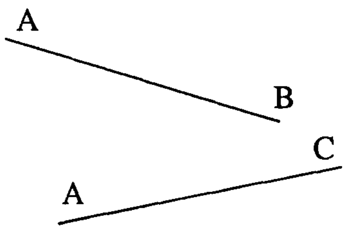
LE CONCEPT D'EGALITE : CLEF OU VERROU ?

Francis REYNES
Collège Grand Air - Arcachon
I.R.E.M. de Bordeaux

Faites l'expérience suivante (lors du premier cours de l'année c'est encore mieux) : écrivez au tableau un beau " = ", retournez-vous en souriant, et demandez à vos élèves : "qu'est-ce que ça veut dire ?" Avec un bel ensemble enthousiaste, ils vous clameront : "égale !" . Alors, jouant les naïfs, vous reprendrez : "je ne vous demande pas comment ça se lit, je sais bien que vous savez lire, mais je vous demande ce que cela **signifie**". Devant l'éventail des mimiques et des réponses, vous comprendrez vite que vous tenez là l'exemple canonique des difficultés spécifiques que soulève l'emploi d'un langage formalisé.

Certains concepts nous sont tellement familiers que nous avons du mal à imaginer qu'ils puissent poser des problèmes à nos élèves. Tel est le cas, au premier chef, du concept d'égalité, "élémentaire" s'il en est. Elémentaire et primordial, assurément, mais pas aussi évident qu'il en a l'air! Pourtant, à leur entrée en 6ème, les élèves l'utilisent depuis plusieurs années déjà, et même avec une certaine aisance apparente. De là à extrapoler qu'ils savent vraiment de quoi il s'agit il y a un grand pas qu'il faut absolument se garder de faire. En effet, l'emploi qu'ils en faisaient était limité quasi exclusivement au domaine numérique, **arithmétique**, alors qu'ils vont désormais avoir à l'utiliser dans un contexte **algébrique**, voire même géométrique. Or ce "***passage de l'Arithmétique à l'Algèbrique***" est loin d'être évident, comme l'a bien montré Y. Chevallard (petit x n° 5, 19, 23).

L'Algèbre demande une prise de distance vis-à-vis de l'écriture du nombre, la Géométrie, plus encore, un recul par rapport au dessin. Lorsqu'on demande en 6ème d'expliquer ce que signifie "$4 \times 3 = 5 + 7$", on entend "ils ont la même valeur" ou "c'est le même résultat". Il y a une idée juste, assurément, qui s'exprime par l'emploi de "même" ; mais on n'entend jamais : "c'est le même nombre", car la distinction essentielle n'est pas faite entre un nombre et son écriture (ses écritures), ce qui est parfaitement normal à ce niveau. Et lorsque j'ai demandé : "Dessinez deux segments [A B] et [A C]", **tous** mes élèves ont produit un dessin du genre suivant :



avec, dans la majorité des cas, AB = AC, car ...on n'est jamais trop prudent !

Au Collège, progressivement, les élèves apprennent à se détacher de l'emprise du concret, à se libérer de ses contraintes et de ses limites. Le concept d'égalité doit alors bénéficier d'un nouveau statut, d'une nouvelle extension et d'une nouvelle compréhension. Or il se trouve que l'on a ici la chance de pouvoir accéder à une définition parfaitement correcte et rigoureuse :

1) Tout élève de 6ème sait clairement que la photo d'un chat n'est pas le "vrai" chat.

2) Il comprend sans mal que, pour pouvoir parler d'un objet quelconque, il faut pouvoir le nommer, ce qui présuppose que cet objet ait un **nom**.

3) Il convient tout aussi aisément qu'il vaut mieux éviter de donner le même nom à deux objets, sans quoi on en arriverait vite à ne plus savoir de quoi on parle.

4) Il sait d'expérience que l'on peut donner **plusieurs noms à la même "chose"**.

Ces quatre préalables, tous "évidents", sont pourtant loin d'être un luxe inutile ; fonder leur évidence constitue au contraire une assise indispensable à l'élaboration future. Pour s'en convaincre il suffit de poser la question suivante (dans n'importe quelle classe ...) : *"Lorsque j'écris (AB) = (AE) , je parle de combien de droites ? "* Réponse quasi unanime : deux !...

Les "objets mathématiques" ne sont pas des objets physiques, matériels, appréhendables par les sens, et il importe de pointer cette différence de nature, ce changement d'univers, cette rupture lourde de conséquences : ce sont des "concepts", des idées, des fruits de l'imagination humaine. Personne n'a jamais vu et ne verra jamais le nombre "douze" ! (Les élèves sont un peu choqués lorsqu'on leur dit que, de la même façon, personne n'a jamais vu un cercle, tant est forte la prégnance du dessin géométrique et mal défini le "statut de la figure", mais l'essence du problème n'en reste pas moins la même).

