LE DEVELOPPEMENT
DU CONCEPT DE NOMBRE CHEZ LE JEUNE ENFANT

Marie-Paule CHICHIGNOUD, Psychologue
Laboratoire d'Etude des Processus Cognitifs et
du Langage, EHESS, Paris.

Différents apports de nombreux chercheurs tels Piaget et ses collaborateurs, A. Bessot et C. Comiti, R. Gelman ou G. Vergnaud, nous ont amené à travailler une problématique autour d'**une approche diversifiée du nombre.** Nous faisons l'hypothèse d'une interaction entre d'une part, la construction progressive de la suite numérique et de ses propriétés et d'autre part, celle des mécanismes de l'addition. Le "jeu de l'itération de l'unité", c'est-à-dire ajouter plusieurs fois une unité à la quantité initiale, nous semble être le moteur de ces constructions. Il permet non seulement de passer d'un nombre à son suivant, mais aussi de constituer des collections, où chaque élément est une unité, et sur lesquelles pourront s'appuyer les raisonnements futurs.

Nous avons défini deux sous-buts à notre travail :

– constituer un répertoire de comportements pré-numériques obtenus dans des situations bien définies et variées.

– analyser des relations entre ces différents comportements et les situations proposées pour tenter de mieux cerner ce qu'est le développement des connaissances numériques chez le jeune enfant.

I – MOYENS DE TRAVAIL

1) Une épreuve en trois parties :

Pour étudier à la fois le développement de la suite numérique et des mécanismes de l'addition, nous avons choisi trois grands domaines d'exploration :

- le dénombrement
- la comparaison
- les situations pouvant donner lieu à une réponse de type additif.

Pour chacun de ces volets, nous avons construit un certain nombre de situations.

a) Situations de dénombrement :

Les situations sont définies à partir des trois variables suivantes :

L'auteur souhaite vivement recueillir les réactions des lecteurs au contenu de cet article, ainsi que toutes les remarques et suggestions ; n'hésitez pas à lui écrire par le canal du C.R.D.P. - revue grand IN.

1) nature de la collection : * collection homogène : jetons
* collection hétérogène
* collection semi-homogène : jetons / stylos

2) domaine numérique : de 4 à 15

3) configuration des éléments :

– pour les collections homogènes (jetons serrés, espacés, en croix, en ligne)
– pour les collections non homogènes :
élément de départ du dénombrement : proposition d'un autre élément de départ que celui choisi par l'enfant.

Les deux premières variables permettent de définir des situations dans lesquelles il est possible d'observer les comportements des enfants selon le type de collection et le nombre d'objets.

La troisième nous sert à étudier la capacité d'annoncer le résultat sans recompter après un changement de configuration ou d'objet de départ, ce que nous appellons : stabilité du dénombrement. Elle s'appuie sur la connaissance implicite que le nombre d'éléments de la collection ne dépend pas des modifications liées à la variable considérée.

b) Situations de comparaison :

Les situations sont définies à partir des trois variables suivantes :

– nature des collections : * collections homogènes : jetons / jetons
* collections avec signification fonctionnelle : stylos / bouchons
* collections sans signification fonctionnelle : jetons / pots
Dans ce cas les éléments présentent une grosse différence de volume.

– domaine numérique : de 2 à 15

– écart entre les nombre d'éléments des collections :
* écart de 1 (4 et 5, 7 et 8, 14 et 15)
* écart de plus de 1 (2 et 5, 4 et 10, 9 et 15)

Nos situations ont été obtenues par la combinaison de toutes les valeurs de ces trois variables.

c) Situations d'addition :

Quatre situations ont été constituées. Nous ne détaillerons ici que les deux plus intéressantes :

– jeu sur les nombres :

On pose cinq jetons sans configuration apparente devant l'enfant et on lui demande de les dénombrer, puis on en ajoute ou retire un ou deux très vite, à plusieurs reprises. La consigne est d'ailleurs de répondre "le plus vite possible" combien il y a de jetons.

