CONTRAINTES DE FONCTIONNEMENT DES ENSEIGNANTS AU COLLÈGE : CE QUE NOUS APPREND L'ÉTUDE DE "CLASSES FAIBLES"[1]

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
Equipe DIDIREM, Université PARIS 7 Denis Diderot

Introduction

Le présent article s'appuie sur une partie de mon travail de thèse[2] qui portait sur l'enseignement des mathématiques dans des classes où beaucoup d'élèves rencontrent des difficultés scolaires. Précisons tout de suite que ce travail se situe essentiellement au niveau du diagnostic et de l'analyse et qu'il ne prétend pas apporter de solution. Les réflexions que je voudrais présenter ici concernent en fait l'enseignement des mathématiques dans n'importe quelle classe de collège. En effet, en se plaçant dans des conditions particulières de fonctionnement du système didactique, on peut observer avec un certain grossissement et par là mieux comprendre des phénomènes généraux d'enseignement qui, dans le cas de classes dites faibles, s'imbriquent et contribuent au non-apprentissage d'un certain nombre d'élèves, notamment d'une bonne partie de ceux qui sont issus d'un milieu socio-culturel défavorisé. C'est sur ces phénomènes généraux que je voudrais me centrer même si pour cela, je dois faire un détour par l'analyse des difficultés des élèves et dire un mot des observations sur lesquelles je m'appuie de façon à situer les conclusions dans le contexte du travail. Je commencerai par ce dernier point avant d'illustrer les difficultés des élèves à partir d'une étude de cas puis d'en rechercher une première interprétation. Je replacerai ensuite cette analyse par rapport à certains concepts de la théorie des situations didactiques avant de dégager des contraintes contradictoires qui pèsent sur la gestion de l'enseignement au collège.

I. Les observations sur lesquelles je m'appuie

Il me faut tout de suite préciser ce que j'entends ici par "classe faible". Ce sont des classes où la majorité des élèves ont déjà acquis au moins un an de retard scolaire, qu'elles aient été fabriquées intentionnellement (classe de niveau) ou qu'elles se soient constituées par hasard dans une école géographiquement défavorisée. Il ne s'agit donc pas de classes spéciales ni nécessairement de classes très difficiles où la possibilité même d'enseigner n'est pas toujours assurée.

---

[1] Cet article reprend un exposé fait au séminaire de formation en didactique de l'IUFM et de l'IREM de Reims.
[2] voir aussi l'article paru dans Recherches en didactique des mathématiques n°13/1.2.

«petit x» n° 35 pp. 5 à 40, 1993-1994

Voici, succinctement présentées en 3 étapes, les observations sur lesquelles s'est appuyée ma thèse et qui sont à l'origine de la présente réflexion.

Etape 1. Observations en classe dans une expérimentation de type ingénierie didactique : années 1983-1984 et 1984-1985. J'ai repris dans des classes de CM2 et de 6ème des ingénieries didactiques sur les décimaux et sur les aires qui avaient déjà été expérimentées[3] et qui avaient en quelque sorte "fait leurs preuves" avec l'idée que si l'on donnait aux élèves l'occasion de construire les notions enseignées avec suffisamment de sens, l'apprentissage se ferait.

J'ai arrêté l'expérimentation après deux ans pour recourir à d'autres moyens d'investigation. Certains résultats positifs ont été obtenus : les élèves de CM2 ont eu des résultats bien meilleurs à des tests sur fractions et décimaux que des élèves de 6ème de même recrutement social. Mais ces résultats positifs concernaient surtout l'une des classes de CM2 et l'ensemble de l'expérimentation me laissait insatisfaite. D'abord les élèves ne semblaient pas acquérir un savoir réutilisable : même si une situation didactique avait permis d'obtenir les résultats escomptés, les élèves ne pouvaient pas réinvestir les acquis dans une autre situation, quelques semaines plus tard. On avait le sentiment de repartir toujours de zéro. D'autre part, l'observation assez sommaire des classes m'a permis de repérer assez vite, surtout en sixième où j'ai arrêté la première forme d'expérimentation au bout d'un trimestre, un dysfonctionnement des ingénieries didactiques : les situations traitées en classe n'étaient souvent pas celles que je pensais prévues. La première année, j'attribuais les distorsions observées à une incompréhension des enseignants, due essentiellement à mes mauvaises explications, ainsi qu'à ma connaissance trop imprécise des difficultés des élèves. L'année suivante, j'ai fait des efforts d'explicitation en même temps que je prenais quelques mesures pour recueillir plus de productions écrites des élèves. Il s'est néanmoins avéré qu'il n'était pas facile de retrouver un équilibre en modifiant le fonctionnement habituel des classes.