Pourtant ces objets idéels sont parfaitement appréhendables, à condition que l'on dispose de quoi les **représenter**, les **nommer**. Ce point est crucial et il est indispensable d'amener peu à peu les élèves à réaliser que les Mathématiques fonctionnent uniquement par l'intermédiaire des représentations, des désignations, des dénominations, des **noms**, car *"le but des mots est de pouvoir s'occuper d'autres objets que les mots"* (A. Schaff). En Mathématique, on a même la liberté de donner un nom à un objet inconnu, voire inexistant !

Une remarque liminaire me semble indispensable pour bien saisir l'essence du concept d'égalité, sa nature et sa portée, et le contexte dans lequel il doit être appréhendé : celui du langage. Je citerai un court extrait de l'article "Notation mathématique" de l'Encyclopaedia Universalis : *"Un même objet peut avoir des noms divers, ainsi "Paris" et "la capitale de la France" désignent le même objet ; le nombre 9 peut être désigné par une infinité d'expressions, telles que 2 + 7, 10 – 1, 32, 9 × 1, etc. Dans cette interprétation, le signe d'égalité n'est pas un signe mathématique, mais un signe* ***sémantique****, exprimant que deux termes signifient la même chose"* .J'ai souligné ce qui me paraît essentiel : la référence à la signification du langage, car c'est elle qui conditionne la mise en évidence et la prise de conscience du sens.

Tout élève de 6ème est capable de comprendre que les **deux noms** "Paris" et "la capitale de la France" désignent **la même ville**.

Tout élève de 6ème est capable de comprendre que les **deux écritures** "4 × 3" et "5 + 7" désignent **le même nombre** : douze, autrement dit que ce sont **deux dénominations d'UN SEUL et même objet**. Cette information **se traduit** en langage mathématique en disant que **ces deux dénominations sont EGALES** et en écrivant : $4 \times 3 = 5 + 7$.

D'une manière analogue et générale, la phrase "truc = machin" signifie que les deux écritures truc et machin sont deux dénominations d'UN SEUL et même objet, deux noms pour la même chose.

C'est tout. Et ... "C'est beaucoup ; ce n'est pas trop" (Boby Lapointe).

Puisque l'égalité n'est qu'une traduction mathématique d'une propriété linguistique élémentaire (un même signifié peut admettre plusieurs signifiants), il semble logique et raisonnable de commencer par s'exercer à ces traductions. Cela aura de plus l'avantage d'habituer à considérer les écritures telles que 5 + 7, 4 × 3, comme des dénominations d'**un seul** nombre. Par exemple, traduire "douze est le double de six" oblige à analyser la phrase et à la structurer en trois composants (sujet, verbe, attribut) dont les traductions vont faire émerger le sens : puisque "douze" s'écrira 12 et "le double de six" 2 × 6, "est" se traduira forcément et naturellement par "=". Cette traduction du verbe être, fréquente et fondamentale, est à distinguer de celle qui intervient dans des phrases telles que "douze est un nombre pair" : cette distinction ne peut s'effectuer que par l'analyse du sens et de la fonction : "un", article indéfini, interdit d'attribuer à l'expression "un nombre pair" le statut de dénomination d'objet, par conséquent le "est" ne signifie pas ici "est la même chose que" et ne peut donc pas être traduit par "=".

Guy Brousseau a expliqué comment le "3 et 5 font 8" provient d'un glissement typographique au cours du temps : on disait "3 et 5 **sont** 8", mais l'écriture du "s" était auparavant "*f*", et c'est ainsi que le "3 et 5 ***ſont*** 8" a été **lu** : "3 et 5 **font** 8". Du coup le sens a dérapé ! Dommage : malgré l'usage du "et" (donc du pluriel), c'était presque la signification actuelle ...

L'expérience prouve que **l'unicité de l'objet**, qui constitue le fondement même du concept d'égalité, est le plus souvent oubliée ! Du coup, la **confusion entre un objet et l'une de ses représentations** persiste, avec tous les dérapages que cela implique, en particulier en Géométrie. Aussi ne faut-il pas manquer la moindre occasion de la rappeler **et de s'en servir**, nous allons voir à présent comment.

Dans un dictionnaire de Mathématique paru en 1973 on trouve la définition suivante : "**Egalité** : deux objets mathématiques a et b sont égaux si a et b sont deux représentations du *même* objet. L'égalité mathématique est, en fait, l'**identité**.". Que disions-nous au paragraphe précédent ?

Du temps des "Maths modernes", on étudiait **les** propriétés de l'égalité comme un exemple de relation d'équivalence.

Dans les manuels actuels, on trouve parfois une définition de l'égalité, plus souvent des "**règles de calcul**" du genre "*Si* $x = y$, *alors* $x + z = y + z$", *ou une liste de "propriétés"*.

J'avoue ne pas comprendre pourquoi on passe quasiment toujours sous silence **LA propriété** fondamentale et essentielle de l'égalité ni pourquoi, lorsqu'il arrive qu'on la mentionne, on n'explique ni ne montre jamais comment elle fonctionne et à quoi elle sert !