– Le mouchoir :

On pose cinq jetons sur la table, on en cache trois et on demande à l'enfant combien de jetons sont cachés. En cas de bonne réponse, on ajoute ou on retire des jetons sous le mouchoir et on repose la même question.

2) Mode d'expérimentation et population :

a) Mode d'expérimentation :

Nous avons mené notre expérimentation pendant trois années dans une école maternelle grenobloise (Ecole Colonel Driant) dans des conditions assez particulières.

Nous avons, en effet, eu la possibilité de travailler à **plein-temps**, au sein même des classes en nous intégrant à leur organisation : les entretiens individuels constituaient un atelier **permanent** dans les quatre classes où nous sommes intervenus ; les enfants savaient qu'ils pouvaient venir nous voir quand ils le désiraient. Nous n'avons mené les entretiens avec les enfants que pendant les activités en petits groupes, ce qui nous a permis de participer aux moments collectifs : danse, langage, récréation . . .

Nous avons donc pu vivre avec les petits et leurs maîtres et ainsi les connaître d'une manière peu commune aux psychologues du développement. Par ailleurs l'observation de nombreuses situations de classe, en particulier mathématiques, nous a permis d'élargir le champ de nos réflexions.

Cette pratique n'a été rendue possible que grâce à la coopération et l'implication totales des enseignants dans ce projet.

b) Population :

Nous avons interrogé 61 enfants de 2 ans 11 mois à 6 ans 5 mois et proposé à chacun d'entre eux la **même** épreuve.

Ce qui nous intéressait, en effet, c'était d'obtenir un large éventail de réponses, incluant les comportements pré-numériques.

Nous avons pu suivre une vingtaine d'enfants durant deux années scolaires et étudier ainsi leur développement dans le domaine numérique à travers deux passations dans les mêmes conditions.

II – QUELQUES RESULTATS

1) La diversité :

Nous désirons insister sur l'extrême diversité des comportements observés dans les différentes situations et ceci quel que soit l'âge des enfants.

Nous avons rencontré à la fois des enfants de trois ans possédant des connaissances numériques fonctionnelles leur permettant de maîtriser de petits dénombrements ou de donner des réponses additives à certaines situations, et des enfants de six ans ne fournissant aucune réponse numérique à nos questions.

Nous savons bien que le développement des capacités numériques s'étend sur une longue période mais ce qui frappe dans la période que nous avons étudiée, ce sont les profondes différences inter-individuelles.

2) A propos du dénombrement :

a) Dénombrement et comptage :

Nous avons été amenés à distinguer deux grands types de comportements : le dénombrement et le comptage.

Dénombrement : à la question : "combien y-a-t-il de choses ?" l'enfant donne une réponse qui est le cardinal de la collection qui porte le même nom que le nom du dernier élément compté : nous dirons qu'il applique le principe cardinal.

Exemple : l'enfant dit en pointant successivement cinq jetons : "un, deux, trois, quatre, cinq, . . . cinq".

Comptage : à la même question : "combien y a-t-il de choses ?" l'enfant ne peut donner la réponse décrite précédemment tenant en un seul mot ; il se met alors à recompter la collection aussi longtemps qu'on lui repose la question.

Exemple : l'enfant dit en pointant cinq jetons : "un, deux, trois, quatre, cinq". L'expérimentateur repose la question : "alors, combien il y a de choses ?" L'enfant recommence à compter : "un, deux, trois, quatre, cinq". Mais il ne peut toujours pas répondre à la question.

Pour nous, le dénombrement est donc un comptage cardinalisé.

b) Les erreurs de comptage ou de dénombrement :

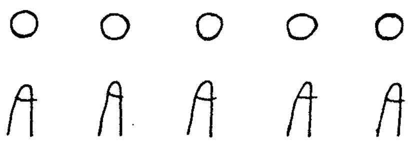
Les comptages ou les dénombrements ne sont, bien entendu, pas toujours exacts.

Nous avons réalisé une classification théorique des erreurs possibles à partir d'une analyse fine de l'acte de compter. Celle-ci s'appuie, en particulier, sur la présence systématique chez les jeunes enfants du **pointage.**

Celui peut être décomposé en deux correspondances :

– la désignation qui dirige le doigt vers l'objet.

