UNE ÉTUDE DU CONTRAT DIDACTIQUE A PROPOS DE LA RACINE CARRÉE

Annie BESSOT
DidaTech, Université Joseph Fourier, Grenoble
LE THI HOAI An
ENS de Hanoï 1, Vietnam

Introduction

Cet article, issu d'un mémoire de DEA de didactique des mathématiques[1], comporte trois parties :

Dans la première partie nous définissons brièvement le concept de contrat didactique.

Dans la deuxième partie, une étude d'un manuel nous permet d'expliciter des caractéristiques d'un contrat didactique spécifique à la notion de la racine carrée en classe de troisième.

La troisième partie présente les résultats d'une expérimentation où des exercices "hors contrat" sont proposés à des élèves de troisième.

I. Le concept de contrat didactique

En 1980, dans la revue de Laryngologie G.Brousseau renouvelle l'analyse des échecs électifs en mathématiques grâce au concept de contrat didactique qu'il a créé en 1978 : "Le contrat didactique se présente comme la trace des exigences habituelles du maître (exigences plus ou moins clairement perçues) sur une situation particulière. Ce qui est habituel ou permanent s'articule plus ou moins bien avec ce qui est spécifique de la connaissance visée ; certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et certains enfants liraient ou non les intentions didactiques du professeur et auraient ou non la possibilité d'en tirer une formation convenable." (G.Brousseau, 1980)

G.Brousseau définit en 1982 le contrat didactique comme l'ensemble des "relations qui déterminent - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire va avoir à charge de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre".

Pour Y.Chevallard (1983), le contrat didactique définit les droits et les devoirs des élèves, les droits et les devoirs de l'enseignant et, par cette division des tâches,

1 LE THI HOAI A. (1992) : DEA de didactique des disciplines scientifiques de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

partage et limite les responsabilités de chacun. Il est "l'ensemble des "règles du jeu" ou des conditions ou des attentes implicites qui règlent le fonctionnement de la classe et les rapports entre le maître et les élèves".

Selon le même auteur (1983 et 1988), le respect par l'élève du contrat didactique n'est jamais une fin en soi. Il n'a d'autre but que d'assurer à l'élève une évaluation loyale de ses propres productions didactiques, il n'a de valeur que pragmatique, n'étant pas reconnue au sein de la relation didactique. Pour Y.Chevallard, chaque notion enseignée doit ainsi apparaître comme "enseignable" (elle doit pouvoir fonctionner comme objet d'enseignement) et comme "apprenable" (elle doit pouvoir donner lieu à des leçons à apprendre et des exercices à faire).

L'élève peut donner une réponse mais ceci ne veut pas dire qu'il y a apprentissage de la notion impliquée. Un tel apprentissage ne peut se faire dans les conditions de négociation déjà citées. L'apprentissage repose non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses ruptures (G.Brousseau, 1984). La rupture a lieu lorsque l'un des partenaires viole le contrat didactique, lorsque la "règle du jeu" n'est plus respectée. Ce sont en fait les ruptures du contrat qui sont importantes.

M.Schubauer-Leoni (1986 et 1987) suggère de prendre en considération dans le contrat didactique une dimension sociale. Il convient alors, selon ce chercheur, d'examiner les deux fonctions à l'oeuvre dans toute relation d'enseignement : celle représentée par le maître, ayant le rôle d'enseigner un savoir donné, et celle incarnée par l'élève devant apprendre ce savoir : comment les élèves, appartenant à des groupes sociaux différents vont-ils jouer le rôle d'élève tel qu'attendu? Y aurait-il des *attentes différentielles* de la part du maître selon les élèves? A la suite notamment de l'article de Bourdieu et De Saint Martin (1975) sur les "catégories de l'entendement professoral", M.Schubauer-Leoni émet l'hypothèse selon laquelle des catégories spécifiques à l'entendement des maîtres de l'école primaire sont fortement opérantes à l'intérieur du contrat didactique qui se révélerait du coup comme étant un *contrat différentiel* déterminant non seulement la représentation que le maître se construit des élèves appartenant aux différentes catégories sociales, mais affectant aussi le savoir enseigné.

II. Étude d'un manuel

L'analyse des programmes et des manuels permet d'accéder à l'aspect officiel de l'objet d'enseignement, ici celui de racine carrée.

Dans un manuel, il existe des indicateurs linguistiques découpant le texte du savoir enseigné. Nous considérons ici un découpage en deux parties : une partie identifiable à un cours (le texte de l'enseignant) et une partie identifiable à des exercices à la charge de l'élève (le travail de l'élève).

Nous faisons l'hypothèse suivante:

Les interrelations cours-exercices révèlent en partie un contrat didactique du fait qu'elles précisent l'ensemble des prestations légitimement exigibles des élèves par l'enseignant[2] utilisateur du manuel et reconnues comme telles par les élèves[3] utilisateurs du manuel à propos de la notion racine carrée.

---

[2] hypothétique

[3] hypothétiques

Nous analyserons de ce point de vue le Chapitre II du livre Pythagore 1989, livre très en usage dans l'Académie de Grenoble. Ce chapitre intitulé "Racine carrée" correspond à l'introduction officielle de la notion de racine carrée.

La structure du chapitre II de ce manuel est précise et explicite.

Dans la partie "cours", les dénominations en langue naturelle "Activités pour s'initier", "La boîte à outils", "Exemple de..." désignent du point de vue de l'auteur du manuel des catégories différentes d'enseignement.

Les "Activités pour s'initier" permettent de faire le point sur ce que l'on sait, de résoudre les problèmes avec les moyens du bord, de découvrir et de démontrer les propriétés nouvelles, d'apprendre à chercher, de développer les capacités à s'exprimer.

"La boîte à outils" (pour consulter les résultats essentiels) donne la définition et les propriétés de la racine carrée. Ce sont des "outils" intellectuels, car ils permettent de s'exprimer, avec précision et, surtout, de faire des calculs et des démonstrations.

"Exemple de..." de la partie cours comporte des remarques ou des conseils méthodologiques pour faire les exercices et doit servir de modèle pour le travail de l'élève.

Dans la partie "exercices", les dénominations "Pour savoir faire" et "Pour chercher" désignent, pour l'auteur, deux niveaux dans le travail de l'élève, celui de "l'application du cours" et celui de "l'initiative et de la réflexion". Particulièrement, les énoncés au début de chaque exercice sont importants. Ils donnent à l'élève des méthodes pour faire les exercices. Ils rendent habituels les problèmes inhabituels (par rapport aux exercices du cours).

II.1. Le cours

Du point de vue du contenu de ce chapitre, les connaissances du cours concernent quatre thèmes : "calcul approché", "produit et quotient de racines carrées", "résolution d'équations $x^2 = a$" et enfin "mesure de grandeurs géométriques".

Le thème dominant de la partie "Pour s'initier" est celui du calcul approché (4 paragraphes sur 7). Son traitement consiste à explorer différentes méthodes de calcul approché de radicaux de nombres, dans l'ordre : "en faisant des essais", en utilisant la courbe joignant 9 points de coordonnées (x; x^2), en utilisant la calculette soit directement, soit par l'intermédiaire de "la méthode de l'escargot de Pythagore" ou de "la méthode de Héron".