L'égalité n'a, en effet, qu'une seule propriété, qui dérive directement de l'essence même de sa définition, et dont les applications et les conséquences sont aussi variées qu'importantes.

Cette propriété n'est pas vraiment difficile à comprendre, mais sa maîtrise demande un apprentissage authentique dont il ne faut pas sous-estimer l'effort qu'il requiert : sa mise en oeuvre nécessite en effet un **travail sur les écritures** auquel les élèves ne sont absolument pas habitués. Pour autant, il me paraît dangereux de penser que l'on peut en faire l'économie.

La propriété de l'égalité tient en un mot : SUBSTITUTION.
A quoi sert l'égalité ? A opérer des substitutions.
Pourquoi ? Comment ?

Deux écritures sont égales lorsqu'elles désignent le même objet : si **truc = machin**, je peux donc **employer indifféremment** le nom "**truc**" ou le nom "**machin**" pour désigner l'objet unique que ces deux noms désignent. En particulier je peux donc **changer de nom** si cela me plait ou m'est utile, puisque, de toutes façons, je parlerai toujours de la même chose. Autrement dit **je peux toujours remplacer un nom par un autre qui lui est égal.** Voilà tout le "mystère" du mode d'emploi de l'égalité ! Il se résume en une formule lapidaire :

On a toujours le droit de REMPLACER une dénomination par une dénomination égale.

Cela semble tellement évident qu'on se demande quels obstacles peuvent bien entraver la mise en pratique de cette facilité ! Et pourtant ... il y en a.

Si truc = machin, j'ai donc tout le loisir de remplacer truc par machin. Il semble que l'obstacle soit double et se situe

d'une part dans **la structuration de la perception des écritures** : par exemple, en présence de l'égalité $x + 3 = 5$, il faut voir que c'est $x + 3$ qui joue le rôle de **truc** et que c'est 5 qui joue le rôle de machin. Au début, beaucoup d'élèves disent que c'est x qui joue le rôle de truc. Certains disent que c'est 3. Pour franchir cet obstacle il faut revenir à l'**analyse de l'égalité en tant que phrase :** quel est le groupe verbal, quel est le sujet, quel est l'attribut ?

d'autre part dans la contrainte pratique, graphique, qui consiste en ce qu'on n'efface pas une désignation pour en écrire une autre à la place **: la substitution se manifeste par une réécriture de son résultat.** Par exemple si $x + 3 = 5$, alors $x + 3 + 9 = 5 + 9$: dans l'écriture $x + 3 + 9$, je remplace $x + 3$ par 5 et j'écris le résultat de cette substitution : $5 + 9$. Et j'obtiens de la sorte une nouvelle égalité ...

Un traitement de texte permet d'effacer et de remplacer, sur l'écran de l'ordinateur, une écriture par une autre. Au tableau, on peut mimer cette procédure. On peut également utiliser un montage de transparents avec un rétroprojecteur. Il faut ensuite faire admettre que, sur une feuille de papier, la "règle de jeu" est de ne pas effacer, et que la conséquence en est l'obligation de réécrire :

si truc = machin, alors je peux réécrire n'importe quelle écriture dans laquelle se trouve truc en mettant machin à la place où était truc.

A l'entrée en 6ème les élèves ont une certaine pratique du calcul numérique qui constitue un bon support au démarrage de ces activités de substitution : $4 \times 3 = 12$, donc $4 \times 3 + 7 = ... + 7$. $7 + 9 = 16$, donc $3 \times (7 + 9) = 3 \times ......$.

De tels exercices présentent de multiples avantages : ils visualisent des processus mentaux et la manière dont fonctionnent certains concepts, certaines lois ; ils explicitent et justifient certaines "astuces" de calcul mental ($99 = 100 - 1$, donc $37 + 99 = 37 + 100 - 1$) ; ils donnent peu à peu l'**habitude de travailler sur les représentations**, de les étudier et de les utiliser en tant que telles : par exemple écrire $18 = 2 \times 9$ exprime le fait que 18 est un nombre pair alors qu'écrire $18 = 3 \times 6$ met en évidence que c'est un multiple de 3. Cette (bonne) habitude se transférera ainsi plus facilement sur la Géométrie : il n'y a pas qu'en Géométrie qu'il faut être capable de "voir sur la figure", ou plus exactement **au travers de** la figure ! En Algèbre aussi il faut être à même de **reconnaître des configurations** (facteur commun, différence de deux carrés, etc.).

Il est évidemment hors de question d'"apprendre" cette propriété : elle doit s'imposer par son évidence, il ne s'agit pas de la "savoir" mais d'en être convaincu ! Pour cela il me semble nécessaire de commencer, une fois encore, par le commencement : la langue dite naturelle, et de **pratiquer d'abord des activités de substitution en Français, seul moyen d'en enraciner le sens** (sans parler de l'effet désastreux qu'a, sur le style, la répétition inconsidérée d'un même mot ...). Après quoi on pourra aborder sans crainte l'utilisation de cette propriété dans le cas particulier du langage mathématique.