– l'émission du mot-nombre, qui normalement doit suivre chaque désignation.



1 2 3 4 5 / 5

Or, l'observation de l'acte de compter chez les jeunes enfants nous a permis de repérer dans ces deux correspondances des erreurs qui parfois se cumulent.

Bien que peu nombreuses, elles sont en particulier le fait des enfants de 4 à 5 ans (classes de moyens).

De plus nous avons observé de très nombreuses erreurs de comptine (lorsque l'enfant récite la suite des nombres comme il le ferait d'une chanson).

c) Résumé de certaines de nos observations :

– Les performances des enfants s'améliorent avec l'âge ; ce qui est plutôt rassurant !

– Chez un même enfant, on voit parfois des erreurs s'installer au fur et à mesure que le domaine numérique augmente.

– Faire varier la nature de la collection permet de constater que certains enfants refusent spontanément de compter ensemble des objets différents ou partiellement différents ; cependant en général, ils acceptent de le faire à la demande de l'expérimentateur.

Par contre, la nature de la collection n'entraîne pas de différence significative au niveau des performances.

– Au cours d'une même interview, les enfants se répartissent nettement en deux catégories : ceux qui comptent et ceux qui dénombrent, indépendamment des situations. Un enfant fera, par exemple, des erreurs de plus en plus graves dans sa technique de comptage, mais continuera à dénombrer ou non s'il le faisait auparavant.

Le passage d'une catégorie à l'autre est donc bien une étape fondamentale dans le développement.

L'accès au dénombrement augmente avec l'âge : déjà 70 % à 4 ans et 100 % à plus de 5 ans.

– L'acquisition de la stabilité du dénombrement est, elle aussi, une étape importante.

Elle ne concerne, bien entendu, que les enfants qui cardinalisent leur résultat. On ne peut pas ici répartir les enfants en deux catégories puisque certains enfants varient dans leur croyance en la stabilité : on observe, en particulier, plus de statiblité pour des collections homogèées qu'hétérogènes.

Montrons l'évolution de la stabilité en fonction de l'âge pour les situations proposées dans le tableau suivant :

Stabilité / Age	Non	Parfois	Oui
3 ;7 - 3 ;12	3		
4 ;1 - 4 ;6	5	1	
4 ;7 - 4 ;12	8		
5 ;1 - 5 ; 6	6	1	2
⩾ 5 ;7	1	6	2

La question de la stabilité ne s'est pas posée pour les enfants de moins de trois ans six mois puisqu'ils n'ont fourni aucune réponse cardinalisée.

3) A propos de la comparaison :

Nous avons été particulièrement attentifs aux situations de comparaison car elles occupent une place privilégiée dans la vie quotidienne des enfants qui les rencontrent souvent et pour qui elles ont un sens affirmé : "qui en a le plus " ?

Quelques résultats :

a) Procédures :

Nous avons été amenés à distinguer deux grands types de procédures :

– Procédures de justification :

Elles s'appuient sur une perception spontanée et peuvent être ou non suivies d'un autre type de justification, nous en avons distingué cinq :

Perception seule : l'enfant justifie en disant : "je le vois".

Perception puis correspondance terme à terme : l'enfant dit : "les bleus" puis, quand on lui demande de se justifier, il commence à mettre les éléments des deux collections en correspondance terme à terme et conclut, par exemple : "les bleus ; il en reste 1".

Perception puis groupement d'objets : après sa première réponse uniquement perceptive, l'enfant arrange les élements des deux collections. Il constitue, par exemple, des fleurs. Il s'appuie donc sur la connaissance implicite que les figures qu'il construit comprennent le même nombre d'éléments.

Perception puis dénombrement d'une seule collection, en général la plus petite : "les bleus. . . parce que les rouges, ils sont que 2".

Perception puis dénombrement des deux collections : "les bleus . . . parce que les bleus , ils sont 5 et les rouges ,ils sont que 2".

