick : "j'ai voulu mettre 1 pour dire que c'est le premier paquet, le premier paquet de 6. Je me suis occupé des feuilles blanches."

M. amène les enfants à expliciter tous les renseignements qu'apporte ce dessin : "Yannick a fait tous les aimants", "on voit bien qu'il a accroché 7 feuilles", "il faut aussi écrire : il me reste 3 aimants."

La réponse de Yannick est alors explicitée :

J'ai accroché 7 feuilles blanches et il reste 3 aimants

M. présente au tableau le travail réalisé par Michèle :

4 feuilles jaunes = 16 aimants	$\begin{array}{r} 16 \\ + 18 \\ \hline 32 \end{array}$
3 feuilles blanches = 18 aimants	
3 feuilles jaunes = 12 aimants	$\begin{array}{r} 32 \\ + 12 \\ \hline 44 \end{array}$
10 feuilles me fait 44 aimants il me reste un aimant	
7 feuilles jaunes et 3 feuilles blanches	

[procédure CM]

Les élèves font les commentaires suivants : "on comprend", "c'est bien, mais c'est long", "quand elle explique les choses on comprend bien."

La maîtresse attire l'attention des enfants sur la partie du travail qui comporte des opérations.

La maîtresse : "est-ce que vous êtes d'accord avec Michèle ?"

La majorité des enfants trouve l'erreur dans la première addition et les deux additions sont corrigées.

Michèle : "j'ai un aimant de trop, j'ai dépassé le nombre."

La maîtresse demande alors de modifier la proposition. Le travail de Michèle est finalement repris avec la suggestion : "2 feuilles jaunes seulement" et l'on aboutit à :

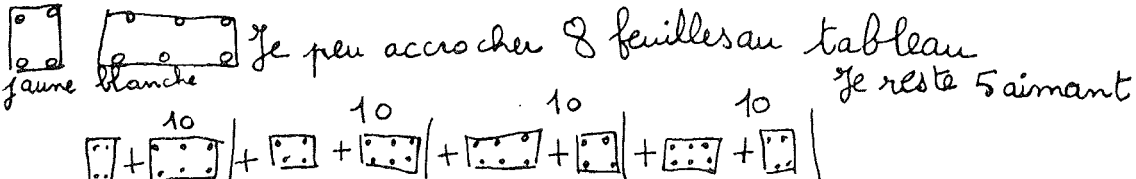
$$\begin{array}{l} 4 \text{ feuilles jaunes} = 16 \text{ aimants} \\ 3 \text{ feuilles blanches} = 18 \text{ aimants} \\ \hline 34 \end{array}$$

$$2 \text{ feuilles jaunes} = 8 \text{ aimants} + \frac{34}{8} = 42$$

6 feuilles jaunes et 3 feuilles blanches : 42 aimants
il reste 3 aimants.

M. valorise le travail de Michèle : "c'est pratique ; il y avait juste une petite erreur."

M. présente enfin le travail de Véronique :



Je peux accrocher 8 feuilles au tableau
Je reste 5 aimants

[procédure RFe]

Une élève proteste : "elle peut les utiliser, les cinq aimants." Les élèves finissent par se mettre d'accord : "elle n'était pas obligée !" et explicitent la solution par :

Elle a accroché 4 feuilles blanches et 4 feuilles jaunes et il lui reste 5 aimants.

c) Etude de réponses (phase individuelle)

La maîtresse écrit au tableau la réponse suivante :

- (1) Je peux accrocher 5 feuilles jaunes,
Je peux accrocher 4 feuilles blanches,
et il me reste 2 aimants.

Réponse de Foued

et demande : "que pensez-vous de cette réponse ?"

Lorsque quelques enfants ont terminé de rédiger leur commentaire, la maîtresse propose le texte suivant :

- (2) "Avec 45 aimants je peux accrocher 6 feuilles blanches et 4 feuilles jaunes.

et elle demande encore "que pensez-vous de cette réponse ?"

La réponse (1) comporte une erreur. En effet, si l'on dispose de 45 aimants et si l'on accroche 5 feuilles jaunes et quatre feuilles blanches, il reste un aimant.

La réponse (2), elle, ne convient pas puisqu'il faut disposer de 52 aimants au minimum pour accrocher 6 feuilles blanches et 4 feuilles jaunes.

Résultats 23 élèves présents sur 24)

Bitan

Dix-sept élèves ont rédigé un commentaire de la réponse (1) du type : "je ne suis pas d'accord : il reste seulement un aimant."

