PROBLEMES DE CONSTRUCTION ET DE REDACTION DE PROCEDES

Nathalie RIVAL
Professeur au Collège de l'Isle
Vienne

I. Introduction

Cet article[1] a pour but de rendre compte en partie des positions respectives d'enseignants et d'élèves par rapport au savoir géométrique. Pour étudier ces phénomènes nous avons choisi la géométrie, et parmi les différents types de tâches, les problèmes de construction. En effet, il nous semble que les élèves ont de grandes difficultés à aborder des notions géométriques ou à établir une méthodologie dans ce domaine alors que, de plus en plus, la géométrie devient prépondérante dans les programmes. Nous souhaitons en particulier répondre à deux préoccupations fondamentales pour notre enseignement en nous aidant de travaux déjà conduits dans ce domaine. Lors de la résolution d'un problème de construction géométriques,

- quelles sont les interactions entre les évolutions respectives des dessins et des procédés de construction des élèves ?
- quelles sont les interférences entre le texte d'explication rédigé par les élèves et leur procédé de construction ?

II. Choix expérimentaux

II.1. Pourquoi des problèmes de construction

Le domaine de la géométrie au collège étant très vaste, et les tâches très nombreuses, nous avons opté pour la recherche de procédés de construction utilisables et vérifiables par le tracé d'une figure.

a. Une situation nouvelle

La réflexion mathématique proposée à un élève ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, résultats, techniques et démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir des questions qu'il s'est posées, et qu'il sache mobiliser ces connaissances pour résoudre des

[1] Cet article a été élaboré à partir du mémoire professionnel réalisé par Béatrice Allard et Nathalie Rival dans le cadre de la deuxième année à l'IUFM de Grenoble.

problèmes. En ce sens, il convient de faire fonctionner à propos de nouvelles situations les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. C'est pourquoi nous cherchions à ce que les élèves soient capables de réinvestir des notions déjà acquises afin de donner un sens à leurs connaissances.

La géométrie que nous appelons “classique” a comme démarche habituelle la rédaction d'une démonstration s'appuyant sur un dessin donné ou à tracer, mais dont le tracé s'effectue sans difficulté : le problème ne réside pas dans le tracé du dessin. La démonstration apparaît alors comme une exigence de l'enseignant et non comme un outil de résolution de problème. Un exemple significatif, en classe de quatrième, est l'initiation à la démonstration. Par exemple pour l'étude des parallélogrammes on demande toujours aux élèves de “visualiser la figure”, d'analyser ces quadrilatères particuliers puis de démontrer leurs constatations.

Pour obtenir un type de situation nouveau, nous nous sommes fixées certaines contraintes :

- d'une part, l'absence de mesures. En effet, dans les manuels scolaires du collège, il est rare de trouver des exercices comportant des figures sans mesures (segments, triangles, rectangles, parallélogrammes....)
- d'autre part, des problèmes de type “problème ouvert”, où l'énoncé ne laisse pas apparaître des méthodes conduisant à la résolution. De nombreux exercices du secondaire comportent des indications, voire même des étapes clairement explicitées, pour guider les élèves vers la solution. Dans notre cas, l'activité de l'élève ressemble par moment à celle d'un chercheur. Nous avons choisi un problème ouvert où l'existence de la solution n'est pas contestable par les élèves.

Nous avons mis les élèves en groupes (de 3 ou 4) en leur demandant de “résoudre ensemble les problèmes, de rédiger et d'expliciter un procédé de construction expliquant leur solution pour un élève extérieur”. Cette demande est guidée par le fait que la situation permet alors aux élèves d'extérioriser leurs démarches et leurs procédures de résolution, à la fois au sein du groupe et dans la rédaction pour un autre élève. Lors de leurs discussions, un conflit peut apparaître provenant des différentes conceptions qu'ils ont de l'objet mathématique en question. Pour résoudre ce conflit, les élèves vont devoir mettre en œuvre des argumentations. Cette façon de travailler est inhabituelle pour les élèves.

b. Objectif d'une telle situation

Ce type de problème vise à développer les capacités de raisonnement, à encourager une expression orale et écrite claire et donc d'arriver à ce que les élèves :

- trouvent les mots appropriés pour traduire leurs idées afin de communiquer leurs affirmations ;
- soient compris par leurs camarades ce qui implique l'explicitation de leurs implicites ;
- travaillent de façon méthodique en étant ordonnés et soigneux : ils ont l'obligation d'être rigoureux s'ils veulent que leur procédé écrit soit compris ;
- enfin, soient en mesure de justifier leurs procédures puisqu'ils doivent travailler à plusieurs et donc convaincre, si besoin est, leurs camarades.

Tout ceci concourt à la formation intellectuelle des élèves leur permettant ainsi de progresser, grâce en particulier aux interactions entre élèves donnant une dimension sociale à leurs arguments de type mathématique. La situation sera en cela semblable à celles utilisées par Nicolas Balacheff (1988) pour l'apprentissage de la démonstration.

Du point de vue mathématique, nous nous étions mis d'accord pour insister sur le fait qu'un dessin n'est pas en lui même une preuve, que la simple visualisation des propriétés ne peut pas être une procédure valable. Pour atteindre ce but, nous avons choisi un énoncé dans lequel la "construction" n'est pas immédiate, et où les élèves doivent s'appuyer sur des propriétés afin d'aboutir à un procédé de tracé incontestable : le dessin exige une analyse mathématique. Par contre l'élaboration, par un groupe d'élèves, du procédé commun facilite l'observation des différentes stratégies exposées (par exemple, gestes indiquant, sans tracé, des solutions envisagées).

II.2. Présentation du problème

a. Énoncé, pré-requis et propriétés mises en jeu

L'énoncé suivant était donné aux élèves :

> *Soient D et D' deux droites sécantes en O et un point A (n'appartenant ni à D ni à D'). Tracer une droite passant par A coupant D en P, D' en P', de façon que P soit le milieu de [AP'].*

Sachant qu'il y a plusieurs manières de le résoudre, nous allons énumérer les pré-requis, propriétés et théorèmes utilisables. Il est clair qu'un élève ne peut pas forcément tous les utiliser.

• Ces activités impliquent pour les élèves qu'avec les instruments dont ils disposent par contrat (uniquement compas et règle non graduée), ils sachent :

- construire le milieu d'un segment (sans règle graduée) ;
- construire la parallèle à une droite passant par un point (sans équerre) ;
- construire un parallélogramme.

• Pour réaliser ces tâches, les élèves doivent utiliser des propriétés ou théorèmes suivants :

- le théorème de Thalès et sa réciproque (dans le cas particulier où les rapports valent 1/2) ;
- les propriétés de la droite des milieux dans un triangle ;
- la propriété : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

b. Choix de l'énoncé

Des critères précis ont guidé le choix de l'énoncé. Celui-ci devait être compris rapidement par tous et la solution ne pouvait être immédiatement évidente pour personne. Il ne propose ni méthode, ni pistes et encore moins le secteur du champ conceptuel adapté à la solution. Ainsi, le problème n'est pas localisé pour l'élève (Audibert 1982). De plus, sa partie informative (les données), précède les consignes de construction dans le but de le simplifier et de poser ainsi clairement les éléments fixés au départ.

Le problème doit aussi intéresser tous les élèves : peu importe leur niveau mathématique (du supérieur à la quatrième), ils sont tous en mesure de trouver une solution. C'est pour cette raison que nous avons opté pour un problème dont le résultat n'offre aucune ambiguïté. Il est visiblement possible, et il s'appuie sur des propriétés mathématiques précises et connues, sinon c'est seulement par tâtonnement que les élèves obtiennent une “figure juste".

Nous tenions à proposer des constructions non habituelles (dans le sens où les élèves n'ont pas à leur disposition les outils couramment utilisés). Pour y parvenir, nous n'avons pas autorisé l'équerre et la règle graduée, mais lors de sa réflexion, le groupe pouvait se servir d'une règle graduée tout en sachant que les récepteurs du message n'en étaient pas pourvus. Ceci tendait à éviter les constructions approchées en empêchant les élèves de faire intervenir des mesures.

Nous avons focalisé notre attention sur la communication, d'une part à l'intérieur du groupe en forçant les élèves à extérioriser leurs démarches, d'autre part vers l'extérieur en les obligeant à rédiger un procédé pour autrui. En effet, au sein du groupe, l'obligation d'une production unique les contraint à défendre leurs argumentations et les différents cheminements permettent de fructueuses comparaisons. L'exigence de la rédaction d'un message pour un autre élève, extérieur au groupe, oblige à être clair, précis et concis dans l'écrit. Tout ce dispositif ajoute au problème une dimension sociale.

II.3. Déroulement de la séquence

Nous avons choisi des classes de deux niveaux, une troisième et une seconde et avons constitué cinq groupes d'élèves du premier niveau et deux groupes du second. Pour collecter les échanges au sein du groupe, ainsi que l'évolution de chaque élève, nous avons mis un observateur par groupe.

Avec l'énoncé déjà cité, nous donnons les consignes fournies aux élèves.

Consignes : rédigez un procédé de construction pour qu'un élève, qui ne connaît pas le problème, puisse réaliser la construction en suivant seulement le procédé proposé.
Matériels utilisables :
- une règle graduée ;
- un compas.

ATTENTION !
- une construction approchée n'est pas une solution ;
- l'élève qui reçoit votre procédé ne possède pas de règle graduée (il ne peut donc pas faire une construction simplement avec des mesures).

Vous devez rendre une production par groupe.
L'observateur de votre groupe a des consignes pour intervenir quand il le faut. Cela ne sert donc à rien de lui poser des questions pour vous aider, il n'y répondra pas, essayez plutôt de vous questionner entre vous.
Essayez de mettre sur la feuille tous les procédés auxquels vous pensez, même faux, en expliquant pourquoi vous rejetez une piste ou pourquoi vous gardez une proposition. Détaillez bien votre explication à l'écrit.
Travaillez en équipe.

III. Analyse préalable

III.1. Résolution du problème. Méthodes attendues

(Il s'agit ici des méthodes de résolution mathématiquement correctes).

On commence par tracer deux droites D et D' sécantes en O et un point A n'appartenant ni à D, ni à D'.

Première méthode : Construction à l'aide du théorème de Thalès ou du théorème des milieux.

On trace [OA], on construit le milieu I de [OA]. On construit la parallèle à D' passant par I, celle-ci coupe D en P. On construit la droite (AP), elle coupe D' en P' : on a ainsi construit le milieu P de [AP'].