– Procédures de démonstration :

L'enfant n'annonce sa réponse qu'après avoir manipulé les éléments.
Elles sont au nombre de trois :

Correspondance terme à terme : l'enfant réalise sa correspondance terme à terme entre les éléments des deux collections et annonce : ''les jetons, il en reste 1''.

Groupements : l'enfant réalise des figures avec les éléments des deux collections, les compare, et annonce'' les bleus parce qu'il en reste''.

Dénombrement des deux collections : l'enfant dénombre successivement les deux collections et annonce le résultat : ''les bleus, ils sont 5,et les rouges, ils sont 2 . . . c'est les bleus''.

Les enfants présentent une grande diversité de comportements d'une situation à l'autre. Un enfant n'aura pas une procédure privilégiée qu'il appliquera systématiquement à tous les cas.

b) Perception et correspondance terme à terme :

La **perception** cependant est la référence de nombreux enfants quel que soit le domaine numérique et quel que soit leur âge. Elle conduit très souvent ces enfants à la réussite, en particulier dans le cas des collections jetons / jetons.

Par contre, dans cette même situation, nous n'avons eu que **très peu de correspondance terme à terme.**

Par ailleurs, beaucoup d'enfants ont tenté des dénombrements et ont rencontré la difficulté suivante : parvenus à dénombrer efficacement les deux collections de 14 et 15 éléments, par exemple, ils ont été incapables de placer ces deux cardinaux l'un par rapport à l'autre, de les **ordonner.** Dans ce cas, nous avons vu de nombreux enfants ''revenir'' à des procédures de correspondance terme à terme qui présentent l'avantage de leur faire apparaître clairement la collection la plus nombreuse.

Nous n'avons **pas noté de différence significative dans l'apparition de correspondances terme à terme entre les situations avec ou sans signification fonctionnelle.**

Les collections stylos / bouchons auxquelles nous accordions une signification fonctionnelle renforcée par l'école, n'ont pas induit plus de correspondance terme à terme que les pots et les jetons.

Nos suggestions de correspondance terme à terme dans les cas d'échecs ont parfois été rejetées. Dans d'autres cas, les enfants ont réalisé les correspondances mais n'ont pas pu tirer de conclusion sur la comparaison et en particulier surmonter ce qui pour eux est une évidence perceptive dans le cas où les objets ont un volume très différent.

Cette **maîtrise de la corresponcance terme à terme** reste donc à nos yeux une étape essentielle dans le développement des concepts numériques chez le jeune enfant.

4) A propos de l'addition :

De nombreux travaux américains, en particulier ceux entrepris par K. Fuson et collaborateurs, ont tenté d'analyser très finement les étapes du développement des procédures additives.

Deux étapes sont particulièrement remarquables :

– **le "counting-all"** ou "compter la totalité" : on présente deux cartes portant des points de couleur à l'enfant et on lui demande de dire combien il y en a en tout ; il dénombre le nombre de points portés par la première carte, recompte à partir du tout premier élément l'ensemble de la collection.

	O O O O O O	O O O O O O O O O
1er temps	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6	
2ème temps	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6	7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15
3ème temps	______________________	il annonce "quinze"

– **le "counting-on"** ou "compter à partir du dernier de la première collection :

Dans la même situation, l'enfant, après avoir dénombré la première collection, enchaîne directement sur la seconde et annonce ainsi de manière plus économique le résultat :

	O O O O O O	O O O O O O O O O
1er temps	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6	
2ème temps		6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15
3ème temps	______________________	il annonce "quinze"

Si on peut reconnaître aisément l'importance de ce type de distinction dans la connaissance que l'enfant a des situations numériques et de la manière de les gérer, il est difficile d'évaluer la répartition des comportements. Dans l'expérimentation entreprise par K. Fuson, sur 79 enfants de 6 ans 3 mois à 7 ans 6 mois interrogés, 28 d'entre eux seulement ont présenté des procédures de type "counting-on" spontanément.

Or, on est encore loin avec ces procédures des "méthodes" additives telles qu'elles sont enseignées dans le primaire, et mémorisées par les enfants.