J'ai alors opéré un changement de problématique qui a consisté d'une part à prendre ces distorsions comme objet d'étude et à chercher des raisons pour lesquelles les enseignants faisaient autre chose que ce qui semblait convenu entre nous, d'autre part à essayer d'analyser plus précisément les difficultés des élèves, tout en élargissant le champ de questionnement.

Etape 2. Questionnaires et entretiens informels auprès d'élèves et d'enseignants :

* auprès des élèves du CM2 en juin 1985 sur l'utilité de l'école et des mathématiques.

* auprès d'élèves-instituteurs inscrits à l'option "mathématiques" du DEUG 1er degré en 1985 sur leurs représentations des mathématiques, de l'enseignement des mathématiques et leur vécu en mathématiques.

* auprès de professeurs de 4ème fréquentant un stage de l'IREM, sur leurs pratiques à propos de l'enseignement des réels et rationnels, en mai 1985.

---

[3] voir par exemple Brochure 62 de l'IREM Paris 7 sur les décimaux, articles dans Petit x n°6 et n°8 sur les aires.

* auprès de professeurs de collège sur la place faite à la graduation d'une demi-droite dans leur pratique de l'enseignement des nombres, en mai 1986.

* Discussion dans un stage en octobre 1987 sur la base d'un questionnaire portant sur les pratiques de classe et les représentations des mathématiques.

* Observation d'un élève de CM1 en travail individuel hors du système scolaire, entre septembre 1987 et mars 1988.

Cette étape transitoire m'a amenée à formuler des hypothèses sur certaines composantes des représentations des enseignants et des élèves et à élaborer les questionnaires de l'étape 3.

Etape 3. Questionnaires écrits et entretiens auprès d'élèves et d'enseignants et reprise d'une expérimentation :

* Questionnaire écrit à des élèves de CM1 et CM2 de milieu social contrasté, portant à la fois sur les représentations des mathématiques et la résolution d'exercices (en mars 1988).

* Entretiens individuels avec des élèves de CE1 comportant également un questionnaire général et la résolution d'exercices (en juin 1988).

* Reprise d'une expérimentation en 6ème et entretiens avec les élèves à deux reprises (septembre 1988, février 1989).

* Entretiens avec 4 instituteurs et 4 professeurs de collège entre juin 1989 et juin 1990 (enseignants des classes expérimentées ou animateurs IREM).

* Observation d'élèves volontaires de 6ème en travail individuel ou en petits groupes hors de la classe dans des séances de soutien en 1989-1990.

C'est la répétition de phénomènes observés dans les premières expérimentations, aussi bien du côté des élèves que des enseignants, qui m'a amenée à rechercher des explications théoriques et à examiner la question en termes de régularités et de contraintes.

II. Illustration des difficultés des élèves à partir d'une étude de cas

J'ai été frappée par ***l'irrégularité des performances*** de l'élève de CM1 que j'ai observé en privé pendant 6 mois et que nous appellerons Didier. Il peut réussir un exercice qu'il ne réussit plus en fin de séance ou quelques jours plus tard. On pourrait résumer la description en disant que Didier a des *connaissances à la fois floues et rigides, sans véritable organisation :*

* floues parce qu'il est rarement sûr de lui "je vais essayer ça", "j'ai dit au hasard'...

* rigides parce qu'il a beaucoup de mal à changer de point de vue, de stratégie et qu'il ne peut pas saisir les indications qu'on lui donne : les informations qui ne rentrent pas dans sa procédure le déstabilisent et il commence à dire n'importe quoi.