Un paragraphe est consacré à la racine carrée d'un produit ou d'un quotient, ce qui revient en fait au calcul de la racine carrée de carrés parfaits. Deux outils d'une mini-boite sont indiqués : "Deux nombres **positifs**, ayant le même carré, sont égaux." et "Si a est un nombre positif, alors $(\sqrt{a})^2 = a$". Quelle signification donner à la dénomination mini-boite (à outils) par rapport à celle de boite (à outils) ? Les propriétés énoncées désignées par l'auteur comme outils "intellectuels" sont des énoncés anciens que l'élève est supposé savoir dans le premier cas, des énoncés *à savoir donc exigibles* par l'enseignant dans le second cas. Remarquons qu'il n'y a aucun outil de la mini-boite dans l'exposé des méthodes de calcul approché ; c'est pour nous l'indice que la présence du thème "calcul approché" est essentiellement fonctionnelle pour l'enseignement et non pour l'apprentissage.

Les activités concernant les deux autres thèmes sont peu nombreuses. Il y a seulement cinq activités en géométrie et trois activités pour la résolution de "$x^2 = a$" sur un total de trente activités et exemples dans le cours. Le théorème de Pythagore est au centre des activités géométriques. La nature des objets géométriques découle de ce nécessaire fonctionnement de la propriété de Pythagore : triangle rectangle, cube et carré.

Le paragraphe intitulé 7 "x^2=a" met en place tout un rituel où l'élève doit compléter des phrases pour montrer qu'il connaît :

- quatre outils de la mini-boite: P_1(signe du carré d'un nombre), P_2 (identité x^2- a =...), P_3 (a.b = 0 revient à dire...), P_4 (Si a ≥ 0 alors $(\sqrt{a})^2$ =...)

- le vocabulaire et la succession des énoncés appropriés à la résolution des équations.

Le domaine des nombres va dépendre de la finalité des activités d'initiation.

Donnons l'exemple des deux premiers thèmes mentionnés :

- calcul approché: ce sont les entiers 2, 3, 5, 7, 11, 15 ou les décimaux (carrés parfaits) 2,25; 23,04 et 0,1024.

- produit ou quotient de racines carrés : ce sont *tous des carrés parfaits* d'entiers (4, 9, 16, 25, 49, 64, 100, 169) ou de décimaux de D_2 [4] (2,25; 2, 56; 2,89; 6,25).

Le passage en revue du domaine des nombres montre que les calculs numériques sur les radicaux concernent essentiellement des entiers "simples", c'est à dire soit des entiers inférieurs à 15, soit des carrés d'entiers inférieurs à 13. Les rares nombres décimaux qui apparaissent dans l'un ou l'autre thème sont tous des carrés d'entiers et, à une exception près, des décimaux de D_2.

Le cours s'achève par l'essentiel, intitulé "La boite à outils": dans cette partie disparaît complètement le thème "calcul approché", ce qui confirme la place particulière déjà signalée de ce thème. Les exemples de calcul qui y figurent sont centrés sur la résolution d'équations et sur ce que Theresa Assude (1992) appelle l'algèbre des radicaux, c'est à dire le calcul sur des expressions du type $x\sqrt{n}$ où n est le plus petit entier possible.

II.2. Les exercices

Les exercices dits de calcul sont prédominants : 73 exercices sur 92. Parmi ces 73 exercices, 66 portent sur les opérations sur les radicaux. Les exercices sont découpés en deux parties : " pour savoir faire " et " pour chercher".

a. Les exercices "pour savoir faire" (42 exercices)

On y retrouve trois thèmes de la partie cours : résolution d'équations "x^2 = a", mesure de grandeurs géométriques, calcul et opérations sur les radicaux. Il n'est plus

---

[4] un nombre décimal de D_n a une écriture décimale à n chiffres après la virgule : cf M.L. Izorche (1977). L'ensemble des décimaux est alors structuré en strates de Dn :à l'intérieur de chaque Dn les nombres héritent des propriétés des entiers.

question de calcul approché. Dans un seul exercice (n° 38), est utilisé le mot approximation de racine carrée d'entiers mais il n'est pas demandé d'en calculer. *L'élève*[5] *peut avoir vu exposer à l'occasion du cours des méthodes de calcul approché mais il ne sera pas exigé de lui qu'il les sache.*

Le calcul et les opérations sur les radicaux occupent une place centrale (32 exercices sur 42). Le calcul d'une racine carrée est celui de la racine carrée de carrés parfaits d'entiers pour la plupart. Les opérations sur les radicaux (16 exercices) se ramènent à la transformation des écritures d'un radical (c'est à dire l'algèbre des radicaux) : l'élève doit apprendre à reconnaître des occasions d'emploi des écritures $x\sqrt{b}$ et quels sont les gestes qui produisent "la bonne réponse", attendue par l'enseignant, selon ce qui lui a été montré en détail dans les exemples de la partie "L'essentiel" du cours. L'élève apprend ce que signifie "simplifier" pour des expressions comportant des radicaux.

Les exercices restant concernent l'ordre sur les racines carrées (3 exercices), la résolution d'équations $x^2 = a$ (4 exercices): les équations sont données soit directement sous la forme $x^2 = a$, soit sous la forme $x^2 + b = 0$, a et b pouvant être positifs ou négatifs ; pour le thème géométrie (6 exercices), l'élève peut faire tous les exercices avec la propriété de Pythagore.

b. Les exercices “pour chercher” (50 exercices)

On ne demande plus directement le calcul de la racine carrée d'un nombre.

Parmi les 50 exercices que comportent cette rubrique, 18 se rapportent aux relations entre opérations arithmétiques et racine carrée. Les expressions sont plus complexes que celles des exercices "Pour savoir faire" : racine carrée de "quotient" d'expressions avec radicaux, racine carrée de produit de puissance d'entiers et de fractions. Mais l'objectif est toujours le même, "simplifier".

Dans les activités sous le titre "Équation $x^2 = a$", on trouve en plus des deux formes $x^2 = a$ et $x^2 + b = 0$, la forme $x^2 + b = c$ où b et c sont des entiers, des fractions ou des racines carrées d'entiers.

13 exercices sont liés au cadre géométrique. On demande de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, d'un carré, d'un rectangle, le diamètre d'un cercle... en utilisant essentiellement la propriété de Pythagore et aussi quelques fois la relation entre l'aire et les côtés de figures du type mentionné ci-dessus.

On trouve dans cette partie des exercices spécifiques :

- 2 exercices sous la rubrique "avec la calculatrice" : en fait c'est un prétexte soit pour montrer l'imprécision des résultats donnés par la calculette (sans aller au delà de cette monstration) (exercice 59) soit pour arguer du caractère erroné d'un résultat dans la résolution d'une équation par un élève fictif (exercice 60).
- 7 exercices sous le titre "curiosité" : 4 portent sur des relations de récurrence entre entiers et radicaux d'entiers. L'élève après avoir vérifié des égalités doit montrer qu'il a bien deviné la relation en l'écrivant pour d'autres entiers. Dans un seul exercice on demande un démonstration (exercice 67).
- 3 exercices où on demande de calculer des radicaux avec des lettres.