Dix-sept élèves seulement ont étudié la réponse (2) et douze d'entre eux ont fourni un commentaire du type "ce n'est pas possible, on dépasse le nombre d'aimants (45)."

Onze élèves sur vingt-trois ont finalement vérifié correctement les réponses (1) et (2)

Procédures mises en œuvre pour l'étude de la réponse (1)

Cinq élèves seulement utilisent des procédures numériques : calcul de sommes ou arbre de calcul. (Un élève seulement, alors que cette technique de réduction des écritures additives a été mise en place au cours du mois de décembre).

Les dix-huit autres enfants ont représenté par un dessin les feuilles accrochées et les aimants. Cinq d'entre eux ne sont pas parvenus à fournir le reste.

Remarques relatives au sens de l'énoncé

Cinq élèves ont fait, dans un premier temps, une confusion entre les nombres de feuilles et d'aimants ce qui est révélateur d'une difficulté plus générale de coordonner les nombres d'éléments de deux collections de natures différentes mais interdépendantes.

La maîtresse est alors intervenue en demandant à ces élèves de préciser le nombre d'aimants nécessaires pour accrocher une feuille de couleur donnée et le nombre de feuilles de cette couleur qui sont accrochées.

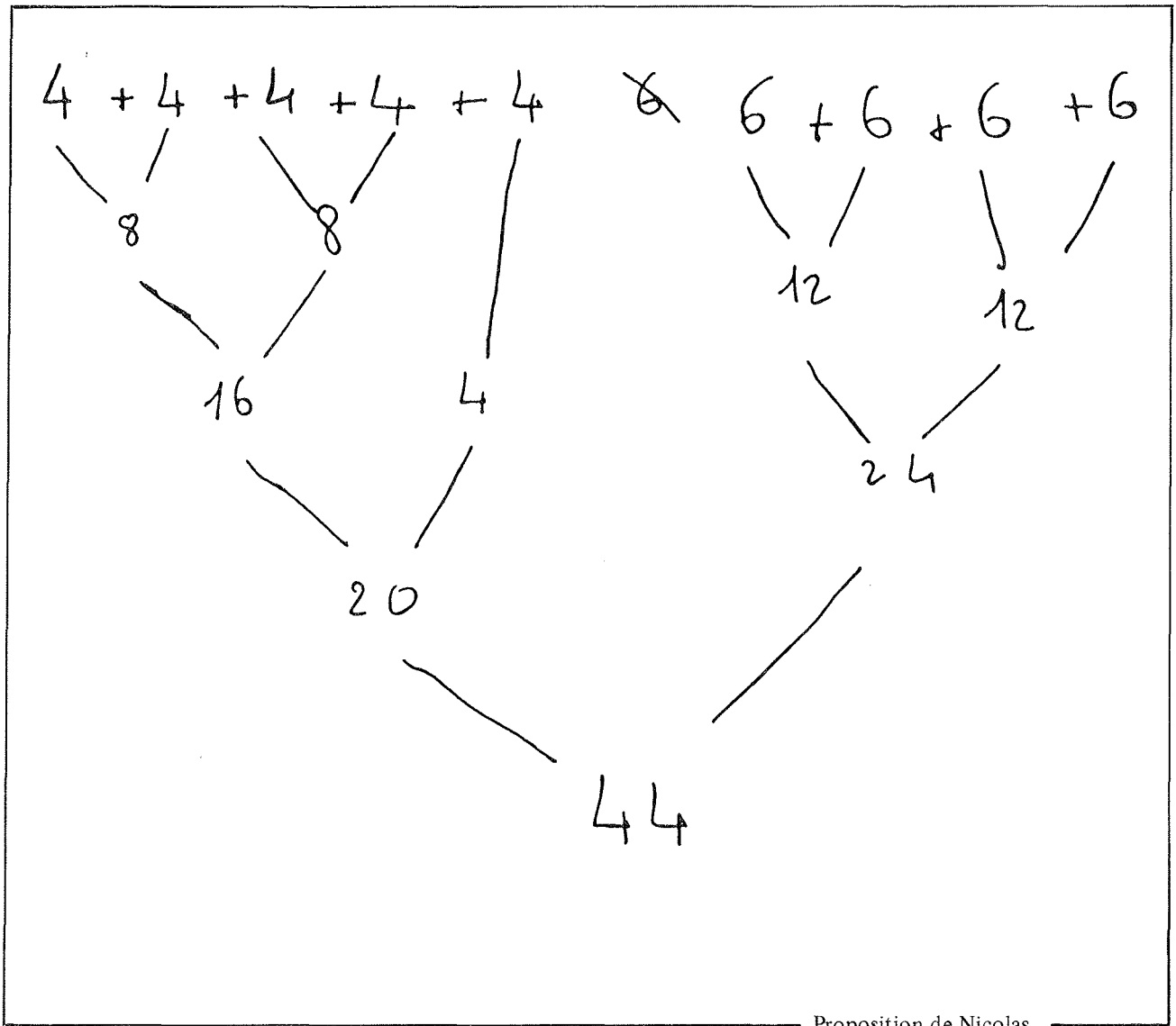
3.2 Mise à l'épreuve d'un procédé numérique de contrôle des solutions (séance 3)