Un autre fait caractéristique est justement cette ***facilité à perdre le fil*** dès qu'on lui pose une question ou même dès qu'il doit lui-même s'interrompre pour rechercher le résultat d'un calcul ou pour vérifier quelque chose. Cela explique sans doute sa *réticence à s'engager dans un processus long pour résoudre un problème dont* *il ne voit pas comment trouver la solution en une ou deux opérations*. Par exemple, il peut faire des additions répétées pour trouver la solution d'une division quand les nombres sont simples et qu'il peut trouver tout de suite le résultat mais il ne peut pas engager un processus à partir de cette méthode quand les nombres sont plus compliqués. En même temps, ce refus des processus longs a pour conséquence un manque d'entraînement à l'organisation et à la mémorisation de résultats intermédiaires en cours de résolution. On a ainsi une sorte de cercle vicieux : en refusant les processus longs, il n'apprend pas à s'organiser, ce qui fait qu'il perd très facilement le fil de ce qu'il est en train de chercher, et qu'il est incapable de mener à bien des processus longs.

Par ailleurs, Didier est un enfant qui ***recherche les algorithmes,*** plus sécurisants et moins fatigants. On peut voir cela comme une conséquence du point précédent : il a de cette façon un moyen d'avoir une réponse rapide qui ne demande pas de s'organiser et de réfléchir.

De plus - surtout peut-être - les algorithmes le libèrent de la responsabilité de ce qu'il avance. En effet, d'après les réflexions qu'il fait à plusieurs reprises sur ce que dit la maîtresse, on peut penser qu'*il redoute de prendre la responsabilité de ses connaissances et préfère se référer à une autorité* : "la maîtresse dit de faire comme ça". Remarquons cependant que les allusions à ce que dit la maîtresse sont peut-être aussi un moyen de me faire savoir ce qu'il est légitime de faire en classe, qui n'est peut-être pas identique à ce qu'il est légitime de faire avec moi.

A travers ce qu'il en dit, on peut penser que Didier perçoit le discours de la maîtresse comme une *suite de recommandations et de règles sur la conduite à tenir*. Son rôle à lui, même s'il n'arrive pas toujours à bien le remplir, est d'écouter et de faire ce que dit la maîtresse. C'est sans doute d'ailleurs le cas de beaucoup d'élèves du même âge qui ne sont pas nécessairement en situation d'échec. Ce n'est donc pas le seul fait de se référer au discours de la maîtresse qui nous paraît caractéristique mais de le faire *en guise de justification*.

Donnons quelques exemples d'extraits de protocoles :

1. Il reconnaît une situation multiplicative, mais il ne s'inquiète pas de savoir si 978 représente des chocolats ou des boîtes ou plutôt, il évite de s'en inquiéter pour pouvoir donner rapidement une réponse au problème. Il tord éventuellement le texte du problème et le lit de façon qu'il relève du modèle qu'il a reconnu :

M. On va faire un problème. Un patissier fait des chocolats qu'il met dans des boîtes de 20. Le patissier a fabriqué 978 chocolats. Combien remplit-il de boîtes ?
D. J'ai trouvé ce qu'il faut faire. Une multiplication, 978 × 20
M. Pourquoi ?
D. Il y a plusieurs boîtes... C'étaient 978 boîtes ou 978 chocolats?
M. 978 chocolats
D. Parce qu'il y a plusieurs chocolats
M. Oui, il y en a 978, ça fait plusieurs et alors ? Quelle est la question que je t'ai posée ?
D. Combien de chocolats ?
M. Non, puisque je t'ai dit combien il y avait de chocolats
D. De boîtes !

2. Recherche d'une règle de calcul.

Il a 9 ans, sa sœur a 2 ans.

Je lui demande quel âge aura sa soeur quand il aura 18 ans, puis quand il aura 35 ans. Il a sans doute une procédure correcte au départ : de 9 pour aller à 18, il reconnaît un double, 9+9 = 18. Mais, c'est de là qu'il repart, de la technique utilisée et non de la question qu'il se posait, ce qui a peut-être été favorisé par le nombre choisi : 35, c'est presque 18+18 comme 18 était 9+9.