---

5 utilisateur du manuel

- 6 exercices se présentent sous le titre "Dans la vie courante ou presque". L'élève doit écrire des relations entre grandeurs géométriques puis utiliser des opérations sur radicaux.

II.3. Les inter-relations du cours et des exercices : le contrat didactique

Après le cours, que doit faire un élève quand il lui est demandé *"Calculer la racine carrée de a"?*

On ne donne jamais d'exercice de calcul de $\sqrt{a}$ avec a négatif. Il y a donc un contrat implicite : on demande "calculer $\sqrt{a}$ " seulement quand a est un nombre positif. L'élève n'a donc pas à sa charge de vérifier si le nombre (ou l'expression) sous le radical est positif (ve) ou non.

Si a est un nombre positif, comment l'élève peut-il calculer $\sqrt{a}$?

• *Dans le cours*, le problème de l'approximation est traité par ostension : on montre des nombres issus de pratiques (relevant d'outils ou de méthodes), et qualifiés de valeur approchée de la racine carrée du nombre étudié. Trois outils de détermination de l'écriture décimale d'une racine sont présentés : une courbe, une calculatrice, un micro-ordinateur ; deux méthodes de recherche d'une valeur décimale approchée sont montrées : l'escargot de Pythagore et la méthode de Héron. Avec une courbe et une calculatrice, on donne des exemples de calcul de racine carrée de nombres décimaux et d'entiers non carrés parfaits. Dans ces cas, calculer une racine carrée, c'est lire sur une calculette le nombre approché (pratique simple) et/ou lire sur une échelle graphique un nombre (pratique plus complexe).

Ce type de pratiques de calcul n'apparaît plus dans la partie *exercices*. Les problèmes d'approximation y sont évités. Au terme des exercices, l'élève sait qu'il doit faire disparaître la racine carrée en recherchant mentalement le carré d'un nombre de même nature (entier, décimal ou fractionnaire) sans jamais avoir à utiliser les pratiques d'approximation présentées dans le cours.

Le traitement exclusif dans la partie cours du calcul approché de la racine carrée montre que par contrat ce type de calcul n'est pas de la responsabilité de l'élève : il semble vivre là pour régler une fois pour toutes le problème de l'existence de la racine carrée des nombres positifs.

Si on regarde d'un peu plus près les exercices de calcul sur les radicaux du manuel, on constate que l'élève a à (re)connaître un nombre limité de carré d'entiers premiers (ceux qui sont plus petits que 13 dans 89 calculs sur 105 [6]).

• *Le thème de la simplification* d'expressions avec radicaux occupe la partie la plus importante de la partie "exercices". Dans le cours, on n'aborde ce thème que dans "L'essentiel" en montrant toutes les détails de la démarche de simplification. Cela atteste que les exemples du cours jouent un rôle premier dans la mise en place des règles du contrat sur la simplification.

---

[6] ces 89 occurences se décomptent ainsi du plus fréquent au moins fréquent : 22 pour le carré de 3, 22 pour le carré de 5, 17 pour le carré de 2, 17 pour le carré de 7, 6 pour le carré de 11, 5 pour le carré de 13. La raréfaction commence dès l'entier 11. Au delà, on décompte 2 calculs pour les carrés de 17 et 19, 1 pour les carrés de 23, 59 et 97 !

Quelles sont les règles du contrat pour simplifier des expressions comportant des radicaux ?

- écrire le nombre sous le radical comme un produit $\sqrt{b.x_i^2}$, b étant le plus petit possible ;
- écrire ce radical sous la forme $x_i\sqrt{b}$ où x_i et b sont entiers ;
- tous les radicaux étant écrits $x_i\sqrt{b}$, écrire $X\sqrt{b}$, où X est la somme "algébrique" des x_i.

La simplification n'a pas de fonctionnalité immédiate : sa finalité est la production de la réponse attendue, c'est à dire le respect d'une succession de gestes que l'élève a la responsabilité d'apprendre à produire. La moitié des exercices avec solutions (6 sur un total de 12) donné à la fin du paragraphe "Pour savoir faire" ont pour consigne de "simplifier" : n'est-ce pas pour aider l'élève dans cet apprentissage ?

• Pour les exercices de rangements des radicaux, l'élève peut utiliser la propriété donnée dans le cours. Dans la partie " exemple de ..." on donne une méthode pour ranger les radicaux: pour comparer deux radicaux on peut élever au carré ces radicaux, puis comparer leurs carrés. Dans la partie "exercices", l'élève est dans une situation habituelle par rapport à la connaissance du cours : les nombres à ranger sont racine carrée d'un entier.

• Pour les exercices de résolution de l'équation $x^2 = a$, on montre dans le cours ce qu'on doit faire *et ce qu'on doit dire.* Le domaine de fonctionnement du thème "résolution d'équation" est plus large dans la partie exercices que dans la partie cours : l'équation à résoudre n'est pas toujours donnée sous la forme primitive $x^2 = a$; les manipulations algébriques permettant de s'y ramener sont considérées comme un savoir ancien ; les nombres peuvent être décimaux. Dans les deux parties il y a absence des lettres.

• Pour faire les exercices géométriques l'élève a à utiliser la propriété de Pythagore comme dans les exemples du cours. Les situations proposées à l'élève sont régies par une règle implicite : pour calculer un grandeur géométrique il faut mettre en évidence un triangle rectangle où intervient cette grandeur et appliquer la propriété de Pythagore.

En guise de conclusion examinons l'un des premiers exercices proposé par Pythagore 3ème dans la partie "Pour chercher" :

Exercice 46: Nous avons les mêmes racines.
Les deux exercices suivants proviennent d'un manuel écrit en langue arabe.

a) حد كتابه الاعداد التالية

$$\sqrt{\frac{6}{384}};\sqrt{\frac{12}{147}};\sqrt{\frac{121}{169}};\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\sqrt{0,0121};\sqrt{0,04};\sqrt{0,36};\sqrt{1,44}$$

b) بيّن ان الاعداد التالية جذرية

$$\frac{3\sqrt{320}}{4\sqrt{45}};\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{147}};\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}};\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{28}};\frac{\sqrt{27}}{4\sqrt{3}};\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{700}}{\sqrt{7}}$$

Il n'y a pas d'énoncés explicites, l'élève doit deviner les questions posées. La maîtrise par l'élève des règles implicites du contrat à propos de la racine carrée est suffisante pour lui permettre de comprendre l'incompréhensible pour qui ne connaît pas l'arabe : quand on donne le radical d'un nombre, on demande de calculer ou de simplifier....; quand on donne un rapport d'expressions où figurent des radicaux, on demande de "rendre rationnel" ...[7]

III. Une expérimentation

Comment réagissent des élèves de troisième, utilisateurs du manuel étudié, si on leur propose des exercices en "rupture" par rapport aux règles du contrat que nous avons mis en évidence ? Contesteront-ils de tels exercices ou s'efforceront-ils d'y répondre comme l'ont fait les élèves du primaire au célèbre problème "Quel est l'âge du capitaine"[8] ?

Nous avons élaboré des exercices du type "âge du capitaine" à propos de la racine carrée : ressemblance quant à la forme et dissemblance quant à la possibilité de répondre dans le respect des clauses du contrat didactique sur la racine carrée de ce niveau. Pour cela, nous avons "copié" la forme d'exercices présents dans le manuel "Pythagore 3ème" et typique du travail de l'élève de ce niveau comme :

- Simplification
- Vérification d'égalité d'expressions comportant des racines carrées
- Calcul de la racine carrée d'un nombre.