La dextérité dans le maniement de la substitution ne s'acquiert évidemment pas du jour au lendemain : il est absolument indispensable de la mettre en oeuvre de façon régulière. Fort heureusement, ce ne sont pas les occasions qui manquent. Nous allons en citer quelques-unes, certaines tout-à-fait "élémentaires" – et qu'il convient donc d'étudier très tôt –, d'autres un peu plus élaborées mais dont les racines plongent toujours dans l'essence même de la définition du concept d'égalité. Car la richesse et la puissance de ce concept ne peuvent se révéler que progressivement, au travers de l'étude de situations de plus en plus complexes.

Symétrie

Evidente de par la signification de "=", son emploi est néanmoins fortement gêné par la dissymétrie qu'impose le sens de lecture et d'écriture. Et le langage mathématique n'est pas dépourvu de règles de style plus ou moins tacites : on dira "2 est solution de l'équation" mais on écrira "x = 2" de préférence à "2 = x".

S'entraîner un peu à lire et réécrire "à l'envers" des égalités n'est donc pas du temps perdu : cela permet de corriger et de dépasser la fausse impression de "direction d'action" induite par la chronologie des gestes, car une égalité n'est qu'une sorte de constat d'état dont le temps est exclu ; il n'est pas rare de dire "si x prend la valeur 2" pour exprimer "si $x = 2$", mais une variable n'est pas une action cotée en Bourse !

Transitivité

Si truc = machin **et** machin = chose , alors le remplacement de machin par chose dans la première égalité fournit immédiatement le résultat. Il n'est pas interdit de juxtaposer à cette explication "mécaniste" celle qu'engendre la compréhension de la situation : si truc désigne le même objet que machin et machin le même que chose, alors forcément truc désigne le même que chose.

Cette propriété est évidemment indispensable à la conduite de tout calcul. Modulo une convention d'écriture à expliciter, elle permet d'enchaîner les calculs sans répétition fastidieuse.

Egalité et opérations

Si truc = machin , alors truc + chose = machin + chose.

Il faut le répéter : il ne s'agit pas là d'une "règle de calcul" mais d'une évidence sémantique, évidence qui ne peut s'imposer qu'à deux conditions :

1) savoir que "truc + chose" désigne un nombre et pas deux (de même que "la capitale de la France" désigne **une** ville).

2) savoir que "=" signifie ici "désigne le même nombre que".

La difficulté qui persiste (et elle est réelle) est celle, déjà signalée, de la structuration de l'appréhension des écritures, qui fait écran au sens : si $x + 7 = 23$, alors c'est $x + 7$ qui joue le rôle de truc et 23 celui de machin : $x + 7$ est un autre nom de 23.

On aura beau motiver les mises en équation par des problèmes concrets, il n'en demeurera pas moins que l'Algèbre se manifeste comme un jeu de transformations d'écritures dont les "règles" ne sont ni arbitraires ni incompréhensibles, même si elles se présentent sous une apparence formelle : le meilleur moyen de gagner à ce jeu reste de comprendre ce qu'on fait et d'avoir un minimum d'entraînement ; alors pourront s'installer des automatismes qui ne seront pas vidés de leur sens car ils auront été construits sur ce sens dans le but d'en alléger la gestion.

L'exemple "de base" est, sans doute, la résolution d'une équation du type $x + a = b$. L'élève qui a vraiment compris que si $x+7=-5$, alors :
$x + 7 + k = -5 + k$ quel que soit le nombre désigné par k, et qui sait ce qu'est l'opposé d'un nombre, cet élève ne sera pas long à deviner que le "bon choix" pour k est -7. Au bout de quelques tentatives du même genre il sera à même de généraliser et de "court-circuiter" la rédaction de la résolution puisque "ça se passe toujours de la même façon". Il n'aura aucune "règle" à apprendre : il aura compris. Et s'il lui arrive de se tromper, il sera capable de trouver et de comprendre son erreur.

Etant le premier traité, l'exemple de l'addition doit être étudié avec patience et minutie.

Extension : si $A = B$ et $T = M$, alors $A + T = B + M$. Application au paragraphe suivant.

Bien évidemment, ce qui est vrai avec l'addition l'est tout autant avec les trois autres opérations (et plus généralement avec toute opération définie sur une catégorie d'objets : vecteurs, matrices, applications, etc.). Exemple avec la multiplication :

La résolution d'une équation du genre $2x/3 - 1/4 = x/2 + 5/6$ peut s'effectuer de deux façons basées sur l'utilisation du PPCM des dénominateurs :

$8x/12 - 3/12 = 6x/12 + 10/12$	$12 \times (2x/3 - 1/4) = 12 \times (x/2 + 5/6)$
$(8x - 3)/12 = (6x + 10)/12$	$12 \times 2x/3 - 12 \times 1/4 = 12\times x/2 + 12 \times 5/6$
$8x - 3 = 6x + 10$	$8x - 3 = 6x + 10$

Généralement, les élèves préfèrent la première façon et court-circuitent même la deuxième ligne en "chassant les dénominateurs". Outre que ce procédé fait plutôt penser à une recette magique, il occulte l'utilisation de la propriété

si truc = machin , alors k × truc = k × machin que met en évidence la deuxième façon, et dont la maîtrise est nécessaire pour ce qui suit.

Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Sauf cas particulièrement simple, la méthode "par substitution" est lourde.
Un tel système se présente sous la forme :
truc = c **et** machin = f **avec**
truc = ax + by **et** machin = dx + ey.

La résolution par "combinaisons linéaires" ne requiert que ce qui a été examiné au paragraphe précédent : si truc = c **et** machin = f , alors k × truc = k × c **et** p × machin = p × f, donc k × truc + p × machin = k × c + p × f. Il faut "évidemment" choisir k et p de façon à "éliminer" une inconnue, et pour ce faire il faut savoir développer un produit par distributivité, ce qui est connu bien avant la classe de 3ème. La complication provient ici uniquement du grand nombre de paramètres à gérer : six donnés, deux à trouver deux fois de suite.

Double distributivité

Si l'on sait que $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et si $k = m + p$, alors, en remplaçant k par $m + p$, on obtient $(m + p) \times (a + b) = (m + p) \times a + (m + p) \times b = ..$

Factorisation de mx + m

L'écriture m × x + m n'est pas factorisable puisque sa structure n'est pas du type $k \times a + k \times b$, somme de deux produits et facteur commun. Mais puisque $m \times 1$ est le seul produit égal à m, alors $m \times x + m = m \times x + m \times 1 = ...$

Carré et opposés

On démontre que $(-T) \times M = -(T \times M)$.
Si $M = -K$, on obtient donc $(-T) \times (-K) = -[-(T \times K)] = T \times K$.
Et si $K = T$, alors $(-T) \times (-T) = T \times T$ autrement dit $(-T)2 = T2$.

Carré d'une différence

On démontre que $(T + K)^2 = T^2 + 2TK + K^2$.
Si $K = -M$, sachant que $T - M = T + (-M)$ on obtient :
$(T - M)^2 = (T + (-M))^2 = T^2 + 2T(-M) + (-M)^2 = T^2 - 2TM + M^2$.

Il n'y a donc pas trois "identités remarquables" mais deux seulement. Notons en passant que le mot "identité" devrait être ... remplacé par "égalité" et que sa persistance dans le vocabulaire n'est pas neutre : elle rejoint la "définition" du dictionnaire citée plus haut.

Egalité et fonctions

L'écriture "f(a)" désignant l'image de a par la fonction f, il est flagrant que si $t = m$, alors $f(t) = f(m)$. Cette lapalissade est le fondement d'une méthode extrêmement puissante : le **changement de variable**, et d'un concept très important à partir de la classe de seconde : la **composition des applications**.

Prenons un exemple : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 2x + 1$.
L'habitude de la substitution est déjà indispensable pour pouvoir comprendre que le choix de la lettre "x" n'a pas de signification **en soi** car son statut est celui de "variable muette" et qu'il est donc tout aussi loisible d'écrire f(truc) = 2truc + 1. Alors, si par exemple truc = 3 – m, on obtiendra $f(3 - m) = 2(3 - m) + 1$. **C'est dans cette substitution et cette réécriture que gît toute la difficulté, et nulle part ailleurs.** C'est pourquoi j'estime plus logique, en ce qui concerne la composition, de procéder de la façon suivante : $fog(m) = f(g(m)) = 2g(m) + 1$, car si truc = g(m), alors f(truc) = f(g(m)) : on fait "fonctionner" f avec la variable g(m), après quoi on pourra remplacer g(m) par son écriture en fonction de m.

Une occurrence particulière de ce genre de difficulté est l'étude de la valeur absolue: la disjonction des cas $x \geq 0$ et $x < 0$ de l'étude de $|x|$ se transfère sans changement pour l'étude de $|2x + 1|$: c'est une erreur bien connue des professeurs de seconde, erreur due bien sûr à un défaut de substitution et à une prééminence de la lettre "x" dans les écritures littérales. Il faut écrire (et penser !) : si truc ≥ 0, alors |truc| = truc et si truc < 0 , alors |truc| = –truc pour pouvoir ensuite opérer la substitution truc = 2x + 1.

On retrouve également, et pour la même raison, un problème analogue avec la fonction **racine carrée** : $\sqrt{(2x + 1)}$ doit être pensé, interprété comme "$\sqrt{\text{truc}}$ et truc = 2x + 1", par exemple pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \rightarrow \sqrt{(2x + 1)}$.