D. 9 ans .... ah non, 11 ans. Je l'ai fait de tête, j'avais déjà les 2 dans la tête, et j'ai compté jusqu'à 18 combien il y avait, et j'ai coupé à la moitié et j'ai rajouté les 2, donc elle aura 11.
M. Parce qu'il va se passer combien d'années jusqu'à tes 18 ans ?
D. 9 ans.
M. Quand tu auras 35 ans, elle aura quel âge ?
D. A partir de 11 ans ?
M. Non, quand toi , tu auras 35 ans elle aura quel âge ?
D. Elle aura 25 ans ... non ....
M. Comment on pourrait savoir ?
D. 23 ans, elle aura
M. Comment tu sais ?
D. Parce que j'ai fait .... j'ai partagé 35, ça a fait 25, alors j'ai enlevé 2, ça a fait 23.
...
M. Et pourquoi 25, je t'ai dit 35 !
D. Ben, justement, ça va être la moitié, je vous dis.
M. Et pourquoi il faudrait faire la moitié ?
D. Et après on fait plus 2
M. Et pourquoi la moitié ? Je ne comprends pas
D. Ici j'ai fait la moitié regardez.
M. Ah oui, mais, pourquoi la moité, 18 c'était le double de 9.
D. C'est dur cette fois-ci
M. Si c'est dur, tu peux peut-être chercher des intermédiaires
D. Comment, je ne comprends pas
M. Tu ne vas pas passer directement de 18 ans à 35 ans.
D. Ah non, sûrement pas
M. Il va peut être y avoir des intermédiaires plus faciles à calculer
D. Bon, disons que j'en ai 18. 18 et 18, ça fait combien au fait ... 32 ? non ... 36 ! j'enlève un, ça fait 35, alors si je veux faire la même chose, il faut que ça donne 25, vous comprenez.

3. Didier nous montre une partie de ses difficultés en résolution de problèmes à travers l'énoncé qu'il propose lui-même le 12 mars. "j'ai 36 billes, je veux les mettre dans 20 sacs, combien m'en restera-t-il ?" D'une part il manque une donnée : le nombre de billes par sac, d'autre part, il semble que l'absence d'aisance en calcul mental empêche Didier de faire des prévisions. Au départ, Didier pensait peut-être mettre une bille par sac[4] ou 20 billes dans un sac et faire une soustraction, mais il ne semble pas avoir d'idée très précise sur l'influence du nombre de billes par sac puisque, quand je lui demande comment il met les billes dans les sacs, il répond "une par une par exemple ou bien 4 par 4". Il dessine 20 boîtes et écrit 4 sur chacune et ne prévoit pas encore tout de suite que les 36 billes ne suffiront pas.

Il semble qu'on ait là une contradiction entre une logique concrète où on dispose de données un peu anarchiques : on peut bien avoir n'importe quel nombre de billes et n'importe quel nombre de boîtes et quand même ranger les billes dans des boîtes, et une logique de problème scolaire de mathématiques où il faut que les données soient

---

[4] C'est sans doute ce qu'il prévoyait puisqu'il paraît très content un peu plus tard quand je lui pose la question "si tu as 36 billes et 20 boîtes et que tu mets déjà une bille dans chaque boîte, qu'est-ce qui va se passer ?" D. "Ca y est, j'ai trouvé, je crois savoir combien il va lui en rester ! 16 !". Il répond là exactement dans les termes où il avait posé la question au départ, c'est la réponse à son problème.

telles qu'on puisse résoudre le problème avec les opérations dont on dispose, et où il faut donc anticiper la solution pour choisir les données. Didier sait bien que 20 boîtes contenant chacune 4 billes font 80 billes, encore qu'il ne soit pas si sûr de lui —"je vais essayer une multiplication" dit-il— mais il n'a pas pensé qu'il fallait faire cela avant de choisir le nombre de billes.

On reprend son problème avec une autre valeur : 340 billes.