En effet, d'après le théorème de Thalès ou le théorème des milieux que l'on applique aux triangles AIP et AOP' ((IP) // (OP') par construction), I étant le milieu de [AO], P sera le milieu de [AP'].

Voici les différents cas de figures suivant la position du point A.

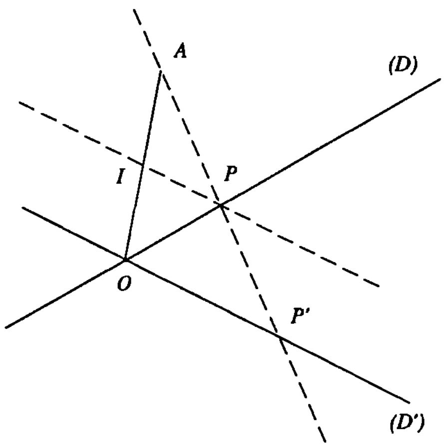


Fig 1. "A en haut"

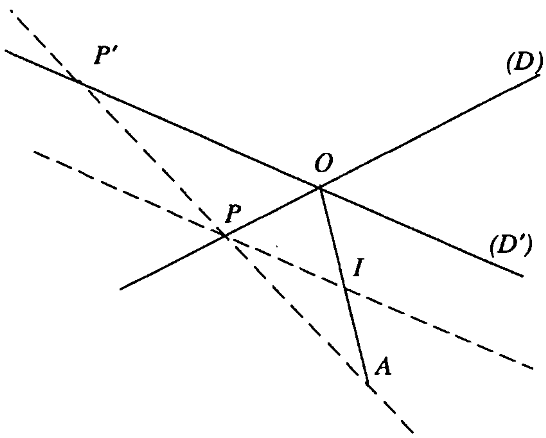


Fig 2 "A en bas"

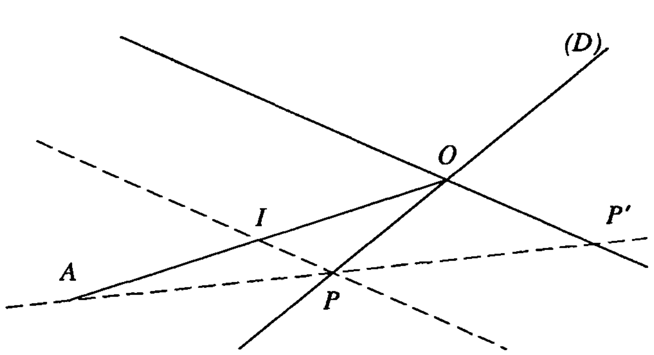


Fig 3. "A à gauche"

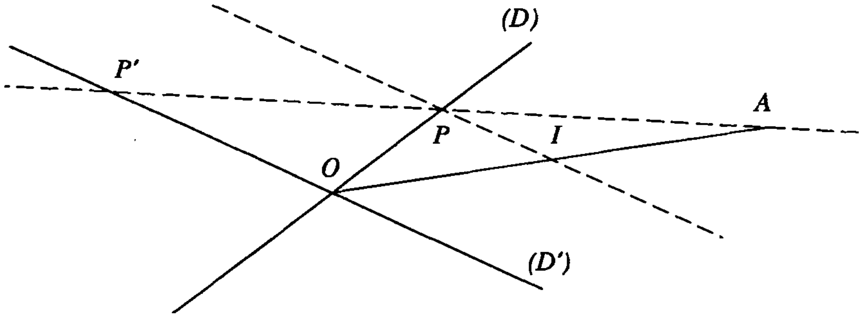


Fig 4 “A à droite”

Deuxième méthode : Construction à l'aide de la configuration du parallélogramme.

On trace la parallèle à D' passant par A, elle coupe D en Q. Par Q, on dessine la parallèle à (OA) qui coupe D' en P'. On a ainsi construit le parallélogramme OAQP'. On nomme P le point de concours de ses diagonales [OQ] et [AP'] : P est donc bien le milieu de [AP'].

En effet, comme les diagonales du parallélogramme OAQP' se coupent en leur milieu , P est le milieu de [AP'].

Voici les différentes figures suivant la position relative du point A et des droites D et D'.

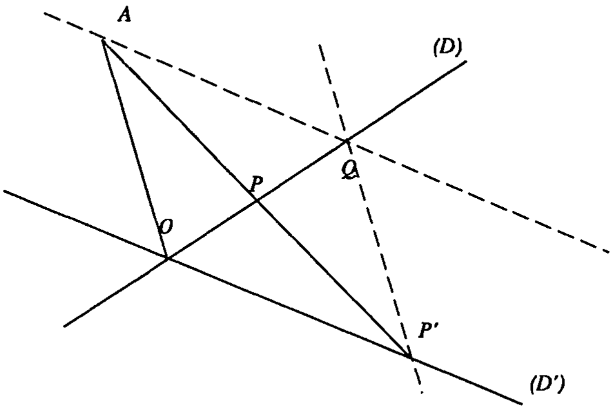


Fig 1 bis

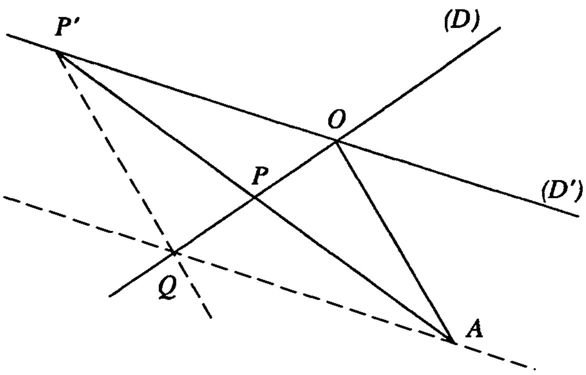


Fig 2 bis

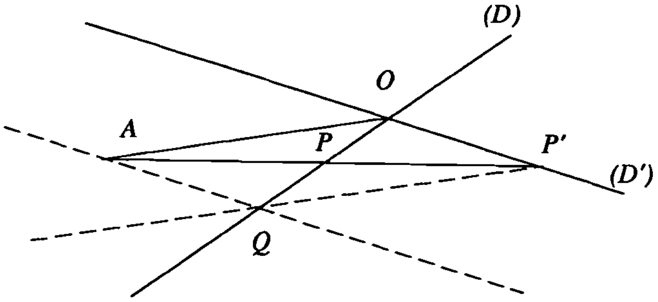


Fig 3 bis

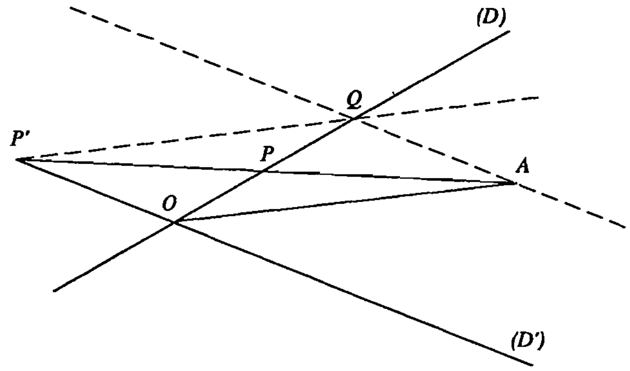


Fig 4bis

Remarque : il existe au moins une autre méthode utilisant des homothéties, abordable en classe de seconde, mais cette notion ne leur étant pas encore enseignée lors de l'expérimentation, nous n'attendions pas cette méthode.

III.2. Difficultés et erreurs envisagées

Une première difficulté réside dans le fait que, pour raisonner afin de trouver un procédé de construction, les élèves ont besoin du support intuitif d'un dessin qu'ils sont dans l'incapacité de réaliser tant qu'ils n'ont pas trouvé un procédé (cette pratique est très éloignée du contrat habituel). Pour y parvenir, ils sont obligés de raisonner "à l'envers" c'est-à-dire de construire une figure, d'utiliser les propriétés de celle-ci pour mettre en oeuvre un procédé : par exemple pour la seconde méthode de ce problème, les élèves sont obligés de construire un parallélogramme et d'exploiter ses propriétés mathématiques. En outre, ils ont à introduire des éléments intermédiaires sur lesquels ils doivent appuyer leur construction et le caractère ouvert du problème ajoute une autre dimension à cet énoncé en ne laissant rien présumer de la méthode à adopter.

Une autre difficulté pour les élèves est que la situation est nouvelle à leurs yeux . En effet, le problème proposé déroute les élèves puisqu'ils doivent faire des constructions simples mais avec des outils non habituels : ils doivent, par exemple, construire la parallèle à D' passant par I puis le milieu I de [OA] uniquement à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée.

Du point de vue de la démonstration il peut y avoir confusion très facilement entre sens direct et réciproque des propriétés. Par exemple, pour la première méthode, les élèves reconnaissent sur leur figure a priori le théorème de Thalès et pour leur construction ils utilisent la réciproque.

La position relative du point A et des deux droites peut jouer un rôle important dans l'élaboration du procédé de construction. Par exemple, dans le cas de la figure 1, les élèves verront plus facilement de quel "côté" placer P et P' que dans les autres cas de figure. Les figures 2, 3 et 4 ne font pas partie des configurations stéréotypées en raison de la position "inhabituelle" des objets (triangle AOP'...).

Enfin les consignes imposées aux élèves, comme le travail en commun et la rédaction d'un seul procédé par groupe les forcent à extérioriser leurs démarches ce qui leur est peu familier.

III.3. Qu'attendions nous ?

a. Méthodologie dans les problèmes de construction

La résolution classique d'un problème de construction comprend deux phases :

- analyse : on suppose le problème résolu et la construction est effectivement réalisée soit en faisant un dessin approximatif de la configuration cherchée, soit en faisant un dessin "à l'envers". On repère comment les éléments à construire (points, droites, segments, ...) sont liés aux éléments donnés ou les uns aux autres. On essaie souvent de ramener le problème à la recherche de points clés dont la connaissance permet de construire la figure complètement, et de déterminer ces points comme intersection de droites ou de cercles.
- synthèse : on décrit le procédé de construction en le justifiant. Dans notre expérimentation, une discussion peut apparaître au sein du groupe pour la rédaction.