Un test révélateur consiste à demander de composer une fonction avec elle même : bien des élèves qui réussissent à définir fog échouent pour fof ! La compréhension de *l'arbitraire du signe* (Saussure) pour désigner la variable et la maîtrise de la substitution sont ici incontournables : si f(truc) = 2truc + 1 et truc = 2x + 1 , alors f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1.

Implications vraies et réciproques fausses

La maîtrise de la substitution est indispensable pour pouvoir faire la distinction entre certaines implications dont la véracité est triviale alors que leurs réciproques sont inexactes. Quelques exemples :

Si $m = t$, alors $m^2 = t^2$.
Si $a = b$, alors $|a| = |b|$.
Si A = B, alors (AE) = (BE).
Si K = L, alors AK = AL.

Traduction de l'unicité d'un objet

Lorsqu'un énoncé exprime l'existence et l'unicité d'un objet satisfaisant à certaines conditions, la traduction de l'unicité peut donc se faire en utilisant l'égalité. Exemples :

Deux droites sécantes n'ont qu'un point commun, donc :
Si $D \neq \Delta$ et $P \in D$ et $P \in \Delta$ et $M \in D$ et $M \in \Delta$, alors P = M.

Axiome d'Euclide : Si $A \in D$ et $A \in D'$ et $D // \Delta$ et $D' // \Delta$, alors D = D', puisqu'il n'y a qu'une droite passant par A et parallèle à Δ.
Idem en remplaçant "parallèle" par "perpendiculaire".

Un exemple remarquablement important est celui de la **traduction de l'alignement de trois points** : il est accessible dès la 6ème et se prolonge loin. En 6ème, on peut commencer par demander de traduire par un dessin la situation décrite par l'information : "(AB) = (BC)". Bien sûr, le premier réflexe des élèves est de dessiner deux droites, et il faut donc faire traduire en Français l'égalité donnée par : la droite qui passe par A et B est **la même** que la droite passant par B et C.

Alors on comprend qu'il n'y a qu'une seule droite passant à la fois par les trois points. Sachant qu'il suffit de deux points pour définir une droite, on dispose alors d'un troisième nom pour cette droite : (AC), ce qui permet d'écrire deux autres égalités équivalentes. Cela est nécessaire car un bon nombre d'élèves ont envie de désigner la droite passant par les trois points A, B, C par la notation "(ABC)" ; c'est loin d'être stupide, mais cela contrevient au "principe d'économie". D'autre part le fait de disposer de plusieurs noms n'est pas un inconvénient mais au contraire un avantage. Le "prolongement" évoqué précédemment se réalise en Géométrie Analytique à propos des équations de droites par l'enchaînement d'équivalences bien connu : $A \in (BC) \Leftrightarrow (AB) = (BC) \Leftrightarrow (AB) // (BC) \Leftrightarrow$ la pente de (AB) = la pente de (BC).

Ce type de traduction génère aussi une **méthode de démonstration,** utilisée surtout en Algèbre mais aussi en Géométrie, et qui consiste à REnommer un objet puis à traduire en utilisant ce nouveau nom.

Par exemple, pour démontrer que "K est le milieu de [AB]", on dit : "soit I le milieu de [AB]" et on démontre que $K = I$.

De même, pour démontrer que soustraire un nombre revient à additionner son opposé, on "pose" $d = a - b$ et on démontre que $d = a + (-b)$.

De la même façon, pour démontrer que l'inverse de l'opposé est l'opposé de l'inverse, on écrit "soit $t = 1/(-m)$", et on démontre que $t = -(1/m)$.

Dans le même ordre d'idée, **l'énonciation opératoire de certaines définitions d'objets impose une REdénomination de cet objet.** Exemple :

"La racine carrée d'un nombre positif m est le nombre positif qui a pour carré m" ne peut pas se satisfaire de la traduction : si $m \geq 0$, alors $\sqrt{m} \geq 0$ et $(\sqrt{m})^2 = m$. **La définition ne devient utilisable que si on l'exprime par l'équivalence logique : $k = \sqrt{m} \Leftrightarrow k \geq 0$ et $k^2 = m$.**

Exemple d'utilisation : quelle est la racine carrée de a^2 ?

$k = \sqrt{(a2)} \Leftrightarrow k \geq 0$ et $k^2 = a^2$

$\Leftrightarrow k \geq 0$ et $[k = a$ ou $k = -a]$

$\Leftrightarrow k =$ celui des deux nombres "a" et "–a" qui est positif

$\Leftrightarrow k = |a|$

Egalité et calculatrices

Pour terminer j'aborderai le problème de l'utilisation des calculatrices.

On ne saurait mieux dire que Marc Ferrant : *"le plus souvent, un nombre affiché doit être lu comme une information et non comme un résultat"* (revue "3-33" n° 10, Mai 93).