Pour notre part, nous avons cherché à savoir si de telles procédures étaient déjà à la portée des enfants que nous avions choisis d'interroger. Nous avons cependant diminué les domaines numériques. Nous allons présenter ici trois tableaux précisant des résultats dans les situations d' "addition" (qui n'ont pas été présentées aux vingt enfants ne fournissant pas de réponse numérique dans les situations de dénombrement).

Nous avons compté les enfants qui ont ajouté ou retranché 1 ou 2 sans recompter depuis le début dans le jeu sur les nombres :

Ajouts ou Retraits / Age	+ 1	+ 2	− 1	− 2	Population étudiée
⩽ 3 ;6	0	0	0	0	10
3 ;7 - 3 ;12	1	1	1	1	11
4 ;1 - 4 ;6	3		1		10
4 ;7 - 4 ;12	2	2	2	2	10
5 ;1 - 5 ;6	3	2	3	2	11
⩾ 5 ;7	6	5	4	3	9
	15	10	11	8	

Tous les enfants réussissant pour + 2,− 1, − 2 sont des enfants ayant réussi pour + 1, peut-être avec une procédure qu'on peut rapprocher du "counting-on". (le lien entre les nombres signifie que ce sont les mêmes enfants qui sont concernés).

Les autres enfants finissent par réussir avec une procédure de counting-all.

Age \ Modalités	Item non présenté	Ne peuvent dire ce qu'il y a sous le mouchoir	Peuvent dire ce qu'il y a sous le mouchoir
⩽ 3 ;6	10		
3 ;7 - 3 ;12	4	2	5
4 ;1 - 4 ;6	3	5	2
4 ;7 - 4 ;12	1	3	6
5 ;1 - 5 ;6	2	2	7
⩾ 5 ;7			9

Ce tableau regroupe l'ensemble de notre population qui s'est répartie en trois catégories :

– ceux à qui nous n'avons pas pu présenter l'item du mouchoir ;

– ceux qui n'ont pu retrouver combien de jetons étaient dissimulés et pour lesquels cette partie de l'épreuve s'est arrêtée là ;

– ceux qui ont pu dire combien de jetons étaient dissimulés par le mouchoir.

Ce sont les résultats de type "counting-on" que nous avons regroupés dans le tableau suivant :

Tableau des résultats à l'item mouchoir pour ceux qui ont pu donner le nombre de jetons dissimulés :

Age \ Modalités	Pas de réponse après modification sous le mouchoir	+1	–1	+2	–2
⩽ 3 ;6					
3 ;7 - 3 ;12	1	4	3		2
4 ;1 - 4 ;6	1	1	1		
4 ;7 - 4 ;12	4	2		2	
5 ;1 - 5 ;6	5	2			
⩾	7	2	1	1	2

Ces trois tableaux nous semblent appeller un certain nombre de réflexions :

a) Des enfants, même très jeunes (moins de 4 ans 6 mois) sont capables de faire fonctionner des procédures additives qui montrent qu'ils dominent ces situations. Ils sont cependant limités à des domaines numériques très petits (moins de 5).

b) Cette capacité s'accroît avec l'âge puisque six enfants de plus de 5 ans 7 mois sur neuf peuvent ajouter 1 sans recompter dans cette situation.

c) Nous n'avons pas étendu notre situation à l'ajout ou au retrait de plus de deux jetons car cela devient extrêmement difficile quel que soit l'âge des enfants et nous n'avons rencontré qu'un enfant donnant une bonne réponse pour les quatre manipulations. Par contre,on peut constater que les résultats ne sont pas très différents qu'on ajoute 1 ou 2 ou qu'on enlève 1. Par contre, enlever 2 devient très difficile.

d) Ce sont majoritairement les mêmes enfants qui réussissent dans les différentes modalités : + 1, + 2, – 1, – 2. Cette cohérence renforce nos hypothèses.