Nous nous attendions à ce que les élèves procèdent ainsi.

b. Raisonnements envisagés

Nous prévoyions que les élèves commenceraient par réaliser une figure par tâtonnement à l'aide d'une règle graduée, par exemple, pour placer le milieu P de [AP']. Les dessins les plus souvent représentés parmi les figures possibles seraient des figures prototypiques, c'est à dire ici, les figures 1 et 1bis (A étant placé "au-dessus" des droites D et D').

Bien qu'exigeant plus de tracés intermédiaires, la méthode la plus envisagée sera la seconde : en effet, la configuration du parallélogramme est plus familière aux élèves que celle de Thalès car elle est plus souvent utilisée et depuis plus longtemps (on introduit les parallélogrammes en classe de cinquième alors que la propriété des milieux est enseignée en quatrième et le théorème de Thalès en classe de troisième). De plus, nous sommes persuadés que les élèves vont utiliser les points et les droites présents dans l'énoncé (le point O, les droites D et D').

III.4. Interventions prévues

Nous avons dégagé deux types d'interventions des observateurs :

- celles relatives aux propriétés de la figure guidant leur construction ;
- celles relatives aux procédés de construction pour un tracé particulier.

Le premier type fait évoluer les élèves dans leurs procédures tandis que le second leur permet de faire un tracé incontestable avec les outils mis à leur disposition tout en ne les freinant pas.

Ces interventions sont laissées à l'initiative des observateurs qui doivent agir dans un ordre chronologique déterminé et suivant la progression des élèves. Certaines interventions peuvent être supprimées si les élèves ont déjà passé l'étape correspondante dans la résolution. Les critères d'intervention sont, soit l'échec ou le piétinement, soit une construction approximative (on considère qu'il y a échec lorsqu'il n'y a production d'aucun dessin, égarement total ou inactivité pendant un certain laps de temps).

Nous les énumérerons en détail lors de l'analyse des données.

IV. Analyse des productions

IV.1. Procédés observés

Nous avons relevé les interventions effectives des observateurs dans le groupe lors de la séance ainsi que tous les procédés de construction mis en oeuvre par les élèves pour tenter de faire une figure répondant à l'énoncé suivant la méthode choisie.

Nous donnons ici un codage des procédés de construction et nous avons regroupé dans plusieurs tableaux les procédés observés, suivant les différentes méthodes. Ces observations brutes se trouvent en annexes. Nous ne fournissons ici que les analyses relatives aux données de l'observation.

a. Procédés de construction

Nous présentons les étapes de construction pour les deux méthodes correctes attendues dans l'ordre chronologique de leur emploi (en les ordonnant par méthodes et en les numérotant par ordre croissant).

Nous avons codé les procédés communs par O, ceux relatifs à la méthode utilisant Thalès ou le théorème des milieux par P et ceux relatifs à la configuration du parallélogramme par Q. Nous avons fait une distinction entre les procédés "corrects" ou "erronés" en différenciant ces derniers par un (').

PROCÉDÉS CORRECTS (répondant à une construction acceptable)	PROCÉDÉS ERRONÉS (n'aboutissant pas à la construction demandée)
O1 : le point A est placé n'importe où.	O'1 : dessin d'une figure juste par tâtonnement.
P2 : réalisation d'une figure juste pour découvrir des procédés de construction).	O'2 : dessin faux (P appartenant à D, P' appartenant à D' au hasard alignés avec A).
P3 : tracé du segment [OA] puis construction de son milieu I.	O'3 : Choix de la position du point A comme elle leur convient pour faire une figure correcte.
P4 : construction de la parallèle à D' passant par I, elle coupe D en P.	O'4 : Aucun dessin ou aucun élément supplémentaire sur le dessin.
P5 : construction de (AP), elle coupe D' en P'	O'5 : Échange du rôle de P et P'.
P6 : construction de la parallèle à D passant par A.	O'6 : Choix de la position de P ou P', ou des deux points.

P7 : H est l'intersection de la parallèle à D passant par A et de D'. Construction de P' symétrique de H par rapport à O.	P'7 : construction de P' milieu de [AP'].
P8 : Construction de (AP'), qui coupe D en P.	P'8 : Mesure du segment [OA] puis report de cette longueur, à l'aide d'un compas, sur D'. On obtient P'.
P9: construction du symétrique P' de A par rapport à P.	Q'6 : Construction de la parallèle à D passant par A. Elle coupe D' en K.
P10 : test sur différentes figures en changeant la position relative du point A et des droites D et D'.	
Q2 : tracé de [OA].	
Q3 : La parallèle à D' passant par A coupe D en N.	
Q4 : La parallèle à (OA) passant par N coupe D' en P'.	
Q5 : [AP'] coupe D en P.	

b. Comportement des élèves

• Respect des consignes

Presque tous les élèves ont, au moins une fois, gommé ou barré leurs dessins afin de dissimuler aux observateurs des réalisations qu'ils jugeaient inexactes. Cette attitude a rendu difficile l'interprétation de certains de leurs raisonnements. En général, nous avons eu très peu de détails sur le cheminement des élèves, ils n'ont pas expliqué leur évolution, leur changement d'idée pour un autre procédé comme cela leur était demandé.

Quand ils ont sollicité l'observateur, c'est souvent comme arbitre de leurs idées et non pour se faire indiquer un nouveau procédé : par exemple, dans le groupe 5, Cyril n'ayant pas choisi la même méthode que ses camarades, une discussion est apparue dans le but de savoir laquelle était bonne. N'arrivant pas à se mettre d'accord, ils ont demandé l'avis de l'observateur.

De plus, dans certains groupes, les élèves n'ont pas produit une solution unique car soit ils ont adopté des méthodes différentes *(groupe 5)*, soit ils ne sont pas parvenus à se mettre d'accord pour rédiger un procédé commun *(groupe 4)*.

Au début de leurs raisonnements, ils se sont servis de la règle graduée pour placer un milieu ou tracer une parallèle passant par un point, par contre, pour la rédaction de leurs procédés, ils ont respecté les consignes de ne pas utiliser de mesures dans leur construction et de ne pas tracer au jugé *(pour la parallèle...)*. Ainsi aucun récepteur n'a eu à utiliser une règle graduée pour construire à partir des indications du message rédigé.

• Le travail en groupe

En général, les élèves ont pris plaisir à travailler ensemble et aucun groupe n'est resté inactif. Dans l'ensemble, ils ont travaillé individuellement au départ en cherchant une solution puis ont rassemblé leurs idées en les discutant.

En ce qui concerne le débat, chaque élève a défendu ses procédés en les argumentant et, dans certains cas, les autres ont rectifié ses erreurs. Beaucoup de discussions ont surgies sur la construction et les moyens de la réaliser. Cependant, les trois élèves du groupe 2 n'ont pas parlé entre eux et dans la plupart des groupes de quatre élèves, l'un d'eux est resté muet mais a quelquefois suivi, et parfois rejoint, les idées de ses camarades. Patricia (groupe 4) a fait un dessin par tâtonnement puis a abandonné, Muriel (groupe 2) s'est arrêtée au tracé du segment [OA], Benoît (groupe 6) a débuté sa construction avec ses camarades, a végété individuellement et a ensuite rejoint les autres sur la fin.

De plus, un débat sur les différentes figures produites individuellement est apparu, notamment au sujet de la position relative du point A et des droites D et D'. Ainsi dans le groupe 4, il y a eu une discussion pour savoir qui avait raison au sujet de la position du point A avant de finalement conclure que cela n'avait pas d'importance.

c. Etapes des constructions

Les élèves ont rencontré beaucoup de difficultés à construire une figure exacte et ont d'abord placé P milieu de [AP'] à l'aide de la règle graduée. C'est pourquoi, en grande majorité, les deux premières étapes ont consisté à placer A n'importe où et à réaliser un dessin par tâtonnement. Seul le groupe 2 a débuté en faisant un dessin faux puis en déplaçant A à la fin pour que le dessin soit exact.

C'est dans ces deux premiers procédés, que les élèves se sont souvent ramenés aux figures prototypiques que nous avions prévues (§ III-3-b) :

- Rémi (gr. 7), place le point A "en bas" (fig. 2) puis efface et replace A "en haut" (fig. 1) car il dit que c'est la seule position de A rendant la construction possible.
- Muriel (gr. 2), place le point A "à droite" (figure 4) et dit que c'est impossible.
- Camille (gr. 7), dit que "suivant où on place A, c'est P' le milieu de [AP]. Il faut faire attention où placer la droite (AP) car il ne faut pas qu'elle coupe D en premier".

En définitive, une fois le point A placé, les élèves ont, le plus souvent, cherché à tracer les segments [AP] ou [AP'] portés par une droite décroissante (c'est-à-dire, placer P ou P' plus bas que A et vers la droite).

Le nombre d'étapes varie entre quatre (Lise, groupe 2) et onze (Camille, groupe 7) mais toutes contiennent au moins un aller-retour entre procédés faux et procédés justes. Nous avons relevé deux types d'erreurs :

- les dessins faux, qui conduisent la plupart du temps à une bonne procédure (les élèves ont parfois eu besoin de quatre aller-retours, groupe 7)
- les raisonnements faux, qui eux conduisent à un enlisement.

En général, il y a eu plus de dessins faux que de raisonnements faux.
Dans les tableaux donnés en annexe, nous avons effectué un regroupement des procédés justes :

- O1 et P2 (voir § IV-a) sont communs à toutes les procédures, les groupements correspondent ensuite :
- à plusieurs utilisations différentes de Thalès
  - (P3/P4/P5)[2]
  - avec une construction différente de P' (P3/P4/P9)

[2] La signification des codages est donnée au § IV-a.

• (P6/P7/P8)
- configuration du parallélogramme (Q2/Q3/Q4/Q5).

Les élèves ont tous fait un dessin au jugé et, après avoir produit un dessin correct pour certains, ils ont eu beaucoup de mal à l'analyser et surtout à voir qu'il fallait introduire des éléments intermédiaires pour réussir la construction : dans ce cas, l'observateur est souvent intervenu pour les guider (par exemple dans le groupe 7).

Par ailleurs, les élèves n'ont pas toujours vu le rôle que pouvait jouer le point O donné dans l'énoncé : par exemple sans intervention de notre part les élèves du groupe 2 n'auraient pas pensé à tracer [OA].

Les élèves ont rencontré des difficultés pour construire une parallèle ou placer un milieu, avec comme seuls outils le compas et la règle non graduée, car ces constructions se font le plus souvent en classe avec une équerre ou une règle graduée. Même après les interventions des observateurs pour spécifier le caractère obligatoire d'utiliser un compas et/ou une règle non graduée pour ces constructions, certains élèves ont mis un certain temps à trouver comment les construire avec ces outils et d'autres sont passés outre.