Nous avons proposé de tels exercices en avril 1992 à des élèves d'une classe de troisième utilisant le manuel Pythagore[9]. Ces élèves ont résolu ces exercices individuellement en présence de leur enseignant de mathématique qui a organisé la classe en début de séance. Ci-après le texte de trois des exercices proposés.

Exercice 1 Simplifier l'expression $\sqrt{56}+\sqrt{42}$

Exercice 2 *Vrai ou faux ?* Justifier la réponse :
a) $\sqrt{144+289}=\sqrt{144}+\sqrt{289}$
b) $\sqrt{5}+\sqrt{8}=\sqrt{6}+\sqrt{7}$

Exercice 3 Calculer, quand c'est possible, les nombres suivants :
a) $\sqrt{1,44}=$
b) $\sqrt{0,025}=$
c) $\sqrt{0,0009}=$

---

[7] Après consultation d'Hamid Chachoua, chercheur dans l'équipe DidaTech, il s'agit pour a) de "simplifier les nombres suivants" et pour b) de "montrer que les nombres suivants sont rationnels".

[8] célèbre dans le sens où les résultats établis par l'Equipe "Elémentaire" de l'IREM de Grenoble (Revue «grand N», 1980) ont donné lieu à de nombreux commentaires dans la presse (Sciences et Avenir, 1982 ; L'événement du jeudi, 1985 ; Le point, 1985), au livre à succés de S.Baruk (1985) : les résultats surprenants des élèves y étant analysés comme symptomatique de l'échec de l'enseignement des mathématiques ; Y.Chevallard (1988) a renouvelé l'analyse du fait "âge du capitaine" à la lumière du concept de contrat didactique créé par G.Brousseau en 1977.

[9] Nous remercions madame Désolières, professeur de mathématiques au collège de Saint-Ismier (banlieu de Grenoble), d'avoir accepter de nous ouvrir sa classe.

L'analyse que nous présentons maintenant est une analyse fondée sur *l'hypothèse* que les élèves ont appris à reconnaître des formes d'exercices typiques (de leur travail d'élève) et des règles de réponse à ces types d'exercice. Ils répondent comme s'ils respectaient les règles d'un contrat didactique spécifique à la racine carrée : nous considérons en première approximation comme représentatives les règles du contrat formulées à la suite de l'analyse du manuel Pythagore[10].

III.1. Analyse des exercices

Exercice 1: *Simplifier l'expression* $\sqrt{56}+\sqrt{42}$

Un tel exercice appartient au thème de la simplification, thème occupant, rappelons-le, la place la plus importante dans le manuel étudié.

Cet exercice provoque une rupture de contrat du fait que l'élève ne peut respecter complètement les règles implicites du contrat de simplification (voir II.3).

Quelles réponses partielles sont alors possibles ?

Réponse 1 : $\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{14\times 4}+\sqrt{42}=2\sqrt{14}+\sqrt{42}$

42 n'a aucune décomposition de la forme y^2xb avec y et b entiers, on s'arrête donc ici.

Réponse 2 : $\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{98}$

La "racine carrée" d'un nombre est une opération linéaire sur les entiers qui hérite des propriétés des opérations connues : ainsi on a bien simplifié puisqu'il n'y a plus qu'un seul radical.

Les autres réponses

Le contrat de simplification intègre des pratiques de factorisation. On peut donc prévoir des réponses fondées sur ces pratiques :

Réponse 3 : Arrivé à la réponse 1, on produit $\sqrt{b}$ facteur commun pour la factorisation :

$$\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{14\times 4}+\sqrt{3.14}=2\sqrt{14}+\sqrt{3}.\sqrt{14}=(2+\sqrt{3}).\sqrt{14}$$

Réponse 4 : Variante de la réponse 2 où l'on n'écrit que des entiers non "décomposables" sous les radicaux

$$\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{14\times 4}+\sqrt{3\times 14}=2\sqrt{14}+\sqrt{3}.\sqrt{14}=(2+\sqrt{3}).\sqrt{2}.\sqrt{7}$$

Réponse 5 : La simplification est rabattue sur la factorisation, on ne cherche pas à faire apparaître y^2xb avec y et b entier : chaque terme de l'expression est décomposé

---

[10] Nous avons proposé 5 exercices : nous avons reporté en annexe l'énoncé et l'analyse d'un quatrième exercice du type "Résolution d'équation". Cet exercice est inhabituel aussi bien par sa forme que du point de vue de son niveau de difficulté : c'est le seul exercice par rapport auquel l'enseignant a réagi en disant qu'il lui paraissait difficile, les élèves n'ayant jamais résolu un exercice de ce type, ce sur quoi il portait étant hors programme 3ième.

en un produit de facteurs entiers dans lesquels on fait apparaître un facteur commun. Ce qui peut donner par exemple :

$$\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{7\times 8}+\sqrt{7\times 6}=\sqrt{7}.\sqrt{8}+\sqrt{7}.\sqrt{6}=\sqrt{7}.(\sqrt{8}+\sqrt{6})$$

Exercice 2 :Vrai ou faux ? *Justifier la réponse :*

a) $\sqrt{144+289}=\sqrt{144}+\sqrt{289}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{8}=\sqrt{6}+\sqrt{7}$

Ces deux exercices de vérification d'égalité d'expressions comportant des racines carrés sont différent en terme de contrat.

Le premier n'est pas "hors contrat", il peut même être considéré comme classique par rapport à un risque d'erreur balisé dans le manuel par des remarques figurant en bonne place dans "La boîte à outil" (p. 31) :

$$\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16} \qquad \sqrt{100-64}\neq\sqrt{100}-\sqrt{64},$$

remarques justifiées par les pratiques de calcul déjà signalées (reconnaissance de carrés d'entiers). Cependant l'élève aura bien des difficultés à trouver un entier dont le carré est 144 + 289 s'il veut justifier sa réponse par les mêmes pratiques de calcul.

Le second est hors contrat du fait qu'il n'y a pas de carrés d'entiers sous les radicaux, et ceci de manière tout à fait évidente. On peut alors supposer un recours aux pratiques de comparaison d'expressions avec radicaux, essentiellement "par élévation au carré", pratiques justifiées par la propriété suivante énoncée p.32 du manuel : "deux nombres **positifs** sont dans le même ordre que leurs carrés et leurs racines.".

Nous donnons ci-après les réponses possibles qui résultent de cette analyse :

• Exercice 2 a) $\sqrt{144+289}=\sqrt{144}+\sqrt{289}$

Les calculs se faisant sans calculette, on peut prévoir :
- des réponses "sans calcul" s'appuyant sur des "règles" explicitées (rép. 3 et 4)
- des réponses avec calcul des racines (rép. 5).

Réponse 1 : Faux, sans justification

Réponse 2 : Faux, car $\sqrt{144+289}\neq\sqrt{144}+\sqrt{289}$.