Une calculatrice est un instrument merveilleux mais qui fonctionne d'une façon strictement déterminée : c'est ce fonctionnement qui explique ses "erreurs" et détermine ses limites d'utilisation. Il importe donc de le connaître si l'on veut pouvoir l'utiliser correctement et sans risque : lorsqu'une automobile quitte la route dans un virage abordé trop vite, la responsabilité n'incombe pas à la machine mais bien à son conducteur !

A leur entrée en 6ème, les élèves "connaissent" les nombres entiers et "à virgule", à la condition, toutefois, qu'ils ne soient pas trop "grands" ou trop "longs" : il semble que le nombre de chiffres de l'écriture décimale soit une variable didactique pertinente : une calculatrice qui affiche dix chiffres les impressionne ... Et comme elle est réputée "ne jamais se tromper", ils sont évidemment tout prêts à croire que $2/3 = 0{,}666666667$ si elle le leur dit. Il faut donc leur faire comprendre que ce n'est pas cela qu'elle dit ! Car, malgré la présence (regrettable ?) sur son clavier d'une touche "=", elle ne "sait" pas, contrairement à nous, ce que signifie ce signe ! Elle ne "sait" d'ailleurs rien puisqu'elle ne pense pas...

La première chose à faire est sans doute de mettre en évidence des "résultats" manifestement faux et dont la vérification "à la main" est très facile. Ce ne sont pas les possibilités qui manquent, je ne m'étendrai donc pas là-dessus.

Il faut ensuite comprendre pourquoi la calculatrice a donné cet affichage : nombre de chiffres limité, registre de calcul comportant deux ou trois chiffres de plus que l'écran et astuces pour les faire apparaître, troncatures et arrondis, etc.

Utilisant la réciprocité entre multiplication et division, on peut se convaincre du fait que $2/3 \neq 0{,}666666667$ puisque $3 \times 0{,}666666667 = 2{,}000000001$ et que $2 = 2{,}000000000$ et que $1 \neq 0$. Il me paraît essentiel de pointer ici qu'il n'y a aucune différence de "gravité dans l'erreur" entre le fait d'écrire "$2/3 = 0{,}666666667$" et celui d'écrire "$1 = 0$" puisque ces deux égalités sont logiquement équivalentes. C'est le statut même du concept d'égalité qui est en cause, et ce concept n'a rien à voir avec le "presque" ou le "quasiment" de la vie courante, il est une rupture avec cette notion d'à peu près : qui donc a besoin, dans son quotidien, d'une précision du milliardième ? Absolument personne, évidemment ! Mais l'égalité mathématique n'est pas un problème de précision, c'est une question de dénomination : savoir si, oui ou non, on parle de la même chose, "that is the question" !

Tout cela est assurément nécessaire, développe la rigueur et l'esprit critique, mais ne supprime pas l'effet pervers bien connu à présent : l'usage des calculatrices renforce la tendance à croire qu'il n'existe pas d'autres nombres que les décimaux. Car la question va revenir comme un boomerang : mais alors, 2/3 ça fait combien ? (et plus tard elle reviendra avec encore plus de véhémence : $\sqrt{2}$, ça fait combien ?).

Pour dépasser cette résistance, il est tout d'abord indispensable d'avoir réalisé qu'une écriture telle que $5 + 7$ ou $46 - 19$ ou 8×35 ou $748/32$ désigne un nombre et un seul, et non une "opération" qui serait "posée" sans être "effectuée". La résistance va évidemment se focaliser sur les quotients puisque, seule, la division provoque des "résultats qui ne tombent pas juste". Le fait que certains quotients soient des décimaux permet, grâce à l'égalité, de commencer à admettre qu'un quotient puisse désigner un nombre : $195/52 = 3{,}75$ et 3,75 désigne un nombre, donc ... Mais cela risque aussi de renforcer le sentiment de la nécessité de "tomber juste" ! L'utilisation d'un changement de cadre est utile : si un rectangle mesure 12 sur 18, on a $12 = 18 \times 2/3$; on peut calculer la largeur si l'on sait qu'elle "vaut" les deux tiers de la longueur connue. Même si, dans ce cas, le concept de nombre reste attaché à celui de mesure et/ou d'opérateur, le fait de les "mélanger" sans distinction pour faire des opérations dont le sens du résultat est apparent permet une homogénéisation des statuts.

Le maniement de la réciprocité entre multiplication et division est tout aussi indispensable au passage du sens : lorsqu'on écrit "$3 \times$ truc $= 2$", il semble assez naturel de considérer que "truc" désigne un nombre, même s'il demeure encore inconnu ; puisque cette égalité équivaut à "truc $= 2/3$", cela aide à accepter 2/3 parmi les nombres.