Certains groupes ont construit leur figure sans tenir compte des objets donnés au départ à savoir le point A et les droites D et D'. Les procédures erronées sont de deux types :

- les procédés amenant à une figure "fausse" (R1 et R2 pour le groupe 1) , la figure obtenue ne correspond pas à celle qui est attendue ;
- les procédés aboutissant à une figure "juste" (R3 et R4 pour le groupe 3) : les élèves ont respecté le contrat de placer P sur D, P' sur D' et A ni sur D, ni sur D' et de construire P milieu de [AP'], par contre, l'une des deux droites est placée en dernier en fonction de leur construction.

Un groupe a ressenti la nécessité de tester son procédé sur différentes figures à l'initiative d'un élève (groupe 6 à l'initiative d'Aymeric) mais c'est un groupe qui a n'a pas eu de problèmes et qui n'a pas eu besoin d'interventions de notre part.

d. Interventions

Dans l'ensemble, toutes les interventions prévues ont fait évoluer les élèves positivement. Le nombre des interventions a été très différent suivant les groupes : par exemple, Cyril dans le groupe 5 s'est débrouillé sans aide alors que le groupe 7 n'a réussi à faire une construction qu'à la suite de six interventions.

Nous avions dégagé deux types d'interventions :

- l'un (type A) concerne les propriétés de la figure et vise à guider leur construction. Elles ont souvent conduit les élèves vers un procédé correct ainsi dans le groupe 2, l'intervention I, "tracer *la parallèle à D' passant par A. Elle coupe D en N*" a permis aux élèves de penser à la configuration du parallélogramme
- l'autre (type B) concerne les procédés de construction pour un tracé particulier. Elles ont été délivrées uniquement lorsque les élèves étaient sur une procédure correcte comme dans le groupe 6, l'intervention D, *"comment tracer la parallèle à une droite passant par un point, à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée ?"* qui a concrétisé un tracé juste.

Il y a eu à peu près autant d'interventions de chaque type. Mais les interventions de type A ont été dites, en majorité, lors de procédés faux contrairement à celles de l'autre type. Les élèves ont quelquefois eu besoin de deux interventions à la suite soit de deux types différents (groupe 4, interventions D et J) soit de deux types semblables (uniquement de type A comme par exemple, le groupe 2, interventions C et E).

En revanche, les groupes 1 et 3, pour lesquels il n'y a eu aucune intervention de l'observateur, ont échoué dans leur tentative de résolution. L'observateur ne s'est pas rendu compte du caractère erroné de leurs procédures sinon il aurait pu procéder aux interventions A et B. C'est pourquoi ces deux groupes, uniquement, n'ont pas répondu au problème posé.

Dans certains cas, il n' y a pas eu d'intervention car les élèves ont pu résoudre leurs difficultés au cours d'un débat dans le groupe : par exemple, les deux groupes de seconde n'ont pas eu besoin d'interventions de notre part pour constater que l'on pouvait placer A n'importe où. Ils y sont parvenus en relisant l'énoncé et en réfléchissant. Cyril, groupe 5, a dit à ses camarades *"il manque une équerre pour tracer la parallèle. Comment pouvons nous faire avec un compas ?"* Dans de nombreux groupes, les élèves ont rectifié d'eux même leurs erreurs après les avoir expliquées (groupes 4, 5 et 6).

e. Méthodes utilisées

Dans l'ensemble, nous avons observé les méthodes attendues dans l'analyse préalable avec une variante pour la méthode 1, où le groupe 6 a utilisé le théorème de Thalès d'une manière différente. Contrairement à ce que nous avions envisagé, autant de groupes ont opté pour la première et la deuxième méthode (en tout trois de chaque) et deux groupes ont rédigé quatre méthodes fausses.

Les élèves de seconde ont opté pour la première méthode soit de leur propre initiative (groupe 6) soit à partir des indications données par les observateurs (groupe 7). Nous avions décidé de les guider plutôt sur la méthode de Thalès, bien que plus difficile, elle était plus abordable en classe de seconde et nous l'avions peu observée en troisième. Une erreur fréquente, quelque soit la méthode utilisée, a été d'échanger le rôle de P et P' en plaçant P' milieu de [AP].

1.- Méthode 1 :

Les élèves ont tous eu besoin d'un dessin exact pour élaborer une construction et ont fait quelques erreurs entraînant des interventions des observateurs. Nos interventions ont eu pour but de les guider uniquement dans le cas de procédés faux *(plus particulièrement pour le groupe 7)*. Une différence est apparue entre les classes de troisième et de seconde qui ont respectivement utilisé le théorème des milieux et celui de Thalès.

2.- Méthode 2 :

Les élèves qui ont utilisé cette méthode ont réalisé leur construction avec moins d'étapes que pour la précédente. La seule difficulté a été le tracé de la parallèle à une droite passant par un point donné avec un compas. Nous avons dû souvent intervenir pour les faire réfléchir à cette construction.

3.- Méthodes erronées :

* Dans la première procédure erronée (R1)[3], A est placé n'importe où, puis les élèves construisent un triangle isocèle APP' en A avec $P' \in D'$ et $P \in D$. Camélia et

[3] Une description des procédures erronées est donnée dans l'annexe 4.

Lynda ont utilisé cette procédure et ainsi confondu la caractérisation du milieu d'un segment et celle d'un triangle isocèle toutes les deux faisant appel à des égalités de mesures (AP=PP'). Elles aboutissent alors à une figure fausse.

* Dans la procédure R2, P est placé sur D et P' sur D' puis A est construit comme le symétrique de P par rapport à P'. Béatrice, qui a procédé ainsi, a donc échangé le rôle de P et P' et n'a pas respecté la consigne de placer A comme un point donné au départ. On peut à ce sujet faire l'hypothèse que pour cet élève, les notions de milieux et de symétriques sont mal distinguées.

* Dans la procédure R3, Peter et David tracent D, placent A à l'extérieur de D puis tracent une droite passant par A coupant D en P. Ils construisent ensuite P' comme le symétrique de A par rapport à P. Ils finissent en traçant D', une droite sécante à D passant par P' et définissent O comme l'intersection de D et D'. Bien que le procédé soit erroné, ils aboutissent à une figure exacte.

* Dans la procédure R4, Fabrice et François tracent D', placent A n'importe où et construisent P' comme projeté orthogonal sur D'. Ils tracent la médiatrice de [AP'] et obtiennent le point P comme intersection de cette médiatrice avec (AP'). En définitive, ils ont construit une figure juste mais particulière puisque (AP') est perpendiculaire à D' et le milieu est construit à l'aide de la médiatrice. Peut-être ont-ils voulu simplifier leur construction en prenant la distance la plus courte pour AP' ?

f. Conclusions

En grande majorité, les élèves ont, comme prévu, procédé par Analyse-Synthèse en supposant la construction effectivement réalisée, en la discutant éventuellement au sein du groupe puis en l'indiquant par écrit pour leurs camarades. Les élèves ont beaucoup utilisé la contradiction, ce qui explique les aller-retours entre procédés justes et procédés faux : c'est le plus souvent lorsqu'ils ont fait des erreurs et qu'ils s'en sont aperçus, qu'ils ont réussi à trouver un procédé correct.

Le travail en groupe a été assez bien accepté bien que certains élèves n'aient pas souhaité y participer. Les réticences proviennent soit d'un choix de méthodes différentes soit à cause d'une impossibilité de parvenir à un accord sur une rédaction commune.

On a pu aussi constater un changement de comportement en contradiction avec le niveau scolaire : les bons élèves n'ont pas toujours été les plus "débrouillards" et nous avons bien observé une différence entre ceux qui procèdent par intuition et ceux qui cherchent, dans leurs connaissances, une méthode ou un savoir qu'on pourrait réinvestir dans ce problème. Au contraire, des élèves de niveau plus faible, bien que n'étant pas toujours parvenus à une construction acceptable, ont fait souvent preuve de beaucoup d'imagination et d'activité bien adaptées.

IV.2. Productions finales

Nous présentons les productions des élèves rédigées pour un camarade extérieur, ce sont seulement les procédés finaux. Certains groupes se sont mis d'accord et ont donc rédigé un seul écrit contrairement à d'autres. Nous tenterons de les commenter en regardant la structure des rédactions, d'analyser le problème en fonction des méthodes et enfin de parler de la réaction des élèves testeurs.

Nous allons exposer de façon brute ces différentes rédactions en précisant le groupe et si nécessaire le nom des élèves : les noms inscrits à la fin du texte sont les auteurs, les noms figurant entre parenthèses représentent ceux qui ont adopté la méthode de leur(s) camarade(s), et ceux entre crochets indiquent ceux qui n'ont abouti à aucune rédaction de leur propre procédé.

• **GROUPE 1 (troisième)**

Tracer deux droites D et D' sécantes en O. Placer un point P appartenant à la droite D. Mettre la pointe du compas sur le point P et tracer un arc de cercle coupant D' en P'. Joindre les points P et P' en une droite E. Ensuite toujours en gardant la même ouverture de compas et en pointant le compas en P', tracer un autre arc de cercle coupant E en A à l'opposé de P.
Béatrice (Camélia, Lynda) : procédure R2.

• **GROUPE 2 (troisième)**

1- Je place un point A.
2- Je joins le point A au point O.
3- Je trace une droite à partir du point A qui coupe D, parallèle à D'(pour tracer la parallèle je trace la perpendiculaire d' de la droite D' passant par A, je trace la perpendiculaire c de la droite d' passant par A : la droite c est parallèle à la droite D').
4- A partir du point obtenu je trace la parallèle à OA qui coupe D'.
5- J'obtiens un parallélogramme.
6- Je trace les diagonales du parallélogramme.
7- Je sais que les diagonales se coupent en leur milieu donc à l'endroit où les diagonales se coupent je place le point P.
8- donc la diagonale qui part du point A coupe D' en P'.
9- Nous avons donc bien AP=PP'.
Pascale [Muriel, Lise] : méthode 2.

• **GROUPE 3 (troisième)**

Tracez la droite D. Placez un point A hors de la droite. A partir du point A tracez une droite sécante à D que l'on appellera (x) et l'intersection de ces 2 droites s'appelle P. A l'aide du compas reporter la distance AP à partir du point P sur la droite (x). Le point obtenu à l'intersection s'appellera P'. En fonction de P' tracez la droite D' sécante à D. L'intersection de ces 2 droites s'appellera O.
Peter, David : procédure R3.