Réponse 3 : Faux, avec justification "par calcul", par exemple :
$\sqrt{144+289}=\sqrt{433}$
$\sqrt{144}=12$; $\sqrt{289}=17$; D'où $\sqrt{144}+\sqrt{289}=29$ et $29\times 29\neq 433$

Réponse 4 : Vrai, sans justification

Réponse 5 : Vraie, car $\sqrt{144+289}=\sqrt{144}+\sqrt{289}$.

Cette réponse déjà analysée dans d'autres travaux[11] sur la racine carrée suppose que la "racine carrée" est une opération linéaire sur les entiers.

[11] T.Assude 1988, 1989 et A.Bronner, 1991, 1992.

• Exercice 2 b) $\sqrt{5}+\sqrt{8}=\sqrt{6}+\sqrt{7}$

Réponse 1 : Faux, sans justification

Réponse 2 : Faux avec justification par "élévation au carré" de la somme des radicaux

$$(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2=5+2\sqrt{40}+8=13+2\sqrt{40}$$
$$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=6+2\sqrt{42}+7=13+2\sqrt{42}$$
$$\sqrt{40}\neq\sqrt{42}, d'\ où : (\sqrt{5}+\sqrt{8})^2\neq(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{8}\neq\sqrt{6}+\sqrt{7}$$

Réponse 3: Vrai, sans justification.

Réponse 4 : Vrai, avec justification par "élévation au carré" de chaque radical.

$$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{8})^2=5+8=13$$
$$(\sqrt{6})^2+(\sqrt{7})^2=6+7=13$$

Réponse 5 : Vrai, la "racine carrée" est considérée comme une opération sur les entiers ayant les mêmes propriétés que les opérations connues jusqu'ici.

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}=\sqrt{5+8}=\sqrt{13}$$
$$\sqrt{6}+\sqrt{7}=\sqrt{6+7}=\sqrt{13}$$

Exercice 3 : *Calculer, quand c'est possible, les nombres suivants ;*

a) $\sqrt{1,44}=$

b) $\sqrt{0,025}=$

c) $\sqrt{0,0009}=$

Cet exercice est du type "calcul de racine carrée". D'après l'enseignant de mathématique de la classe concernée, pour le calcul des racines carrées de nombres décimaux les élèves utilisent de façon courante la calculatrice : ils obtiennent alors des valeurs exactes ou approchées. Les exercices où ils doivent calculer "sans calculatrice" la racine carrée d'un nombre décimal sont des cas faciles à traiter mentalement, en général des nombres avec deux chiffres après la virgule. Par contre, ils calculent souvent sans calculatrice la racine carrée d'entier carrés parfaits "simples" (conformément à l'analyse des exercices du manuel, voir II).

L'exercice a) de ce point de vue est un exercice "ordinaire" : c'est le carré parfait d'un nombre décimal et ce carré est un nombre de D2. Nous avons choisi pour les deux autres calculs de nous placer hors des conditions habituelles de calcul "sans calculatrice" : les nombres sous radicaux ont plus de 2 chiffres après la virgule, l'un est carré parfait (0,0009) et l'autre non (0,025).

Dans l'exercice 3, on demande de *"calculer, quand c'est possible, les nombres suivants"*. Si l'on ne prend pas garde à la phrase *"ne pas utiliser de calculatrice"*, la précision *"quand c'est possible"* peut apparaître comme une restriction surprenante. Dans le cours, en particulier dans la partie approximation, il est montré qu'il est possible de calculer la racine carrée de n'importe quel nombre positif. En fait la précision *"quand c'est possible"* a été un "acte manqué" des chercheurs : elle place bien cet exercice dans le territoire du calcul sans calculatrice, territoire d'où sont exclues toutes pratiques de calcul approché.

Pour conduire l'analyse, on suppose le fonctionnement d'une règle implicite du calcul "exact" : $\sqrt{d} = \sqrt{(d')^2} = d'$ d et d' étant de même "nature" (entier, fraction ou décimal). Le problème pour l'élève est donc de trouver d' : pour cela il peut faire appel à des connaissances anciennes sur les décimaux ou essayer de trouver des transformations le ramenant au domaine familier des entiers.

Nous regroupons ci-dessous les réponses aux trois calculs a), b) et c) lorsque elles sont cohérentes par rapport à des règles de production supposées.

Règle 1 : Recherche directe de d' dans D.

a) $\sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$

b) Impossible (ou pas de réponse), sous entendu : "je n'ai pas trouver de d' dont le carré soit 0,025"

c) $\sqrt{0,0009} = \sqrt{(0,03)^2} = 0,03$

Règle 2 : Un nombre décimal est un "entier à virgule" qui peut être transformé en un nombre entier par changement d'unité.

Les fractions "décimales" peuvent être les outils de cette transformation

a) $\sqrt{1,44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \sqrt{\dfrac{(12)^2}{(10)^2}} = \dfrac{12}{10} = 1,2$

b) $\sqrt{0,025} = \sqrt{\dfrac{25}{1000}} = \sqrt{\dfrac{(5)^2}{10 \times (10)^2}} = \dfrac{5}{10\sqrt{10}}$ - Impossible, sous entendu : "je ne peux pas fournir un nombre décimal".

c) $\sqrt{0,0009} = \sqrt{\dfrac{9}{10000}} = \sqrt{\dfrac{(3)^2}{(100)^2}} = \dfrac{3}{100} = 0,03$

Les règles 1 et 2 donnent les mêmes réponses.

Règle 3 : Raisonnement proportionnel : "1,44 est 100 fois plus petit que 144, donc $\sqrt{1,44}$ *est 100 fois plus petit que* $\sqrt{144}$

a) $\sqrt{1,44} = \dfrac{\sqrt{144}}{100} = \dfrac{\sqrt{(12)^2}}{100} = \dfrac{12}{100} = 0,12$

b) $\sqrt{0,025} = \dfrac{\sqrt{25}}{1000} = \dfrac{\sqrt{(5)^2}}{1000} = \dfrac{5}{1000} = 0,005$

c) $\sqrt{0,0009} = \dfrac{\sqrt{9}}{10000} = \dfrac{\sqrt{(3)^2}}{10000} = \dfrac{3}{10000} = 0,0003$

Règle 4 : Un nombre décimal est un "couple d'entiers", séparés l'un de l'autre par une virgule

a) $\sqrt{1,44} = \sqrt{1},\sqrt{44}$: 44 n'est pas carré parfait. Impossible, sous entendu : "je ne peux pas fournir un nombre décimal".

b) $\sqrt{0,025} = \sqrt{0},\sqrt{025} = 0,5$; ou 0,05; ou 0,005

c) $\sqrt{0,0009} = \sqrt{0},\sqrt{0009} = 0,3$; ou 0,03; ou 0,003; ou 0,0003

Les règles 3 et 4 permettent le calcul de $\sqrt{0,025}$. Seule la règle 3 fournit un "d'" aux trois calculs.

III.2. Analyse des réponses des élèves

Exercice 1

Réponse	1	2	3	4	5	Autres	Σ
Effectif	7	1	3	0	9	3	23

Tableau des effectifs pour l'exercice 1.

Sur un total de 23 élèves, 8 (7+1) élèves répondent comme s'ils respectaient partiellement les règles du contrat de "simplification" du manuel (réponses 1 et 2).

12 élèves (3+9) ramènent la simplification à des pratiques de factorisation (réponses 3 et 5).