Dans l'objectif de donner aux élèves l'occasion de travailler directement sur des nombres, nous avons choisi de présenter aux élèves la procédure de Nicolas, seul élève ayant utilisé un arbre de calcul.

Cette procédure est éprouvée dans le cadre d'une nouvelle exploration de la situation-problème : il s'agit d'amener les élèves à formuler des questions à partir d'une assertion du type : "j'ai N aimants, j'ai accroché x feuilles jaunes, y feuilles blanches." Un autre objectif de l'activité est d'amener tous les élèves à différencier les situations : "il reste a aimants" et "il manque a aimants."

Déroulement

a) La maîtresse fait exposer par Nicolas la démarche qu'il a suivie pour étudier la réponse de Foued.



La maîtresse fait interpréter l'une après l'autre les écritures additives :

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$, $6 + 6 + 6 + 6$ puis $4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 6$
avant que Nicolas ne se lance dans son arbre de calcul pour trouver le nombre d'aimants utilisés par Foued.

b) La maîtresse propose le problème suivant :

(Q₁) J'ai maintenant 53 aimants.
J'ai accroché 6 feuilles blanches et 4 feuilles jaunes.
Que peux-tu dire ? Que peux-tu faire ?

Ce problème fait l'objet d'un travail individuel écrit. Quand un élève a fourni une réponse, la maîtresse lui propose successivement les problèmes suivants :

(Q₂) J'ai 53 aimants. J'ai accroché 7 feuilles blanches et 1 feuille jaune.
Que peux-tu dire ? Que peux-tu faire ?

(Q₃) J'ai 53 aimants. J'ai accroché 5 feuilles blanches et 8 feuilles jaunes.
Que peux-tu dire ? Que peux-tu faire ?

Remarque

(Q₁) et (Q₂) traitent du cas où il reste des aimants inutilisés, à savoir respectivement 1 et 7. Quant à l'affirmation de l'énoncé (Q₃) elle est fautive puisqu'il faut disposer d'au moins 62 aimants pour accrocher les 13 feuilles.

Résultats (22 élèves, 2 absents)

A une exception près, tous les élèves ont fourni une réponse pertinente à (Q₁). Chacun des problèmes (Q₂) et (Q₃) a reçu dix-huit réponses et dix-sept élèves ont répondu à l'ensemble des trois problèmes.

Sur ces dix-sept élèves, quatorze utilisent systématiquement la même procédure (onze arbres de calcul, un calcul de sommes et deux représentations). Par contre quatre élèves modifient leur procédure, passant des représentations aux arbres de calcul. Ces résultats témoignent de la réappropriation de l'outil numérique pour dix-huit élèves.

Examinons les commentaires et les propositions fournis par les enfants :

Seul un élève ne s'exprime pas sur le reste.

Tous les élèves qui répondent à (Q₂) fournissent le nombre d'aimants utilisés (46) et le nombre d'aimants restant (7). (Ils proposent même d'accrocher une feuille supplémentaire !).

Quatorze élèves sur les dix-huit qui répondent à (Q₃) fournissent une réponse pertinente en exprimant qu'il manque des aimants, certains fournissant le nombre d'aimants manquants.

IV – PROCEDURES SOUSTRACTIVES AVANT L'APPRENTISSAGE DE LA SOUSTRACTION

Rappelons que le choix du nombre d'aimants disponibles, dans l'énoncé 2, pose le problème du reste. Notre objectif est d'utiliser cette caractéristique pour proposer aux élèves des problèmes de type soustractif **avant l'apprentissage de la soustraction**. Nous permettons ainsi l'apparition et le fonctionnement de procédures soustractives propres aux élèves, s'appuyant sur leurs connaissances numériques.