e) Nous avons noté de nombreuses confusions entre –1 et +1 : certains enfants devant qui nous retirions un jeton nous donnaient comme réponse le suivant immédiat dans la suite numérique et non le précédent ; il est important de signaler cette erreur : elle signifie, en effet, que l'enfant a bien évalué le changement du nombre d'éléments de la collection mais n'a pas pu résister au sens classique de la comptine tel qu'il est renforcé dès le plus jeune âge.

f) L'item "mouchoir" comporte deux difficultés :

– **se représenter** ce qui est sous le mouchoir ; cette difficulté renvoie aux problèmes de conservation dont on sait qu'ils mettent plusieurs années à se résoudre. Il faut attendre plus de 5 ans 7 mois, dans notre population, pour que l'ensemble d'un groupe d'âge dépasse ce premier point.

– **travailler sur les représentations** et pouvoir, ainsi, faire varier le cardinal d'une collection qu'on ne voit jamais en totalité.

On peut noter que là encore des enfants très jeunes ont pu dominer cette situation avec de très petits cardinaux.

On peut noter enfin que, parmi les plus grands enfants que nous avons interrogés, certains nous ont donné des réponses numériques de type : "5 +2 c'est 7".

CONCLUSIONS :

Ces quelques résultats nous semblent permettre deux conclusions essentielles :

– les enfants, dès leur plus jeune âge, se montrent capables de résoudre certains problèmes ayant trait au nombre, et ceci avec une grande diversité dans leurs comportements, ce qui a rendu nos situations partiellement accessibles à tous.

– les situations proposées ont joué un rôle essentiel dans l'apparition de certains comportements : elles ne sont pas seulement le décor dans lequel se déroule une "démonstration de connaissances" mais un élément de la construction de ces connaissances.

Nous voudrions insister sur le fait que nous n'avons pas abordé tous les aspects de la construction des connaissances numériques par le biais de l'expérimentation ; nous ne possédons d'informations que sur l'aspect instantané des savoirs que nous étudions. L'aspect dynamique d'évolution du savoir, en particulier, le rôle moteur que constituent les relations sociales avec le maître et avec les autres enfants, nous est resté assez inaccessible dans cette partie du travail. C'est néanmoins un des points fondamentaux sur lequel il faudrait, à notre avis, orienter de nouvelles recherches sur l'acquisition des concepts numériques chez les jeunes enfants.

BIBLIOGRAPHIE

A. BESSOT, C. COMITI ; 1982 : "Appropriation des propriétés ordinales du nombre par l'élève de cours préparatoire".
In Educational studies in Mathematics, 13 (1982) ; 59-88.

C. COMITI, A. BESSOT, C. PARISELLE, Y. BERTHIER, F. GIARD, S. MICHALLET ; 1980 "Appropriation de la notion de nombre naturel par l'élève de cours préparatoire"
In Rapport de Recherche subventionné par le Ministère des Universités 3.15.01.
Equipe de Recherche Pédagogique et IREM de Grenoble.

K. FUSON ; 1982 : "The Counting-on Solution Procedure : Analysis and Emperical Results".
In Addition and Substraction, Edited By T. Carpenter, J. Moser, T. Romberg.

R. GELMAN ; 1978 : "The Child's Undestanding of Number".
Cambridge : Harvard University Press.

P. GRECO ; 1962 : "Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant".
In "Problèmes de la construction du nombre" : GRECO, GRIZE, PAPERT, PIAGET, Vol. XI des Etudes d'Epistémologie Génétique, PUF 1960.

P. GRECO, F. MORF ; 1962 : "Structures numériques élémentaires".
Etudes d'Epistémologie Génétique, Vol. XIII, Paris, PUF 1962.

J. PIAGET, A. SZEMINSKA ; 1941 : "La genèse du nombre chez l'enfant".
Delachaux et Niestlé : 4ème édition, 1967.

J. PIAGET ; 1960 : "Problèmes de la construction du nombre". Vol. XI des Etudes d'Epistémologie Génèntique, PUF 1960.

G. VERGNAUD ; 1981 : "L'Enfant, la Mathématique et la Réalité".
Berne : Lang, 1981.