D. Je prends 2 chiffres au dividende. En 34 combien de fois 20 ? je connais pas la table de 20, alors je calcule qu'est ce qui se rapproche le plus de 3 dans la table de 2, c'est 1, ça fait 20, il reste 14, j'abaisse mon zéro et ce qui se rapproche le plus de 14 dans la table de 2 c'est 7, il reste 0.
M. Conclusion ? Tu peux répondre au problème ?
D. Il reste
M. Quelle était la question ?
D. Avec 20 boîtes, est ce que j'aurai assez de billes pour mettre 340 billes ?
M. C'était pas ça la question. 340 c'est quoi ?
D. Des billes
M. et 20 ?
D. Des boîtes
M. Qu'est-ce que tu faisais ?
D. Je rangeais des billes dans des boîtes.
M. Oui, et quelle était la question ?
D. Est ce que j'aurai assez, non ce n'était pas ça. Combien me restera-t-il?
M. Mais 17, c'est la réponse à quelle question ? que représente 17 dans ton problème ?
D. Il représente ce que ça donne, le résultat.
M. De quoi ?
D. Ben de ma division
M. Mais qu'est ce que ça veut dire dans ton problème ... si je te demandais de faire encore un dessin (D. en même temps : j'ai trouvé). Fais un dessin qui représente ton problème.
Il dessine 17 billes qu'il partage en 2 paquets.
M. Où est 340 ?
D. là, les paquets c'est les 340.
M. Je ne comprends plus. Tu avais 340 billes
D. Que je range dans des boîtes de 20
M. Dans des boîtes de 20 ou dans 20 boîtes ?
D. Dans 20 boîtes
M. Tu avais fait tout à l'heure un dessin
D. Oui, mais ça va être embêtant.
M. Dessine tes 20 boîtes. (Il le fait). Et alors qu'est ce que c'est 17 ? ... Tu as 20 boîtes et 340 billes. Je vois les boîtes mais je ne vois pas les billes.
D. Voyons, combien j'en ai ? 17
M. Qu'est ce que c'est 17 ? Des billes ou des boîtes ?
D. Ce qui restera en trop ..... Bien sûr tout à l'heure il en restait 16 et 12.
M. Il en restait 16 et 12 ? (........)
M. Tu as donc 17 billes dans chaque boîte, écris-le.
D. Je ne vais pas écrire 17 partout
M. Ecris 17 dans chaque boîte, enfin quelques fois, et quand tu en as marre, tu t'arrêtes.
Il en écrit 5 et s'arrête
D. Voilà ça fait 340 billes.

L'ensemble de ces caractéristiques se rencontre souvent chez des enfants en difficulté à l'école. Il me semble qu'elles rendent *difficiles la dévolution*[5] *aux élèves d'un problème un peu complexe et la mise en place de jeux de cadres*[6] parce que ces

---

[5] Nous reviendrons sur cette notion au § IV. Disons pour le moment que la dévolution est ce par quoi l'enseignant va faire accepter par l'élève d'engager sa responsabilité dans la résolution d'un problème. Voir Brousseau R.D.M. 7.2.

[6] Pour donner à l'élève les moyens de créer de nouveaux outils, l'enseignant peut choisir un problème qui se traduit dans plusieurs domaines mathématiques (ex : géométrie, numérique) entre lesquels les

élèves acceptent difficilement de se lancer dans une procédure coûteuse et peu sûre, d'autant plus que le maître, lui, connaît la solution !

Cependant, au cours de mes observations ultérieures, j'ai pu rencontrer aussi un autre type d'élève en difficulté, un peu opposé : c'est ***l'élève qui ne peut accepter des règles ou des algorithmes qu'il ne comprend pas.*** Par exemple, dans des observations d'élèves de 6ème, j'ai vu des enfants qui ne pouvaient accepter la multiplication pour traiter une situation de proportionnalité dans le cas où ils avaient affaire à des nombres décimaux. Et, en effet, si on n'a compris la proportionnalité que dans le cas de quantités discrètes où l'on peut penser en termes d'addition répétées, il y a fort à faire pour passer aux quantités continues et à la multiplication sur les décimaux.