Tracez la droite D' puis prendre un point A hors de la droite. Soit P' la projection de A sur D'. Tracez ensuite la médiatrice du segment [AP'] et l'on obtient le point P. Après avoir trouvé le point P, tracez la droite D passant par P et coupant la droite D' en O.
Fabrice, François : procédure R4.

• **GROUPE 4 (troisième)**

On trace 2 droites D et D' sécantes en O. On prend un point A à l'extérieur des 2 droites. On trace le segment [AO].
On trace la parallèle au segment [AO] passant par la droite D', qui coupe la droite D en N avec le compas.
On obtient donc un parallélogramme NAOD.
Nous avons déjà une des deux diagonales. Nous traçons donc l'autre diagonale. Et nous obtenons le point d'intersection car elles se coupent en leur milieu. Donc le point d'intersection est P et l'autre côté de la droite est P'. Donc P est bien le milieu du segment [AP'].
Élisabeth [Patricia] : méthode 2.

On trace 2 droites sécantes qui se coupent en O, D et D'. On prend un point A qui n'appartient pas aux droites D et D'. On trace le segment [AO]. On trace la parallèle à D' qui passe par A (avec le compas) et qui coupe D en N. On obtient un parallélogramme AOP'N. On a la première diagonale [NO] et on trace la seconde [AP']. Comme on se trouve dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu, ce point d'intersection est le point P.
Audrey (Eline) : méthode 2.

• **GROUPE 5 (troisième)**

Tracer OA avec la règle. Faire la parallèle à la droite D' passant par A avec la règle (le point touchant la droite D s'appellera B).
Tracer la parallèle à OA passant par B avec le compas (le point touchant la droite D' s'appellera P').
Faire la diagonale à AP' et appeler P le point appartenant à D.
Cyril : méthode 2.

Tracez OA puis son milieu appelé I. Tracez la parallèle de D' passant par I qui coupe D en P avec le compas. Tracez une droite passant par P et A coupant D' en P' (il faut que P', P et A aient le même écartement).
Cécile : méthode 1.

Tracez OA.
I est le milieu de OA.
Tracez la parallèle à D' qui coupe D en P avec le compas.
[AP] est égale a [PP']. Tracez P' sur la droite D' de façon à ce que [PI] soit parallèle à P'O.
Coralie, Cédric : méthode 1.

• **GROUPE 6 (seconde)**

Placer un point A quelconque œ D ni œ D'. Tracer la // à D passant par A. Pour tracer la // avec un compas, tracer un parallélogramme dont un côté est cette parallèle. Nommer le Point d'intersection en D' : Y. Placer le point P' tel que O soit le milieu de [YP']. Tracer le segment [P'A] qui coupe D en P. P est donc le milieu de [P'A].
Aymeric, Sébastien, Yannis, Benoît : méthode 1.

• **GROUPE 7 (seconde)**

Méthode.
- Tracer les 2 droites D et D' sécantes en O.
Soit A, un point quelconque qui n'∈ ni à D ni à D'.
Tracer (OA).
Tracer la médiatrice de [OA] : elle coupe [OA] en I, milieu du segment.
- Pour tracer la parallèle à D' passant par I.
Soit un segment de D' [KM]. Tracer sa médiatrice. On obtient alors une perpendiculaire à (OD').
On trace ensuite la perpendiculaire à (OP') passant par I en traçant la médiatrice passant par I d'un segment quelconque de
- La parallèle à D' passant par I coupe D en P.
La droite (AP) coupe D' en P'.
Camille, (Rémi, Sahounda), [Véronique] : méthode 1.

IV.3. Analyse des productions finales

a. Forme et fond des rédactions

* Sur les sept groupes observés, les élèves ont produit en tout douze rédactions, allant de une à trois rédactions par groupe. Ce sont des textes plutôt courts. Nous avons pu dégager deux types de rédactions en nombre équivalent :

- des **textes** où les phrases ne sont pas reliées entre elles *(groupes 1, 3, 6)* sauf exception (Béatrice, groupe 1 qui a employé une fois l'adverbe ensuite) ;

- une **succession d'instructions** les unes en dessous des autres *(groupe 4, 5)* avec des tirets *(groupe 7)* ou en utilisant à la fois des tirets et des numéros *(groupe 2)*.

* Les étapes de construction sont toujours ordonnées correctement mais de grandes différences sont apparues en ce qui concerne le fond.

- Certains élèves ont réécrit l'énoncé soit entièrement (par exemple, groupe 4) soit partiellement (groupes 2 et 6). Deux groupes l'ont modifié pour que leur construction soit correcte : le groupe 1 a donné les deux droites D et D' et le point O mais n'a pas fixé A au départ et l'a défini à la fin de sa construction et le groupe 3 a placé la droite D (ou D') et le point A au départ et a terminé son procédé en traçant la droite D' (ou D) et le point O en fonction du dessin obtenu.

- Les constructions sont décrites dans un langage commun qui rend ambigu un grand nombre de descriptions. Les textes contiennent un vocabulaire imprécis, confus, voire incorrect.

Deux grands types de textes sont produits.

• Ceux qui contiennent un repérage géographique, un positionnement dans la feuille par rapport aux éléments dessinés (surtout par rapport aux droites D et D') ; les élèves parlent de *"prendre un point A hors de la droite"* (groupe 3), de *"prendre un point A à l'extérieur des 2 droites"* (groupe 2), de *"tracer un autre arc de cercle à l'opposé de P' "*(groupe 1), de *"placer le point P à l'endroit où les diagonales se coupent"* et de *"tracer la diagonale qui part du point A"* (groupe 2). On peut faire l'hypothèse que les élèves utilisent implicitement des notions comme la symétrie et qu'ils ne parviennent pas à réinvestir ces connaissances géométriques.

• Ceux qui utilisent un vocabulaire peu adapté à la description d'un procédé de construction géométrique. Dans ce cas la position relative des objets ou la description des actions est ambiguë. Par exemple, le groupe 1 a donné comme instruction *"en gardant toujours la même ouverture de compas"* et le groupe 5 a écrit *"le point touchant la droite D' s'appellera B"*. Le groupe 3 a écrit *"en fonction de P', tracer D"*, le groupe 5 parle de *"faire la diagonale à AP'"* et de *"faire la parallèle de OP' commençant de I"* et le groupe 4 écrit *" le point d'intersection est P et l'autre côté de la droite est P'"*. C'est l'utilisation d'un vocabulaire usuel et commun pour décrire la figure telle qu'ils la perçoivent.

Du point de vue des notations mathématiques, les élèves ont beaucoup de mal à désigner de façon correcte les droites, segments et mesures. Il y a confusion des symboles ( ) et [ ] et des objets géométriques segment et droite (les élèves parlent de parallèle à un segment, groupe 4 et 5), segment et distance (le groupe 5 écrit "*tracer OA*" et " *[AP] est égal à [PP']* "), droite et distance (*"parallèle de OP"*, groupe 5).

Enfin il y a des propriétés justifiant la construction qui ne sont pas explicitées. Les confusions, entre données de départ et objets à construire, rencontrées dans la rédaction des énoncés "modifiés" cités plus haut se retrouvent au niveau de la rédaction des procédés. Les élèves n'identifient pas toujours l'importance qu'il y a à distinguer l'hypothèse et la conclusion et cette confusion se retrouve dans les rédactions. Ainsi le groupe 2 dit qu'il obtient un parallélogramme par construction tandis que dans le groupe 4, Élisabeth, explique sa construction en concluant que c'est un parallélogramme. Les difficultés que les élèves rencontrent dans la rédaction des démonstrations se retrouvent dans le type de rédaction de procédé proposé ici.

b. Analyse des méthodes

On voit ici que les élèves, bien que sachant réaliser une construction correcte produisent une description de procédé inexacte ou au moins incorrecte.

- Pour la méthode 1 : il y a deux rédactions qui sont compréhensibles et qui permettent une construction correcte par simple application des instructions (celles de Cécile, groupe 5 et celle du groupe 6). Par contre, les autres rédactions ne reflètent pas un procédé correct bien que les élèves aient trouvé et dessiné la bonne construction : Coralie, groupe 5, a omis de mentionner que la parallèle à D' "passe par I", le groupe 7 a parlé de segment "quelconque" alors que dans leur construction il était bien défini, tout cela explique leur échec. Le groupe 5, n'a pas abouti à un accord pour rendre une seule production, seul Cédric, qui avait rédigé au brouillon un procédé faux, s'est rallié au procédé de Coralie parce qu'il a remarqué que le sien était erroné.

- Pour la méthode 2 : il y a deux rédactions(groupes 2 et 5) qui sont sans ambiguïté et permettent une construction correcte. Au contraire, les deux rédactions du groupe 4 ne sont pas correctes car Élisabeth a oublié de définir le point N (il lui manque une phrase comme "*la parallèle à D' passant par A coupe D en N*") et Audrey a omis de faire tracer la parallèle à (OA) passant par N et de définir la position de P'. Pourtant, leur procédé était correct avant de passer au stade de la rédaction.

- Pour les procédures erronées, la procédure R1[4] mise en oeuvre par Camélia et Lynda ne s'est pas traduite par une rédaction : elles ont préféré suivre la démarche de

---

[4] Pour le codage voir § IV.1.e.3 et l'annexe 4.

Béatrice car elles se sont rendues compte de leur erreur (*"par A passe une seule droite et non deux"*).

Pour la procédure R2 : les élèves du groupe 1 obtiennent une construction ne répondant pas au problème, elles ont construit P' milieu de [AP]. A part cette inversion leur procédé pourrait convenir.

Pour la procédure R3 : Peter et David, groupe 3, obtiennent un dessin exact car ils définissent O et D' en fonction de leur construction. Ils écrit un texte assez clair.
Pour la procédure R4 : Fabrice et François, groupe 3, ont fait un dessin correct (en modifiant l'énoncé puisqu'ils ont placé P et D en dernier) mais particulier en prenant (AP') perpendiculaire à D'.

c. Construction par des élèves testeurs

Les procédés produits ont été donnés à tester à des élèves pour voir si la construction était réalisable à partir de leur lecture.

Tous les procédés que nous avons trouvés valables dans la précédente partie ont abouti à une construction correcte de l'élève testeur. De plus, certaines procédures incomplètes ont quand même été comprises et réalisées par les testeurs :

- le testeur de Coralie, groupe 5, a réussi à faire le bon dessin parce qu'il a su trouver que "la parallèle à D'" devait "passer par I" et l'a mentionné à Coralie.