Trois élèves répondent autrement en violant une règle implicite qui est que "simplifier" c'est travailler sur les entiers et les racines d'entiers :

$\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{14\times 4}+\sqrt{10,5\times 4}=2\sqrt{14}+2\sqrt{10,5}$ (1 élève).

$\sqrt{56}+\sqrt{42}=\sqrt{14\times 4}+\sqrt{10,5\times 4}=2(\sqrt{14}+\sqrt{10,5})$ (2 élèves).

Ces deux réponses ont une signification différente : la première s'apparente à la réponse 1, la seconde à la réponse 5.

En résumé, la moitié des élèves (14 sur un total de 23 d'élèves) ont suivi les règles d'un ancien contrat : celui de **factorisation**, faute de pouvoir faire ce qu'ils ont à faire dans le cadre du contrat habituel

Exercice 2

Exercice 2 a)

Réponse	1[Faux]	2[Faux]	3[Faux]	4[Vrai]	5[Vrai]	Σ
Effectif	1	15	6	0	1	23

Tableau des effectifs selon le type de réponse pour l'exercice 2a).

22 élèves sur un total de 23 élèves disent que l'égalité est fausse mais leurs justifications sont différentes :

- 15 élèves utilisent la remarque donnée dans le cours qui a bien joué le rôle voulu (réponse 3). Un élève apporte la précision suivante :

Faux, ce serait juste si on avait une multiplication au lieu d'une addition.

- 6 élèves justifient leurs réponses par un calcul : 2 élèves écrivent un calcul correct et complet, les 4 élèves restants donnant une explication incomplète et/ou incorrecte.

- Un seul élève donne le résultat linéarité : *Vrai car on peut additionner 2 racines.* (réponse 4)

Exercice 2 b)

Réponse	1[Faux]	2[Faux]	Autres[Faux]	3[Vrai]	4[Vrai]	5[Vrai]	Pas de réponse	Σ
Effectif	5	3	2	0	8	1	4	23

Tableau des effectifs selon le type de réponse pour l'exercice 2b)

10 élèves répondent que *"c'est faux"* (correct).

9 élèves répondent que *" c'est vrai"* (incorrect).

4 élèves ne donnent pas de réponse, l'un de ces 4 ajoutant : *"impossible de savoir sans calculette"*.

- Justification des réponses *"c'est faux"*:

Parmi les 10 réponses "c'est faux" 3 seulement le justifient par un calcul "par élévation au carré" de la somme des radicaux (réponse 3) et sur ces trois élèves seul un donne un calcul cohérent.

5 élèves ne donnent aucune justification (réponse 1) et 2 (autres) le justifient ainsi :

$\sqrt{5}+\sqrt{4}\sqrt{2}=\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{7}$ - *Faux*

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}+\sqrt{8}\neq\sqrt{13}\\ \sqrt{6}+\sqrt{7}\neq\sqrt{13}\\ 2\sqrt{2}+\sqrt{5}\neq\sqrt{6}+\sqrt{7}\end{array}\right\}\textit{Faux}$$

Au moment de l'expérimentation, les élèves ont passé beaucoup de temps pour trouver une explication à leur réponse. Nous avons demandé à 3 des 5 élèves ne donnant pas de justification : "pourquoi dis-tu que *c'est faux?"* ils ont répondu : *"je pense que c'est faux mais je ne sais pas pourquoi"*. Tout se passe comme s'ils ne disposaient pas d'outils pour argumenter.

- Justification des réponses *"Vraie"* (incorrecte).

Toutes ces réponses sont justifiées en élevant chaque radical au carré (réponse 4) pour 8 élèves sur 9, 1 élève écrivant explicitement $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

La justification par "linéarité" de la racine carrée comme opération reste isolée : c'est la même élève qui y recours dans les exercices 1 et 2.

Les justifications s'appuient en majorité (11 sur 14 justifications) sur des pratiques d'"élévation au carré" qui pour la plupart (8 sur 11) portent sur un radical. L'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, supposé connue, semble peu disponible ou peu pertinente pour la somme de 2 radicaux : elle ne fait disparaître que partiellement les dits radicaux.

Exercice 3

L'analyse porte sur 22 élèves : seul 1 élève ne donne aucune réponse. 11 élèves fournissent un décimal d' à *tous les calculs* a), b) et c).

Ci-après les procédures utilisées pour calculer chaque racine carrée et le nombre d'élèves correspondant :

* Pour $\sqrt{1,44}$: 16 élèves donnent 1,2 comme réponse (R1 ou R2).

5 élèves répondent 0,12 (R3) et 1 élève écrit impossible (R4)

* Pour $\sqrt{0,025}$: 10 élèves seulement déclare que ce calcul est impossible. Un élève précise : " $\sqrt{0,025}$ *C'est toujours possible de calculer une racine carrée mais il faut être doué au calcul mental pour résoudre cela"* .

12 élèves fournissent un nombre décimal d' (dont le carré est 0,025) : pour 4 élèves d' est 0,05 (R4), pour les 8 autres d' est 0,005 (R3 ou R4).

* Pour $\sqrt{0,0009}$:

20 élèves fournissent un nombre décimal d' (dont le carré est 0,0009) : pour 10 élèves d' est 0,03 ; pour les 12 élèves restants, d' est 0,003 (2 élèves) ou 0,0003 (8 élèves) (R3 ou R4) ;

pour 2 élèves le calcul est impossible.

Seuls 3 élèves justifient leur résultat . Ci-après leurs justifications :

élève 1

$$\sqrt{1,44} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{16 \times 9}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{16}\sqrt{9}}{\sqrt{25}\sqrt{4}} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{12}{10} = 1,2 \quad \text{[R2]}$$

$\sqrt{0,025}$ *impossible - on n'arrive qu'à* $\dfrac{5}{10\sqrt{10}}$ (R2)

$\sqrt{0,0009} = 0,03$

élève 2

$\sqrt{1,44} = 0,12$. *La racine carrée de 144 est 12. Ici, c'est* $\sqrt{1,44}$ *on divise alors par cent 12:100 = 0,12;*

$\sqrt{0,025} = 0,05$. *La racine carrée de 25 est 5. Ici, c'est* $\sqrt{0,025}$. *On divise alors par 1000: 5 : 1000 = 0,005 ;*

$\sqrt{0,0009} = 0,0003$ *La racine carrée de 9 est 3. Ici, c'est* $\sqrt{0,0009}$ *On divise alors par 10000 3 : 10000 = 0,0003.* (R3)

élève 3

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{1,44} &= \sqrt{144}\sqrt{0,01} = 12\sqrt{0,01} = 0,12 \\
\sqrt{0,025} &= \sqrt{25}\sqrt{0,001} = 5\sqrt{0,001} = 0,005 \\
\sqrt{0,0009} &= \sqrt{9}\sqrt{0,0001} = 3\sqrt{0,0001} = 0,0003
\end{aligned}\right\} \text{(R'3)}$$

Les réponses de 12 élèves peuvent être analysées comme cohérentes, c'est à dire comme produites par une même règle : la réponse "attendue" pour 8 élèves (R1 ou R2), la réponse "proportionnelle" pour 3 élèves (R3 ou R'3 : voir ci-dessus les justifications des élèves 2 et 3), la réponse "couple d'entiers" pour 1 élève (R4). Les réponses des 11 autres élèves dépendent des nombres sous les radicaux.