Par exemple, une élève de 6ème est venue me voir parce qu'elle ne comprenait pas la correction d'un exercice où il s'agissait de trouver le prix d'un rôti de porc de 1,35 kg à 46 F le kg. Elle savait qu'elle paierait entre 46 et 92 F mais ne savait comment faire et ne voyait surtout pas pourquoi il fallait multiplier comme elle l'avait vu à la correction. Elle pouvait parfaitement utiliser la proportionnalité sous forme d'isomorphisme sur les entiers et trouver, quand je le lui ai suggéré, le prix de 500g puis de 100g de rôti. Avec cette aide, elle pouvait même trouver le prix de 1,35 kg en faisant $46 + 3 \times 4{,}60 + 2{,}30$. Mais elle ne voyait toujours pas le rapport avec $1{,}35 \times 46$ qui donnait bien le même résultat, comme elle l'a constaté en effectuant la multiplication. Pour élucider cette coïncidence, il a fallu voir d'abord que $3 \times 4{,}60 = 0{,}3 \times 46$ et que $2{,}30 = 0{,}5 \times 4{,}60 = 0{,}05 \times 46$, et encore que $46 \times 1{,}35 = 46 \times 1 + 46 \times 0{,}3 + 46 \times 0{,}05$. Ce raisonnement n'est pas disponible chez la plupart des élèves de 6ème qui doivent faire un "acte de foi" pour passer au modèle multiplicatif dans le cas où le multiplicateur est un nombre décimal, sans qu'on leur dise en général qu'il y a effectivement quelque chose de non évident à admettre.

Les élèves qui sont dans ce cas ont au contraire tendance à éviter les algorithmes. Leur attitude paraît plus positive, mais ils risquent aussi de se dire rapidement qu'ils ne comprennent rien en mathématiques parce qu'ils ne comprennent pas tout, puis qu'il ne faut pas chercher à comprendre et cela peut enfin les amener au comportement précédent où on recherche l'algorithme à appliquer.

L'évitement des techniques dont on n'est pas très sûr peut parfois aller assez loin. J'ai ainsi observé un élève qui utilisait des processus très complexes et très longs mais n'exigeant que des techniques rudimentaires, ce qui demandait en revanche des prouesses de mémorisation, pour éviter de mettre en œuvre des techniques plus performantes mais d'acquisition plus récente. Pour ce type d'élèves, il semble que le problème ne se situe pas au niveau de la dévolution mais plutôt à celui de *l'institutionnalisation*[7]*, qui suppose l'acceptation de renoncer à des méthodes qu'ils connaissent bien pour en essayer de nouvelles qu'ils ne maîtrisent pas encore.*

---

connaissances des élèves ne permettent pas une correspondance parfaite. Le déséquilibre ainsi produit et le désir de rééquilibration pousse les élèves à créer des outils améliorant la correspondance entre les cadres. Voir Douady, R.D.M. 7.2.

[7] Nous reviendrons sur cette notion au § IV Disons pour le moment que l'institutionnalisation est ce par quoi l'enseignant va donner un statut aux connaissances produites ou utilisées dans les activités de la classe.

III. Bilan des difficultés des élèves et interprétation

III.1. Un point crucial : capitalisation du savoir et réinvestissement

Le point qui paraît crucial au niveau des difficultés de beaucoup d'élèves sur le plan de la classe de mathématiques est le manque de capitalisation et la difficulté de réinvestissement des connaissances. C'est dans ce domaine que les différences les plus grandes apparaissent. En effet, sur les contenus, les difficultés rencontrées par les élèves de ces classes faibles ne sont pas vraiment spécifiques : on retrouve les conceptions erronées déjà répertoriées, même si elles sont plus résistantes. Ce qui paraît le plus caractéristique et source de nouvelles difficultés, c'est qu'il y a souvent, chez les enfants en difficulté beaucoup plus massivement que chez les autres, *un divorce net entre les situations d'action visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître.* Au cours de l'action, dans les premières situations qui tendent à aborder une notion nouvelle, pourvu que le problème permette réellement l'investissement des élèves, on ne voit pas beaucoup de différences dans les procédures que mettent en place les élèves de classes de niveaux différents. En revanche la différence s'accentue très vite dès qu'il s'agit de réutiliser les connaissances introduites à cette occasion.