- celui d'Eline et Audrey, groupe 4, est parvenu à faire la bonne construction, il a utilisé le fait que "AOP'N parallélogramme" donc a su placer P' qui n'avait pas été défini auparavant.

Par contre, quelques procédures incorrectes ont été :

- soit incomprises (par exemple, le testeur du groupe 7 n'a pas réussi la construction à cause du "*segment quelconque de*" et Élisabeth, groupe 4, ayant omis de faire tracer la parallèle à D' passant par A coupant D en N, le testeur n'a pas compris l'obtention du parallélogramme NAOD) ;

- soit déclarées fausses en regard de l'énoncé du problème (par exemple, pour R3 et R4). Un testeur a cependant déclaré exacte la procédure R2 car il n'a pas fait attention au fait que P milieu de [AP'] n'était pas respecté.

Mais dans l'ensemble, les testeurs ont compris une grande partie des implicites des rédacteurs.

d. Constructions particulières

Comment les élèves ont ils décrit, s'ils l'ont fait, les constructions particulières devant se faire avec le compas ?

Pour la construction d'une parallèle, même si nous sommes intervenus, les élèves ont éludé la difficulté en écrivant simplement "*avec un compas*" (groupe 4 et 5) ou en précisant "*avec le compas, tracer un parallélogramme dont un côté est cette parallèle*" (groupe 6). Deux groupes, les 2 et 7, ont prévu une instruction précise pour le tracé de la parallèle à D' passant par I.

Pour construire un milieu, nous sommes très peu intervenus, c'est pourquoi ils n'ont en très grande majorité pas du tout expliqué comment le placer uniquement à l'aide d'un compas. Un seul groupe (groupe 7) a réellement expliqué comment faire, mais ne l'a fait que partiellement car il a donné comme instruction de "tracer la médiatrice de [OA]" sans préciser comment construire celle-ci.

IV.4. Conclusion

Du point de vue de la rédaction, l'ensemble des productions correctes est important. Compte tenu du peu de familiarité des élèves avec ce type de tâche, ceux-ci ont fait preuve de logique et de rigueur : l'ordre des instructions reproduit la succession des tracés exécutés pour aboutir à la construction et explique la linéarité du discours *("Autrement dit, la conclusion d'un premier pas devient le point de départ du pas suivant"* (R.Duval, 1991).

Il est à noter qu'aucun élève n'a abandonné le problème puisque tous ont produit un texte, certaines fois en le faisant à plusieurs (même les plus faibles ont essayé), et que les "bons" élèves n'ont pas toujours rendu les "meilleures" rédactions. La plupart des procédures erronées rédigées sont originales et sont loin d'être sans signification. Pour ce problème, les élèves ont utilisé un vocabulaire peu précis et non géométrique. Mais les implicites permettent à la plupart des testeurs de réussir à faire le tracé correct en décodant de façon assez immédiate les imprécisions ou les manques des textes fournis par les rédacteurs.

Les discussions apparues au sein de certains groupes pour la rédaction ont souvent réduit les erreurs et les imprécisions. En revanche, les élèves n'ont pas su le plus souvent expliquer à leurs camarades les tracés particuliers du milieu et de la parallèle sans doute parce que la plupart du temps ces constructions simples se font avec la règle graduée ou l'équerre.

V. Retour à la problématique

La formulation du problème géométrique conduit les élèves à produire des dessins, à les observer, à produire un procédé de construction dont l'élaboration s'appuiera sur le dessin produit. Ceci explique le choix de notre première question, **"Quelles sont les interactions entre les évolutions respectives de leur dessin et de leur procédé de construction ?"** Le paragraphe V.1. portera sur la correspondance entre ces deux moyens d'expression.

La deuxième phase du travail consiste à élaborer une formulation écrite d'un procédé qui est le plus souvent seulement décrit oralement d'après le dessin produit par chaque élève puis par le groupe. On est amené ainsi à se poser la deuxième question **"Quelles sont les interférences entre le texte d'explication rédigé par les élèves et leur procédé de construction"**, Nous développerons ce point dans le paragraphe V.2.

V.1. Interactions dessin-procédé de construction

La réalisation et l'observation des dessins est intimement liée aux propositions de procédés qui en découlent. Les élèves dans leur explicitation de la construction de la figure renvoient aux objets de la perception. Cette tâche s'effectue par **un fréquent aller-retour** entre les dessins et les procédés mis en oeuvre. La formulation orale au sein du groupe intervient aussi dans l'élaboration des procédés. Nous allons examiner comment les élèves, à l'intérieur du groupe, élaborent un procédé à partir des dessins qu'ils ont déjà réalisés.

a. Première phase : construction d'une figure de base

Les élèves ont commencé par réaliser une figure au jugé paraissant perceptivement correcte. Ils construisent d'abord la figure en modifiant les objets de façon à y parvenir. Les essais réalisés sont rejetés si une contradiction apparaît avec la figure attendue telle qu'elle est décrite dans l'énoncé. De tels processus ont déjà été observés dans le cadre des constructions géométriques (Audibert 1982). Les élèves se rendent rapidement compte qu'une telle méthode ne peut convenir pour réaliser la description attendue d'un procédé de construction. C'est pourquoi le dessin au jugé a été rapidement abandonné au profit d'une figure répondant rigoureusement à ce qui est demandé.

Partant ensuite d'une figure répondant au problème, les élèves ont élaboré un procédé de construction. La perception joue un grand rôle dans l'analyse de la figure et les élèves ayant réalisé un dessin soigné ont, en général, mieux réussi à l'exploiter que ceux dont les dessins étaient plus approximatifs.

Les élèves doivent s'affranchir des particularités de leur dessin et distinguer les propriétés du dessin et propriétés de la figure. Il nous semble donc important de regarder par la suite comment les élèves ont dépassé l'appréhension perceptive du dessin pour poursuivre leur recherche de procédés.

b. Deuxième phase : mise en place du procédé de construction

Une fois la figure correcte réalisée, les élèves n'étant pas guidés dans l'énoncé ont dû mettre en place une stratégie pour avancer vers la solution. Ils ont alors le plus souvent apporté des modifications à leur dessin. Ils se sont, en effet, rendus compte que la seule façon de progresser était d'en tirer un maximum d'informations.

Énoncé et objets intermédiaires

L'énoncé permet de construire la figure mais, une fois la figure construite, une relecture de cet énoncé est nécessaire pour y retrouver les propriétés présentes sur la figure. Les élèves ont cherché à utiliser les éléments introduits dans l'énoncé puis à construire leur procédé à partir de ces objets. Dans le cas où ceux-ci ne paraissaient pas suffisants pour élaborer un procédé, ils ont introduits des éléments intermédiaires, mais qui ne se sont pas toujours révélés directement exploitables pour la construction du procédé. La description de la figure, qui est une première approche de la formulation d'un procédé, suppose une sélection parmi les informations disponibles. Ce choix est guidé par un objectif qui fixe les critères. Comme l'écrit Arsac, *"une simple description est déjà une interprétation en fonction de certains buts que l'on poursuit."* (Arsac, 1992).

L'objectif des élèves est de trouver, grâce à la figure, une caractérisation géométrique qui permettrait la construction finale. La recherche de cette caractérisation géométrique dépend de l'appréhension perceptive de la figure. Les élèves "voient" rapidement ou "ne voient pas" l'opération figurale suggérant un traitement mathématique" (Duval 1988). Cette vision suggérée par Duval dépend ici de plusieurs facteurs :

- les découpages de la figure peuvent être donnés ou non. Dans notre cas, les problèmes ne laissent rien entrevoir comme pistes de résolution et comme tracés intermédiaires ;

- les éléments introduits par les élèves doivent être bien précisés et réellement utilisables. Le fait même de devoir ajouter des objets auxiliaires différents de ceux auxquels l'énoncé du problème fait référence est déjà une opération intellectuelle non triviale ;

- le nombre d'objets à introduire n'est pas donné et les élèves doivent être capables de les regrouper et de les intégrer à leur procédé.

La mise en place du procédé est finalement caractérisée par trois étapes :

- la première est la nécessité qu'il y a d'utiliser des propriétés mathématiques pour la caractérisation de la figure. Cette étape est difficile à mettre en pratique car les élèves ont du mal à réaliser qu'une figure puisse être regardée à travers des propriétés : en général, ils lisent l'énoncé, construisent la figure répondant au problème et ensuite se concentrent sur celle-ci sans avoir en tête les propriétés à mettre en œuvre.

- la deuxième est la nécessité de faire un choix parmi les propriétés identifiées sur la figure. Dans certains cas, il est nécessaire de renoncer à certains renseignements que nous fournit le dessin et les "*retrouver par une démarche au premier abord nettement plus coûteuse, soit même les nier,... Dans ce dernier cas, ils apparaissent alors comme des propriétés du dessin, non de la figure*" (Arsac,1992). De même, beaucoup d'élèves ont parfois du mal à ne pas confondre ce qui est à construire avec les hypothèses.

- le troisième est la reconnaissance de "figures clés" dans la construction proprement dite du procédé à mettre en œuvre. Ainsi, lorsque les élèves ont réussi à définir l'ébauche du procédé qu'ils vont mettre en œuvre, chaque étape de leur construction, éclaire, au fur et à mesure, le tracé qui suit ; quelques modifications perceptives entraînent la reconnaissance de figures clés correspondant à un théorème ou une propriété précise.

c. Troisième phase : explicitation du procédé

Après avoir élaboré et mis à l'essai le procédé de construction, il fallait le formuler en explicitant oralement au groupe puis par écrit le procédé choisi. La plupart du temps, les élèves ont opté pour une description linéaire correspondant à l'évolution de leurs propres dessins. Ils se sont souciés, en général, de traduire de façon la plus simple possible la construction à réaliser mais sans utiliser un vocabulaire mathématique qui pouvait conduire à plus de concision ou de clarté. Les discussions ont été, pour cette étape, particulièrement nombreuses et ont été indispensables pour la mise au point de procédés corrects.

Les difficultés majeures de cette explicitation ont été, tout d'abord, de trouver un vocabulaire et des constructions langagières adaptés à ce qu'ils voulaient dire.