Pour vaincre la nécessité de "tomber juste" je pense qu'il est incontournable de faire "à la main" des divisions "qui ne s'arrêtent pas" et de comprendre comment la réapparition d'un reste déjà obtenu entraîne la répétition de la même séquence de chiffres dans l'écriture du quotient. Il ne faut surtout pas commencer par diviser par 3 ou par 11 : c'est trop rapide et simple pour être marquant ; un minimum de trois chiffres pour la période me semble convenable (division par 37), après quoi on peut augmenter un peu (101 en donne quatre, 41 cinq, 7 et 13 six) puis revenir à la division par 11 et enfin par 3. Cette recherche de la partie périodique est, d'ailleurs, une motivation pour les élèves : manifestement, cela les amuse : profitons-en !

Et revenons sur cette "obsession" de "tomber juste", non pas en essayant de l'expliciter directement, mais en tentant de la dépasser par une autre question : que signifie "connaître un nombre" ? Réponse la plus courante, provenant de la notion de "nombre comme résultat de mesure" : c'est connaître sa valeur. Soit. Alors quelle est la valeur de 12 ? Difficile de répondre autre chose que "12" ... En Mathématique, connaître un nombre c'est être capable de s'en servir, par exemple pour faire des calculs, et pour cela certaines écritures de ce nombre seront plus commodes que d'autres : $64 \times 53/32$ est plus facile à manipuler que $64 \times 1{,}65625$. Mieux : la division de 258 par 37, faite à la main, nous en apprend beaucoup plus que le 6,972972973 affiché par une calculatrice, puisqu'elle nous permet de **prévoir** que la séquence "972" se répète indéfiniment : c'est cela, connaître ! Soit dit en passant, plus j'y pense et plus le "statut de la calculatrice" me paraît homomorphe à celui de la figure en Géométrie : on lit sur la calculatrice comme on "voit" sur la figure, et l'on retrouve les deux aspects contradictoires : tantôt aide à la conjecture, à la recherche, tantôt écran inhibiteur du raisonnement logique.

Mais revenons à notre quotient illimité : on tient là une ébauche de la notion d'infini, à rapprocher de celle de la droite géométrique qu'il faut imaginer se prolongeant sans fin identiquement à elle-même. Et l'on tient aussi une explication, une raison à la nécessité de conserver l'écriture "258/37" puisqu'il est matériellement impossible d'écrire un nom de ce nombre sous la forme d'un "nombre à virgule" : y passer sa vie n'y suffirait pas ! On retrouve ici ce sur quoi j'attirais l'attention au début de ces pages : **faire des mathématiques c'est, entre autres, utiliser des dénominations , des noms qui doivent pouvoir s'écrire**, et s'écrire d'une façon utilisable, opératoire, (on pourrait désigner ce nombre par une écriture telle que "6,972972...", assez spontanément inventée par certains élèves, le code étant que la séquence écrite deux fois se répète indéfiniment ; l'ennui est qu'une telle écriture est impraticable pour le calcul).

Il est assez remarquable de constater que la banalisation de l'usage des calculatrices a été suivie par l'apparition de l'expression "valeur exacte" dans un certain nombre d'énoncés. Par exemple on pose $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ et l'on demande, en 3ème ou 2nde, de comparer Φ^2 et $\Phi + 1$: le risque est grand de voir les élèves se précipiter sur leurs calculatrices et annoncer le "résultat" sans autre forme de procès, si l'on n'a pas pris la précaution de préciser qu'il s'agit de comparer les "valeurs exactes". Passe encore d'employer cette expression lorsqu'il s'agit d'une mesure (au sens mathématique, bien entendu, car une mesure exacte n'existe dans aucune science expérimentale), mais qu'est-ce donc que la valeur exacte d'un nombre ? ! Un nombre admet une infinité de dénominations, de désignations tout aussi "exactes" les unes que les autres...

Mais, au fait, **que signifie "comparer ϕ^2 et $\phi + 1$"** ? Que signifie "comparer deux noms de nombres" ? Il y a un hiatus au niveau du langage car lorsqu'on dit par exemple : "deux est inférieur à trois", on parle des nombres eux-mêmes : dire qu'un nom est inférieur à un autre nom n'a aucun sens! Les propriétés mathématiques sont des relations entre les **objets** mathématiques eux-mêmes. Et comparer un objet avec lui-même ne peut rien apprendre, à supposer que cela soit faisable !

D'une façon générale, comparer **truc et machin** signifie donc :

1) Déterminer si truc = machin. Si oui, il n'y a plus rien à faire puisqu'il n'y a qu'un **seul objet.**

2) Sinon, voir si l'on peut faire entrer les **deux objets** dans une certaine relation (ordre, incidence, etc.), suivant la nature des objets en question.

Au terme de cette réflexion, le concept d'égalité apparaît donc comme un concept charnière, médiateur : linguistique par vocation, mathématique par nécessité, puisqu'il n'y a pas de Mathématique sans langage (mathématique). Générateur de diversité pour les écritures et unificateur de leur sens, il est inhérent à toute activité mathématique : sa compréhension conditionne, en effet, aussi bien la reconnaissance des objets qui, en tant que tels, interviennent dans une situation, que la maîtrise de l'usage de leurs différentes dénominations.