Deux constatations remarquables :

- tous les résultats donnés sont dans le cadre du contrat sur le calcul "sans calculatrice" : chercher un nombre d' de même nature sinon déclarer que c'est impossible : pour 11 élèves tous les calculs sont possibles !

- pour $\sqrt{1,44}$ la majorité des élèves donnent le bon résultat (16/23) ; pour les deux autres calculs, la majorité des élèves donnent des résultats erronés interprétables comme rattachables à des règles d'action sur les nombres décimaux, "couple d'entiers" en majorité. Seuls 8 élèves donnent le résultat attendu pour l'ensemble des 3 calculs.

Conclusion

La présentation des exercices aux élèves ressemble par bien des points à une évaluation scolaire sur la racine carrée et on pourrait considérer que cette présentation apporte des limitations à nos interprétations. Cependant nous pensons qu'ainsi on accède à ce que l'élève accepte de rendre public, à ce qu'il juge acceptable de montrer à l'enseignant, à ce qu'il pense répondre à ses attentes. C'est cela qui justifie l'analyse en terme de contrat didactique.

L'expérimentation, fondée sur le choix de problèmes inhabituels (c'est à dire ressemblant aux exercices prédominants à ce niveau quant à la forme mais dissemblables quant au respect du contrat didactique), a permis au travers des réponses des élèves de mettre en évidence que :

- une rupture de contrat n'entraîne pas un arrêt du travail de l'élève ;
- l'élève fonctionne sous les contraintes d'un contrat qui est qu'"un problème proposable possède une réponse", phénomène déjà analysé par Y.Chevallard à propos de "l'âge du capitaine" (1983) ;
- l'élève cherche à respecter les règles du contrat spécifique de la notion de racine carrée et du type d'exercice ; quand il ne le peut pas (il n'a pas obtenu un unique radical par exemple pour la simplification), il peut engager des pratiques régies par les règles d'un autre contrat (factorisation par exemple) ou bien il peut montrer ce qu'il sait faire (décomposer les nombres dans le radical en un produit des facteurs par exemple) et pourquoi il ne peut pas aller plus loin (dans la simplification par exemple).

Les exercices proposés ne sont finalisés à ce niveau (calsse de troisième) que par les attentes de l'enseignant perçues par l'élève : par exemple, la simplification d'expressions comportant des racines carrées, c'est obtenir une réponse de la forme $X\sqrt{b}$. Pourquoi l'élève doit-il apprendre à répondre ainsi et pas autrement ? Seul l'enseignant connaît un futur mathématique où cette réponse aura une fonctionnalité.

Bibliographie

ASSUDE.R. (1988). *Racine carrée: conception et mise en situation d'élèves de Quatrième et Troisième.* DEA de didactique des disciplines scientifiques, Grenoble.

ASSUDE.R. (1989). Racine carrée : conceptions et mises en situations d'élèves de quatrième et troisième, *Petit x. n°20,* pp.5-33 .

ASSUDE.R. (1992). *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Écologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum,* Thèse, université Joseph Fourier, Grenoble.

BOURDIEU P. et DE SAINT MARTIN M. (1975) Les catégories de l'entendement professoral. *Actes de la recherche en sciences sociales,* 3.

BRONNER.A. (1991).*Modélisation de connaissances d'élèves à propos de la racine carrée,* DEA de didactique des disciplines scientifiques, Grenoble.

BRONNER.A. (1992). Connaissance d'élèves Maliens a propos de la racine carrée. *Petit x. n°28*, pp.19-55 .

BROUSSEAU.G. (1980) Les échecs électifs en Mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie. Vol* 101. n° 3.4

BROUSSEAU.G (1982) *Ingénierie didactique. D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique.* Deuxième École d'été de didactique des Mathématiques. Orléans.

BROUSSEAU.G (1984) *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage mathématiques.* Troisième École d'été de didactique des Mathématiques. Orléans.

BROUSSEAU.G (1986). Fondements et Méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 7. N° 2.

CHEVALLARD.Y (1983) *Remarques sur la notion de contrat didactique.* Publication de l'IREM d'Aix. Marseille.

CHEVALLARD.Y (1988) *Deux étude sur les notions de contrat et de situation.* Publication de l'IREM d'Aix. Marseille.

IZORCHE M-L. (1977) *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Bordeaux I.

LE THI HOAI A. (1992) *Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I..

SCHUBAUER M.L.(1986) Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8-9 ans. *Interaction didactique n° 7.*

SCHUBAUER M.L. (1987) Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement. *Interaction didactique n° 8.*

ANNEXE

Analyse a priori de l'exercice 4 et des réponses des élèves

1. Analyse de l'exercice

Exercice 4 :

a) Voici les réponses d'un groupe d'élèves pour l'exercice "Résoudre l'équation $\sqrt{x^2} = x$"

a) il n'y a pas de solution
b) tous les nombres sont solutions
c) 0 est solution
d) tous les nombres positifs sont solutions
e) tous les nombres négatifs sont solutions.

Quelle est la bonne réponse et explique pourquoi ?

b) Voici les réponses d'un groupe d'élèves pour l'exercice "Résoudre l'équation $\sqrt{x^2} = -x$"

a) il n'y a pas de solution
b) tous les nombres sont solutions
c) 0 est solution
d) tous les nombres positifs sont solutions
e) tous les nombres négatifs sont solutions.

Quelle est la bonne réponse et explique pourquoi ?

Dans le manuel **on ne traite que des équations avec des nombres** en général entiers : dans ce cas, on détermine sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif (sinon, on sait que c'est impossible). Dans le cours, on explique que "Résoudre l'équation $x^2 = 5$" c'est chercher tous les valeurs de x pour que l'égalité $x^2 = 5$ soit vraie" : ces valeurs sont en nombre fini.

L'élève peut donc tenter de résoudre l'équation $\sqrt{x^2} = x$, ou $\sqrt{x^2} = -x$ en cherchant un nombre fini de valeurs de x pour que l'égalité $\sqrt{x^2} = x$, ou $\sqrt{x^2} = -x$ soit vraie.

Quand on écrit "choisir la bonne réponse" on suggère fortement qu'il existe une seule bonne réponse.

Exercice 4.A

Réponse a) : non attendue

Réponse b) : "tous les nombres sont solution".

Justification + J_b : $\sqrt{x^2} = x$ pour tous les nombres x. Donc tous les nombres sont solution.

Dans cette justification on traite x comme un nombre positif.

Réponse c) : "0 est solution".

Justification +J_c : si x=0 alors $x^2 = 0$ et $\sqrt{0} = 0$, 0 est une solution. Donc c'est la solution (puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse).

Réponse d) : "tous les nombres positifs sont solutions"

Justifications +J_{1d}: $\sqrt{x^2} = x$: une racine carrée est positive donc l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ est vraie pour tous les x positifs.

+ J_{2d} : on prend un nombre positif, par exemple x = 5 ; on vérifie l'égalité $\sqrt{(5)^2} = 5$. Donc tous les nombres positifs sont solutions.

Réponse e) non attendue.

Exercice 4.B

Réponse a) : "il n'y a pas de solution".