De surcroît et de façon implicite, il faut utiliser le sens direct des procédures pour construire la figure et le sens réciproque pour expliciter le procédé. Une deuxième difficulté est donc d'appréhender cette différence car cette inversion, induction-déduction, n'est pas identifiée par les élèves.

d. Validation du procédé

Il est important de voir comment le procédé, considéré comme achevé, est validé par les élèves. Dans la plupart des cas, la simple explicitation du procédé au regard de la figure produite a suffi à ceux-ci pour se persuader que leur procédé de construction était correct. Dans quelques groupes, il y a eu des phases de validation aboutissant au choix d'un procédé commun.

Peu d'entre eux ont cherché à vérifier, en construisant effectivement la figure, si le procédé rédigé par le groupe était correct. Dans certains groupes, il n'y a même pas eu de simple relecture pour une vérification a posteriori.

V.2. Interférences entre formulation et procédé de construction

Dans le problème proposé, la tâche comporte une phase de formulation écrite à destination d'un autre élève en vue d'une reconstruction de la figure. Nous allons examiner comment cette phase modifie le procédé de construction.

a. L'activité d'écriture modifie le procédé de construction

Dans la tâche consistant à rédiger un procédé de construction, la nécessité de la formulation modifie le procédé mis en place initialement. En effet la plupart des élèves ont commencé à vérifier leurs procédés en discutant sur les stratégies et en le testant sur différentes figures. Puis ils ont transformé leur procédé, relativement à sa représentation figurale, en regardant si la figure obtenue correspondait à l'exigence du problème.

Dans un deuxième temps, la recherche des propriétés géométriques caractérisant la figure conduit les élèves à changer leur procédé de plusieurs façons :

- soit en essayant d'utiliser les données de l'énoncé. En effet, les éléments contenus dans celui-ci ont une valeur de référence à leurs yeux car ils sont donnés. Il est donc plus sûr pour les élèves de décrire leurs constructions en utilisant ces objets plutôt que d'autres qu'ils introduisent eux-mêmes.
- soit en introduisant des éléments intermédiaires pour fournir au testeur des indications sur des étapes de la construction. Ces éléments sont définis et nommés pour pouvoir les utiliser et y faire référence ultérieurement. Les objets intermédiaires participent ainsi à une clarification du message décrivant le procédé ;
- soit en détaillant des étapes pour construire le message comme une suite d'instructions. Ce découpage, parfois assez détaillé, a aussi été envisagé par les élèves en vue d'obtenir une formulation plus compréhensible du procédé par le testeur. A ce niveau, les discussions ont d'ailleurs été très riches et ont permis l'élaboration de messages assez rigoureux.

On peu aussi remarquer que c'est seulement dans cette phase de formulation que certains élèves ont identifié la nécessité de s'appuyer sur des définitions et propriétés géométriques.

b. Formulation et structuration du texte rédigé

Le fait de rédiger une explication pour un élève extérieur conduit les élèves à anticiper sur la construction du testeur, et à réexaminer leurs stratégies. C'est la raison pour laquelle ils ont essayé d'écrire un texte le plus proche possible d'une description de leur construction. Nous allons examiner de ce point de vue comment sont structurées ces descriptions.

Les élèves réalisent en général un recensement et un classement des étapes de la construction en les reliant de façon logique ce qui n'était pas le cas dans l'ébauche de leur dessin et dans la recherche de procédés. En effet, ils ont en majorité commencé à travailler à l'envers en observant un dessin répondant à la construction demandée et c'est seulement lorsqu'ils ont voulu rédiger, qu'ils ont hiérarchisé leur procédé : ils sont partis des dessins obtenus en interprétant les données de l'énoncé pour aboutir à la construction qu'ils avaient effectivement réalisée.

Le message a le plus souvent une forme proche de la langue usuelle parce que chaque rédacteur a choisi la forme de message qui lui paraissait la plus claire ; soit sous forme de texte soit sous forme d'une succession d'instructions. Cette utilisation d'un langage naturel leur permettait sans doute de mieux décrire leur démarche.

De surcroît le message obéit à un certain nombre de contraintes dont on peut penser que le choix est fait pour permettre au rédacteur de mieux contrôler la signification du texte ainsi que la lecture qu'en fera le testeur. En particulier dans ce message :

- les phrases sont courtes et comportent chacune une seule instruction afin d'éviter toute ambiguïté ;
- les instructions sont des ordres et non des assertions (elles ne comportent que des verbes d'action ou d'ordre) ;
- les constructions contiennent des éléments intermédiaires pour expliquer le procédé ;
- le vocabulaire est plus riche dans le message que dans les expressions orales décrivant la construction préliminaire à la phase de formulation. Ceci résulte de débats souvent animés au sein des groupes qui ont conduit à un meilleur contrôle des formulations.

Cependant le vocabulaire géométrique reste souvent mal ou sous employé. Certains élèves ont tout de même voulu faire preuve de rigueur en se servant du symbolisme mathématique, en utilisant non seulement des symboles d'appartenance ou de parallélisme ou autres, mais aussi en différenciant les droites, segments et mesures par les notations classiques ( ), [ ],...) Des éléments du texte ont souvent été mis en relief par l'emploi de parenthèses, du soulignement, d'astérisques etc.

Toutes ces transformations du texte rédigé ont été faites sans difficulté mais il semble que souvent les conséquences de tous ces changements ne sont pas vues.

c. Reconstruction par les testeurs à partir du procédé

Dans la plupart des textes rédigés, la description de la figure comporte des ommissions importantes. Les testeurs n'ont pas toujours obtenu le même dessin que les créateurs du message car :

- soit ils n'ont pas compris le texte rédigé, parce que ces objets ne sont pas définis ou pas décrits ;
- soit ils n'ont pas réussi à décoder les implicites des rédacteurs, ceux-ci ayant souvent utilisé des repérages dans la feuille impossibles à reproduire.
- soit les créateurs du message ont décrit la construction d'une figure particulière ne fonctionnant que pour une position précise des éléments fixés au départ dans l'énoncé.

Cependant la majorité des rédactions, bien que contenant un vocabulaire inadapté voire incorrect a été correctement interprétée par les testeurs (dans le sens où la construction réalisée était correcte). En définitive, les testeurs, de la même façon que les rédacteurs, ont souvent bien interprété les implicites (il s'agit le plus souvent de la description d'une position déterminée dans la feuille). De plus, certains rédacteurs ayant précisé les objets à trouver et la (ou les) propriété(s) sur lesquelles ils s'appuyaient, les testeurs ont réussi à interpréter le message pour aboutir à la bonne construction.

VI. Conclusion

L'expérimentation décrite dans cet article vise à mieux nous faire comprendre quelles sont les démarches utilisées par les élèves pour résoudre un problème. A travers ce problème de construction, nous voulions fournir aux élèves une situation où le dessin est une source riche d'informations dans laquelle il est nécessaire de trier ce qui est pertinent.

La situation proposée a ainsi permis d'observer des solutions qui ne seraient pas apparues si les élèves n'avaient pas travaillé en groupe et n'avaient pas eu comme tâche de produire un procédé de construction rédigé en direction d'autres élèves. Le choix d'un problème ouvert a favorisé la diversité des solutions et a permis un large investissement de chaque élève.

L'étude détaillée des données issues de l'observation nous permet de donner des éléments de réponse aux deux questions concernant l'une les interactions entre la figure et le procédé de construction et l'autre les interférences entre le texte d'explication rédigé par les élèves et leur procédé de construction.

Ainsi nous avons pu observer que les évolutions respectives des dessins et des procédés de construction sont liées et se matérialisent à travers un incessant aller-retour. Ces interactions ont été d'autant plus nombreuses, plus riches et plus fructueuses que le travail en groupe a été présent. Le procédé mis en oeuvre et le texte d'explication rédigé par les élèves se construisent l'un après et l'autre en s'appuyant sur la figure réalisée. Enfin, nous avons pu observer comment la formulation a modifié le procédé de construction.

Ces interactions ont été favorisées par la gestion des groupes et les variables didactiques choisies pour cette situation. Mais ces résultats restent très contextualisés et il nous faut poursuivre le même type de travail.

Nous conclurons sur quelques interrogations sur l'enseignement qui nous sont suggérées par ce travail.

Ne doit-on pas insister davantage dans notre enseignement sur le rôle indispensable du dessin, et plus particulièrement du dessin précis avec usage d'instruments de dessins ? Comment favoriser l'interaction entre les réalisations pratiques de figures et les réflexions théoriques qui les accompagnent ? Le travail en groupe n'est-il pas un remède aux phénomènes de blocage ? et ne favorise-t-il pas l'évolution vers une solution ?

La nécessité d'extérioriser et de rédiger un procédé n'aide-t-elle pas les élèves à s'investir davantage, à fournir un travail plus réfléchi et plus achevé ?

Références bibliographiques

ARSAC Gilbert, 1992, *Initiation au raisonnement mathématique au collège*, in : Apprentissage du raisonnement, éd. IREM de Lyon, pp. 167-175.

AUDIBERT Gérard, 1982, *Géométrie Euclidienne Plane dans l'Enseignement secondaire.* APM pp. 349-363.

BALLACHEFF Nicolas, 1988, Une Etude de Processus de Preuve en Mathématique chez des Elèves de Collège, *Thèse d'état Université Joseph Fourier, Grenoble.*

BARUK Stella, 1992, *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*, éd. Seuil.

BROUSSEAU Guy, 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7 n°2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 33-115.

DUVAL Raymond, 1988, *Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1, pp. 57-74.

DUVAL Raymond, 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration, *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 233-261.

PIAGET Jean, 1967, *le Jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

ANNEXE 1

Voici la composition des groupes (avec en majuscule le nom de l'observateur) et nous tenons à signaler que les élèves ont choisi la composition de leur groupe par affinités. Il nous semble important de donner la composition des groupes pour faciliter la lecture des tableaux de l'annexe.

groupe 1 : HELENE, Béatrice,Camélia,Lynda.
groupe 2 : NATHALIE,Lise,Pascale,Muriel.
groupe 3 : HELENE, Fabrice, Peter, François, David.
groupe 4 : NATHALIE,Elisabeth, Eline, Audrey, Patricia.
groupe 5 : NATHALIE,Cyril, Cédric,Cécile,Coralie.
groupe 6 : NATHALIE,Aymeric,Sébastien,Yannis,Benoit.
groupe 7 : NATHALIE, Véronique, Rémi, Camille, Sahounda.