Cette absence apparente de différence au moment de l'action peut sembler paradoxale compte-tenu des différences observées dans la capitalisation des connaissances. Cependant il faut remarquer qu'au niveau considéré (CM2 et 6ème), les situations d'action utilisées pour introduire un concept nouveau, notamment celles observées au cours de l'expérimentation, permettent souvent de développer des procédures pertinentes en ne nécessitant que des connaissances mathématiques très élémentaires. De plus, la contextualisation choisie laisse généralement une grande place à la manipulation qui permet d'utiliser des connaissances générales liées au contexte. Mais, si on propose une autre situation où il serait pertinent d'utiliser la connaissance nouvelle, les élèves repartent de zéro ou on constate des dérapages dans l'utilisation de la connaissance nouvelle. Il est probable que, pour des niveaux plus élevés, des différences se manifesteraient dès la phase d'action si des outils de base indispensables à l'action, comme par exemple le calcul algébrique, n'étaient pas disponibles.

Par exemple, pour l'introduction des fractions, nous avons utilisé à de nombreuses reprises la situation "segment" qui consiste à demander aux élèves de dessiner un segment arbitraire sur une feuille de papier puis d'envoyer un message à un récepteur qui doit dessiner un segment de même longueur. Les élèves ne peuvent utiliser la règle graduée mais émetteur et récepteur disposent de bandes de papier de même longueur. Cette situation amène toujours les élèves à subdiviser l'unité par pliages en deux successifs pour évaluer la partie qui dépasse un nombre entier de reports, mais dès qu'on passe à l'écriture formelle des fractions, il y a pour certains élèves un dérapage, ils passent à des modèles numériques erronés pour simplifier ou ajouter les fractions (par exemple $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$). Il semble que l'objet mathématique n'ait plus aucun rapport pour eux avec la situation (ou les situations) d'action qui lui a (ont) donné sens et que ces élèves ne paraissent pas pouvoir utiliser comme référence. Ainsi, tout se passe comme si *le savoir institutionnalisé par le maître et décontextualisé était situé dans un registre étanche par rapport aux connaissances utilisées dans la situation d'action.* Ceci fait que, même dans le cas où il est mémorisé, le savoir ne peut fonctionner que dans le registre formel, par exemple numérique pour les fractions, sans que la situation d'introduction puisse servir de contrôle, et il ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Ce que les élèves retiennent, c'est ce qui sort directement de l'institutionnalisation. Ils le répètent tel quel, comme $n \times \frac{1}{n} = 1$, mais ne l'utilisent pas pour trouver d'autres résultats comme $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, les règles et les codages qu'ils retiennent ne sont pas précis ; par exemple ils confondent $\frac{171}{2}$ et 171,2. Un autre exemple d'une prise en compte partielle du sens s'observe souvent à propos de la division. Certains élèves ne voient pas la différence entre a : b et b : a. Ils reconnaissent une situation de division et proposent par exemple de faire a : b alors qu'il faudrait faire b : a. Quand, après une demi-heure de travail, on arrive enfin à la bonne méthode, l'élève proteste en disant "je l'avais dit depuis le début !" Il semble que savoir qu'on fait une division leur suffise. Peut-être pensent-ils qu'on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit, ou que la division est commutative comme la multiplication et l'addition.

III.2. Des interprétations possibles côté élèves

Une des principales explications que j'avance est que les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de difficulté ont en quelque sorte *un projet, le plus souvent implicite, de décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action.* Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser l'expérience acquise et ils cherchent à comprendre ce que la démarche qu'ils mettent au point sur un problème particulier a de généralisable. Ils se créent des *représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions,* ce qui leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée. Pour d'autres enfants, cela ne se fait pas parce qu'ils ne font que résoudre le problème posé, dans les termes où il est posé, sans avoir de projet de connaissance. Il n'y a pas création de *représentations mentales qui ont déjà valeur symbolique et sur lesquelles on pourra travailler ensuite, à l'occasion d'autres situations.* Ceci contribue à expliquer l'absence, chez ces élèves, de possibilité de réutiliser en les adaptant des outils forgés pour résoudre un problème. D'ailleurs, sur l'exemple de la situation "segment", le dérapage formel se produit pour certains élèves dès le bilan qui suit la phase d'action quand l'enseignant demande si on peut imaginer d'autres pliages et d'autres écritures : des enfants affirment à ce moment là que $\frac{1}{6}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

Ces représentations mentales intermédiaires entre l'action et la formulation, permettent sans doute aux élèves de *libérer de la place en mémoire de travail* puisqu'ils ne sont pas obligés de se remémorer tous les détails d'une situation ni de la traiter à nouveau pour retrouver le sens contextualisé d'une connaissance.