Justifications + J_{1a} : $\sqrt{x^2}$=x donc l'équation $\sqrt{x^2} = -x$ n'a pas de solution.

+ J_{2a} -x est négatif et $\sqrt{x^2}$ est positive (la racine carrée d'un nombre est toujours positive). Donc l'équation $\sqrt{x^2} = -x$ n'a pas de solution.

Réponse b) non attendue.

Réponse c) "0 est solution".

Justification + J_c : $\sqrt{0} = 0 = -0$. Donc 0 est solution. Donc c'est la solution (puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse).

Réponse d) non attendue.

Réponse e) "tous les nombres négatifs sont solutions".

Justifications + J_{1e} : $\sqrt{x^2} > 0$ donc $\sqrt{x^2} = -x$ est vraie pour tous les x négatifs.

+ J_{2e} : on prend un nombre négatif, par exemple x = -7. On vérifie $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{14} = 7 = -(-7)$). Donc tous les nombres négatifs sont solutions.

Il faut noter que l'ordre des réponses peut jouer un rôle : l'élève va chercher à vérifier les réponses dans l'ordre proposé : c'est un aspect implicite du contrat didactique concernant les problèmes. Un élève peut examiner les réponses dans l'ordre proposé: si l'une des réponses est vraie pour lui, il peut s'arrêter là : toutes celles qui précédent et toutes celles qui suivent sont fausses puisqu'implicitement dans cet exercice une seule réponse est juste!

2. Analyse des réponses des élèves

Exercice 4

Exercice 4A : $\sqrt{x^2} = x$

Tableau 15 : hiérarchie des réponses selon les effectifs

Réponse choisie	Arguments	Effectif	Effectifs cumulés
d "tous les nombres positifs"	J_{1d}	10	17
	J_{2d}	5	
	Autres: -*"On peut pas mettre négatif dans une racine carrée"*	1	
	-*"$\sqrt{x}$ et x^2 s'annulent donc $\sqrt{x^2} = x$ et dans une équation on ne peut pas mettre négatif"*	1	
b "Tous les nombres"	-*"x négatif: x=-3: $\sqrt{(-3^2)}=\sqrt{9} = 3$ ou -3. Donc tous les x négatifs sont solutions Si x positif: $\sqrt{3^2}=\sqrt{9} = 3$ ou -3. Donc tous les x positifs sont solutions.*	1	3
	-*"D'après la propriété $\sqrt{(a^2)} = a$, tous les nombres positifs sont solutions et les nombres négatif au carré donnent un nombre positif*	1	
	- Sans justification	1	
a "pas de solution"	*"$\sqrt{(x^2)} \neq (\sqrt{x})^2\ (=x)$"*	1	2
	"Il n'y a pas de solution car x = x ça on sans doute un peu"	1	
			Total : 22

17 sur un total de 22 élèves donnent une réponse correcte (réponse d) : leur justification est le plus souvent incomplète quand ils argumentent en s'appuyant sur les propriétés de la racine carrée (12 élèves). 5 élèves se contentent de vérifier sur un entier positif que l'égalité est vérifiée.

Les arguments des choix de b et/ou a sont les suivants :

Pour les deux élèves choisissant la réponse b, une racine carrée peut être négative

* Un élève a appliqué une propriété (qui n'est pas dans le manuel) "$\sqrt{x^2} \neq (\sqrt{x})^2$ dans la résolution de l'équation "$\sqrt{x^2} = x$.

Exercice 4B: $\sqrt{x^2} = -x$

Le tableau 16 ci-après donne une hiérarchie des réponses selon les effectifs

Parmi les 9 élèves qui choisissent la réponse e (correcte) seuls 3 élèves utilisent une justification du type "$\sqrt{x^2} > 0$ donc $\sqrt{x^2} = -x$ est vraie pour tous les x négatifs (J_{1e}). Il est à noter que 2 élèves justifient leur réponse e par l'égalité x=-x.

Plus de la moitié des élèves (12 sur 22) ont choisi la réponse a : les justifications s'appuient sur des connaissances numériques antérieures: cinq élèves écrivent une justification du type "-x négatif et $\sqrt{x^2} > 0$" (J_{2a}), -x ne pouvant être que la désignation d'un nombre négatif (difficulté bien connue). Trois élèves considèrent l'égalité $\sqrt{x^2} = x$, comme la réécriture de la propriété du cours $\sqrt{a^2} = a$ (écrite pour les nombres positifs) : $\sqrt{x^2} = -x$ est donc fausse (J_{1a}).

Tableau 16 : hiérarchie des réponses selon les effectifs

Réponse choisie	Arguments	Effectif	Effectifs cumulés
a "pas de solution"	J_{2a} J_{1a} Autres: -*"Un carré n'est jamais négatif"* -*"Un nombre négatif n'a pas de solution"* Sans justification	5 3 2 1 1	12
e "Tous les nombres négatifs "	J_{1e} J_{2e} Autres: -*"x est un nombre négatif"* -*"x = -x"* -*"$\sqrt{x^2}$= -x, x=-x. e car x est un nombre négatif* - Sans justification -*"car une racine carrée peut-être négative"*	3 1 1 1 1 1 1	9
c "O est solutions"	J_c	1	1
			Total : 22

Le tableau 17 met en relation les choix des réponses dans les exercices 4A et 4B

Tableau 17

	4A	Effectif	4B	Effectif
Réponse choisie	d	17	e a c	8 8 1
Réponse choisie	b	3	a e	2 1
Réponse choisie	a	2	a	2

Huit élèves répondent correctement aux deux exercices. (d suivi de e).

Sur les neuf élèves donnant la réponse "Tous les nombres positifs" à 4A, huit disent "Il n'y a pas de solution" à 4B. (d suivi de a) et un qu'il n'y a que 0 (d suivi de c).

Exemples de réponses d'élèves de type d suivi de a

4A d) car on ne peut pas mettre de nombre négatif dans une racine carrée.

4B a) car tous les carrés sont positifs

4A d) car par exemple $\sqrt{2^2=2}$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{-2^2}= \sqrt{4} \neq -2$;

4B a) car un nombre négatif n'a pas de solution)

4A d) car racine carrée et carré s'annulent donc $\sqrt{x^2} = x$, x=x et dans une équation on ne peut pas mettre de nombre négatif.;

4B a) car on ne peut pas mettre de nombre négatif dans l'équation et en plus $\sqrt{x^2} = -x$, x $\neq$-x

4A d) car un carré est toujours positive donc x>0

4B a) car un carré n'est jamais négatif.

4A d)$\sqrt{x^2} = x$, x =x

4B a)$\sqrt{x^2} = -x$, x =-x

4A d) car $\sqrt{2^2}=2$; $\sqrt{4}=2$, 2=2

4B a) sans justification

4A d) avec J_{1a} pour 4a (bonne justification) et

4B a)"car une racine carrée n'est jamais négative" .

Les deux élèves qui répondent "il n'y a pas de solution" pour 4A maintiennent leur réponse pour 4B (a suivi de a).

Deux élèves qui répondent "Tous les nombres" pour 4A répondent en toute logique "il n'y a pas de solution' pour 4B (b suivi de a). Un élève répond "Tous les nombres" pour 4A, et "Tous les nombres négatifs" pour 4B (b suivi de e).