ANNEXE 2

DESCRIPTION DES PROCÉDÉS DES ÉLÈVES ET DES INTERVENTIONS :

CODAGE DES INTERVENTIONS :

Interventions communes aux deux méthodes possibles de résolution puis, sous forme de tableaux, celles particulières à chaque méthode.
A : Le point A peut être placé n'importe où.
B : Faire un dessin répondant à la construction demandée et l'analyser.
C : On ne peut pas fixer P et P' et ensuite placer A
D : Comment tracer une parallèle à une droite passant par un point, à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée ?
E : tracer le segment [OA].

1ère MÉTHODE	2ème MÉTHODE
F : Observer le triangle OAP' et le seul côté fixe : [OA].	I : Tracer la parallèle à D' passant par A. Elle coupe D en N.
G : Placer I milieu de [OA].	J : Essayer de construire un parallélogramme dont l'un des côtés est [OA].
H : Comment placer le milieu I d'un segment uniquement à l'aide d'un compas ?	

ANNEXE 3

Pour pouvoir suivre la progression du groupe, nous avons numéroté étape par étape les constructions à partir de zéro et par ordre croissant (la première et la dernière étape sont marquées en **gras**). Lorsque les élèves ont effectué, au sein d'un même groupe, la même étape nous avons regroupé les colonnes et si un élève n'a pas de numéro pour une étape c'est qu'il a suivi passivement les autres. Quand l'observateur est intervenu après une étape, celle-ci est notée par la lettre correspondante en exposant.

GROUPES (classe) / ELEVES	GROUPE 5 (3ème)				GROUPE 6 (2de)				GROUPE 7(2de)			
PROCEDURES (1ére methode)	Cécile	Cyril	Cédric	Corali	A	S	Y	B	V	R	C	S
O1 : A n'importe où	2		**0**			1				1 /5		
P2 : figure juste	3					2 /5				2		2
P3 : tracé de [OA] et de son milieu	4		2	3							9^H	
P4 : tracé de P = D ∩ (// à D' passant par I)	5		4								10^D	
P5 : tracé de P' = (AP) ∩ D'	**6**		**5**									
P6 : tracé de la // à D passant par A						3^D						
P7 : H = D'∩ (// à D pass. A). $P' = S_O(H)$					6							
P8 : tracé de P =D « (AP')					7							
P9 : $P' = S_A(P)$											**11**	
P10 : test sur différentes figures						**8**						
O'1 : dessin par tâtonnement	1^A			2		0				0		
O'2 : dessin faux			1									
O'3 : A où ça les arrange						4					4	C
O'4 : aucun dessin										7^F	8^G	
O'5 : échange le rôle de P et P'										6^B		
P'6 : P ou de P' avant A											3	
P'7 :construction de P milieu de [AP']			3						7			
P'8 : P' = C (O,OA) ∩ D'			3									

GROUPES / ELEVES	GROUPE 2 (3ème)			GROUPE 4 (3ème)				GROUPE 5 (3ème)			
PROCEDURES (2ème méthode)	M	P	L	Elis	Eline	A	P	Cécile	Cyril	Cédric	Coralie
O1 : A n'importe où					0				0		
Q2 : tracé de [OA]		2 I			2				2		
Q3 : N = D ∩ (// à D' pass. par A)		3 D			4 D/J				3 D		
Q4 : P'=D'∩ (// à (OA) pass.par N)		4			5				4		
Q5 : P = (AP') ∩ D		5		6		6			5		
O'1 : dessin par tâtonnement					1				1		
O'2 : dessin faux		0									
O'3 : placé de A où ça les arrange		1 C/ E									
O'4 : aucun dessin					3 I						
O'5 : échangent le rôle de P et P'			3								
Q'6 : K = D' « (// à D pass. par A)			4								

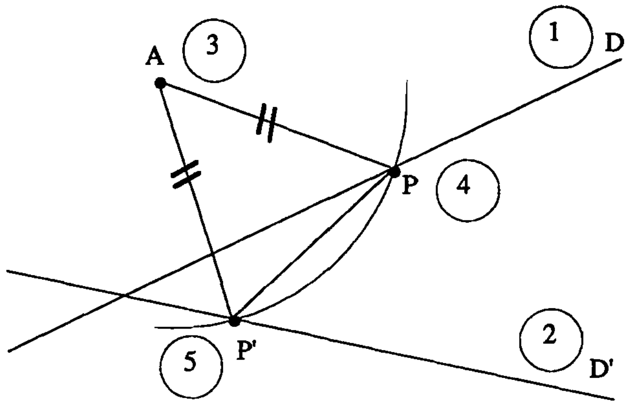
GROUPES / ELEVES PROCEDURES (ERRONEES)	GROUPE 1 ($3^{ème}$)			GROUPE 3 ($3^{ème}$)			
	B	C	L	Fabien	Peter	D	François
R1 : A n'importe où et construction d'un triangle isocèle APP' en A avec $P' \in D'$ et $P \in D$.		+	+				
R2 : P sur D et P' sur D'. Construction de A comme le symétrique de P par rapport à P'.	+						
R3 : Construction de D , puis O, P et A et une droite passant par A et coupant D en P. Construction de P' comme le symétrique de A par rapport à P. Construction de (OP') = D'.					+	+	
R4 : Construction de D', et $A \notin D'$ et construction de P' comme projeté orth. de A sur D'; médiatrice de [AP'] ; P = (med. de [AP']) $\cap$ (AP') ; puis D= (PM) avec M qcq sur D'.				+			+

ANNEXE 4

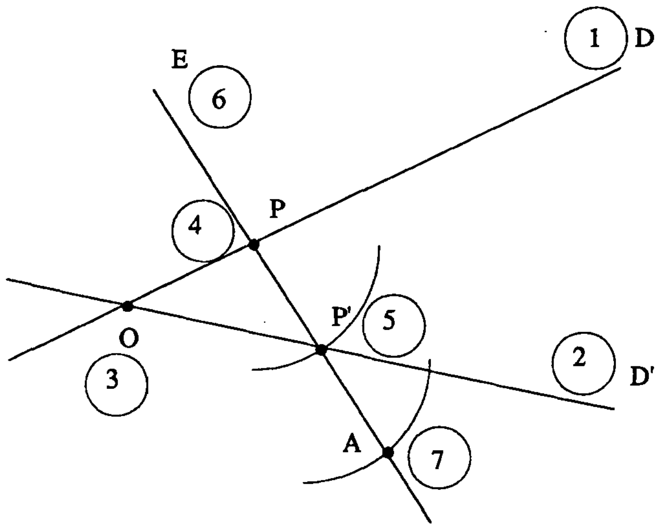
Procédures erronées

Remarque : Les numéros entourés correspondent à l'ordre chronologique des étapes.

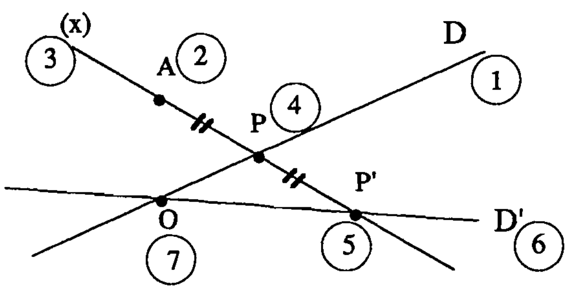
R 1 :
Camélia et Lynda (groupe 2) ne l'ont pas rédigé, préférant suivre la démarche de leur camarade Béatrice



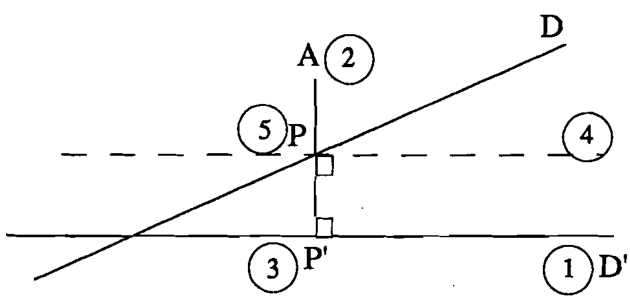
R 2 :
Béatrice (groupe 2)



R 3 :
Peter et David (groupe 7)



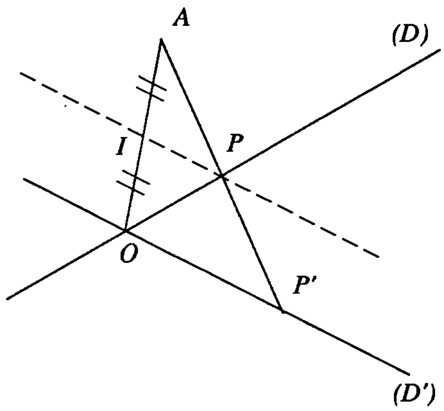
R 4 :
Fabrice et François (groupe 7)



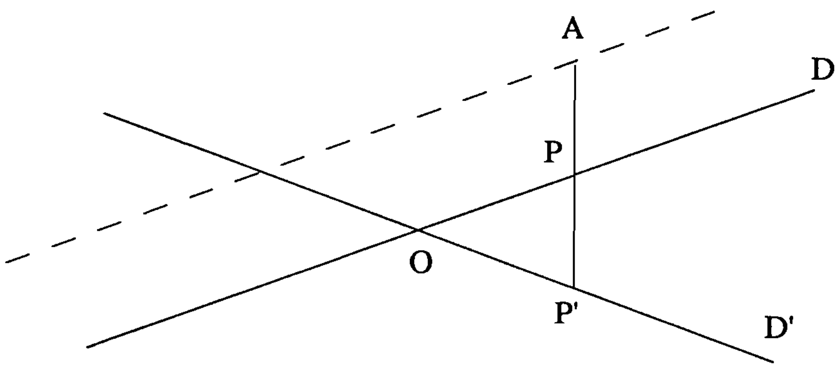
ANNEXE 5

Groupe 2 : HELENE, Béatrice, Camélia, Lynda.
Groupe 4 : NATHALIE, Lise, Pascale, Muriel.
Groupe 7 : HELENE, Fabrice, Peter, François, David.
Groupe 8 : NATHALIE, Elisabeth, Eline, Patricia, Audrey.
Groupe 10 : NATHALIE, Cyril, Cédric, Cécile, Coralie.
Groupe 11 : NATHALIE, Aymeric, Sébastien, Yannis, Benoît.
Groupe 13 : NATHALIE, Véronique, Rémi, Camille, Saounda.

1ère méthode : (Thalès ou droites des milieux) procédés... P3, P4, P5 ou P9



Procédés... P6, P7, P8



2ème méthode : (parallélogramme) procédés Q