4.1 Préalable

Pour pouvoir aborder ces nouveaux problèmes, chaque élève doit avoir une certaine maîtrise de la situation "Les aimants", c'est-à-dire qu'il doit savoir :

- produire une solution
- vérifier les solutions proposées par d'autres élèves
- répondre aux questions : "combien d'aimants ai-je utilisés ? Aurais-je pu en utiliser davantage ? M'en reste-t-il beaucoup ou peu ? "

Nous nous plaçons désormais dans ce cadre.

4.2 Les problèmes soustractifs :

Nous donnons ci-dessous les énoncés des trois problèmes soustractifs que nous avons proposés à des élèves de CE 1 (avant apprentissage de la soustraction).

Problème 1

J'ai accroché 5 feuilles légères et 3 feuilles lourdes. Combien reste-t-il d'aimants dans la boîte ?

$$(N = 45 ; a = 38 ; N - a = 7)$$

Problème 2

J'ai accroché 1 feuille lourde et 2 feuilles légères. Combien reste-t-il d'aimants dans la boîte ?

$$(N = 45 ; a = 14 ; N - a = 31)$$

Problème 3 :

J'ai accroché 1 seule feuille lourde. Combien reste-t-il d'aimants dans la boîte ?

$$(N = 45 ; a = 6 ; N - a = 39)$$

4.3 Les problèmes soustractifs et les procédures de résolution

Les trois problèmes donnés dans le paragraphe 4.2 vont-ils être résolus de la même façon ? Si on compare les données de ces problèmes, on constate qu'elles ne diffèrent que par la donnée du nombre d'aimants utilisés a , autrement dit, que par l'importance de l'écart entre a et N (nombre total d'aimants).

Quel rôle peut avoir cet écart sur le comportement de résolution des élèves ? Pour répondre à cette question nous reprendrons ce qu'écrit G. Brousseau en l'adaptant à notre propos : ("D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique", Ecole d'été de didactique des mathématiques, Orléans 1982).

– Si a et $N-a$ ne sont pas trop petits (Problème 2) le dessin permet des conclusions sûres après l'exécution d'une tâche pas trop pénible, nous dirons peu coûteuse (Procédure: P_1)

– Si a est très petit par rapport à N , par exemple $N = 45$ et $a = 6$ comme dans le problème 3, les enfants peuvent :

a) compter sur leurs doigts à rebours (Procédure P_4)

45	44	43	42	41	40	39
	1	2	3	4	5	6

Ce compte à rebours peut leur poser des problèmes de mise en correspondance :

45	44	43	42	41	40
1	2	3	4	5	6

Mais la vérification est possible pour ceux qui possèdent les connaissances nécessaires : $39 + 6 = 45$

b) Ce qui conduit souvent les enfants à utiliser directement la vérification comme moyen de recherche mais ils doivent :

- choisir un nombre plausible comme complément
- faire l'addition
- vérifier qu'ils obtiennent bien N
- sinon recommencer (Procédure P_2)

– Si $N-a$ est très petit (Problème 1), la recherche du complément est beaucoup plus facile. L'enfant utilise le même procédé qu'en b jusqu'à N (Procédure P_3) :

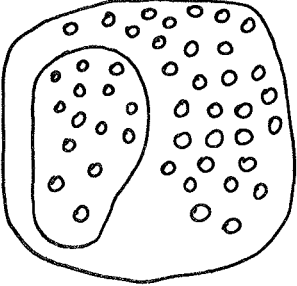



$a = 38$	38	39	40	41	42	43	44	45
		1	2	3	4	5	6	7

Là aussi peut se poser un problème de mise en correspondance.

Le choix des valeurs successives de a peut donc être prémédité pour faire apparaître dans une même classe des procédures diverses, procédures sur lesquelles peut s'appuyer l'enseignant pour débiter l'apprentissage de la soustraction. Nous donnons ci-après un tableau récapitulatif des procédures soustractives possibles "a priori", bien que certaines soient peu probables.

Tableau 3

TYPOLOGIE DES PROCEDURES SOUSTRACTIVES

Désignation	Nature	Exemple
P ₁	Représenter N objets Marquer a de ces objets Compter les objets non marqués	Rodolphe (Problème 2)  31 aimants
P ₂	Choisir un nombre plausible a' comme complément. Faire l'addition a + a' Si on n'obtient pas N, on recommence en ajoutant a' jusqu'à ce que a + a' = N	Olivier (Problème 3) "J'en ai mis 39 pour arriver à 45, parce que 40 plus 6 ça fait 46. J'en enlève 1 ; il faut 39 parce que 39 plus 6 ça fait 45"
P ₃	Compter de a à N un par un  $d(a, N) = N - a$	Isabelle (Problème 1) "J'ai compté sur mes doigts jusqu'à 45, ça fait 7"
P' ₃	Compter de a à N par bonds	
P ₄	Compter à rebours à partir de N de a unités le dernier nombre énoncé est la réponse  $d(N, N - a) = a$	Nathalie (Problème 3) "J'ai fait 6 moins 45. J'ai compté 6 : 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39 ça fait 39" (elle se sert de ses doigts)
P' ₄	Compter à rebours à partir de N de a par bonds	
P ₅	Compter à rebours de N à a  $d(N, a) = N - a$	
P' ₅	Compter à rebours de N à a par bonds	
P ₆	Soustraction standard $N - a$	
P' ₆	Addition à trou $\begin{array}{r} + \dots a \\ \hline N \end{array}$	

Remarques

1) Les procédures P_6 et P'_6 , sont les procédures visées par l'apprentissage de la soustraction.

2) Les procédures $P_3, P'_3, P_4, P'_4, P_5, P'_5$ nécessitent l'utilisation d'intermédiaires physiques : soit les doigts (Isabelle et Nathalie), soit des marques de types variés sur une feuille.

Nous pouvons rattacher ces procédures à un modèle commun, celui de la suite des entiers considérée comme "une corde à nœuds" sur laquelle on calcule des distances entre les nœuds (voir article de M.T. Chabroulet, Soustraction au CE 1, Grand N n° 16).

4.4 Résultats et conclusion

a) Regardons ce qui s'est passé dans une classe de CE 1 (Claire Campa, Ecole Ferdinand Buisson, Grenoble) où l'enseignant a proposé, dans l'ordre, les problèmes 1, 2 et 3 : le problème 2 n'étant donné à un élève que s'il avait résolu le problème 1, et le problème 3 que s'il avait résolu le problème 2. Pour cela, nous présentons dans un tableau la répartition des élèves selon leurs procédures dans chacun des problèmes.

type de procédures \ Problème	1	2	3
P_1	6	11	3
P_2	1	2	2
P_3	8	2	1
P_4	0	0	1
P_5	0	0	0
non identifiées	6	2	5
Σ	21	17	12

Tableau 4 a

Répartition des élèves selon leurs procédures dans les problèmes 1, 2 et 3.

Les nombres entourés correspondent aux procédures que G. Brousseau désigne comme les plus faciles à mettre en œuvre dans le contexte de chaque problème.

b) Dans le CE 1 d'Hélène Benzaken, nous avons proposé, dans l'ordre, les problèmes 3 et 2 dans les mêmes conditions que précédemment, mais sous la forme suivante :

Problème 3 : $N = 53, a = 6, N - a = 47$

Problème 2 : $N = 53, a = 14, N - a = 39$

Tous les élèves ont réussi à trouver les solutions. Ceci s'explique par le temps consacré à l'étude de la situation.

Voici les procédures des élèves en fonction des problèmes :

Problème \ Type de procédures	3	2
P ₁	4	4 → 5
P ₂	0	0
P ₃	0	1
P' ₃	1	1
P ₄	17	10 → 11
P' ₄	2	5 → 6
Σ	24	24

Tableau 4 b

Répartition des élèves selon leurs procédures dans les problèmes 3 et 2.

- Les nombres entourés correspondent aux procédures que G. Brousseau désigne comme les plus faciles à mettre en œuvre dans le contexte de chaque problème.
- Les flèches indiquent la stabilité ou l'adaptation d'une procédure donnée.

Si on compare les tableaux 4 a. et 4 b, on remarque que pour le premier problème présenté aux élèves (problème 1 dans le cas a, problème 3 dans le cas b), les procédures majoritaires sont du type que l'on pouvait prévoir en se référant à l'analyse de G. Brousseau.

D'autre part, dans le cas b, les procédures P₄ et P'₄ restent majoritaires pour le problème 2 : cinq élèves "améliorent" la procédure P₄ en passant à P'₄ ; pour cela, ils utilisent des calculs faits pour résoudre le problème 3.

Au contraire, dans le cas a, la présentation du problème 2 déstabilise la procédure P₃ en faveur de la procédure prévue par l'analyse, cette procédure P₁ étant liée aux représentations dessinées de la situation.

Ces évolutions différentes illustrent un phénomène banal : une procédure qui a réussi est soit adaptée, soit abandonnée face à des changements de valeur des variables de la situation. Un problème essentiel pour l'enseignant est de déterminer des changements qui conduisent, selon son objectif, à l'abandon ou à l'adaptation d'un comportement.