De plus, et c'est sans doute lié à l'absence de première décontextualisation au cours même de l'action, il n'y a pas, pour certains élèves, de mises en relation, *d'"accrochage" à l'ancien pour le renforcer ou le remettre en question.* Inversement, le fait de ne pas confronter les expériences nouvelles aux connaissances anciennes contribue en retour à l'absence de représentation mentale de niveau intermédiaire et à l'étanchéité des registres. Les expériences semblent se juxtaposer sans qu'il y ait chez ces élèves, d'interaction entre l'ancien et le nouveau. Chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, *seul le contexte est reconnu :* "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles"... Ce phénomène est sans doute lié à l'*absence de connaissances antérieures solides et bien organisées auxquelles se référer,* et contribue à son tour au manque d'organisation et d'intégration des savoirs nouveaux. C'est ainsi que s'installe *un processus cumulatif*: les connaissances antérieures, non activées, n'ont pas l'occasion de se stabiliser, les connaissances nouvelles ne peuvent pas s'ancrer et ont à leur tour peu de chances d'être retenues, et l'élève ne pourra pas faire confiance à ce qu'il sait.

Le manque de fiabilité des connaissances anciennes explique sans doute aussi en partie la *non reconnaissance du véritable enjeu* des situations proposées en classe, l'absence d'identification de l'objet du travail proposé par l'enseignant ce qui empêche aussi l'apprentissage : par exemple, si l'enseignant demande des découpages de rectangles pour travailler sur les fractions alors que, pour l'élève, il s'agit d'apprendre à partager les rectangles, celui-ci ne fait pas de lien entre cette activité et le pliage de bandes de papier. Les fractions utilisées dans les deux contextes n'ont pas de rapport entre elles, les élèves n'ont donc pas de raison de rechercher une cohérence.

La non-reconnaissance de l'enjeu d'enseignement a aussi pour conséquence *l'usure rapide des situations* : les élèves qui identifient la situation à son contexte se lassent avant qu'on puisse avoir une décontextualisation locale suffisante pour un réinvestissement ultérieur des connaissances mises en œuvre dans une situation.

D'autres difficultés se rattachent au plan cognitif ou aux exigences du "métier d'élève". Nous les examinons maintenant.

III.3. Autres difficultés liées au plan cognitif

* *Difficulté à changer de point de vue*

Sur le plan cognitif, il faut ajouter la difficuté à changer de point de vue. Elle se manifeste par exemple lors d'un changement d'activité : des élèves restent sur une consigne précédente ou continuent à utiliser les procédures qui convenaient pour l'activité précédente. De plus, certains élèves ont du mal à tenir compte de deux relations en même temps. Une notion abordée dans un contexte est difficile à réutiliser dans un autre contexte. Cela rend aussi plus difficiles les changements de cadre. La difficulté à changer de cadres n'est pas spécifique : elle nécessite un apprentissage pour tous les élèves et le changement de cadres[8] est le plus souvent à la charge de l'enseignant. Mais l'utilisation de jeux de cadres est d'autant plus difficile pour certains élèves qu'ils ont des connaissances très peu mobilisables dans un des cadres

[8] voir note 5

en jeu. Or ces classes faibles sont en général hétérogènes et les élèves n'ont pas toujours les difficultés les plus profondes dans le même domaine. Par exemple un des élèves de la classe de 6ème de 89-90 réussit très bien dans le domaine géométrique mais a beaucoup de difficultés avec les nombres, il résiste à traduire les problèmes dans le cadre numérique ; pour un autre élève, c'est exactement le contraire. Dans les deux cas, les jeux de cadres entre le numérique et le géométrique sont difficiles mais pour des raisons différentes.

* *Rapport avec le réel*

Les problèmes liés à la modélisation consistuent une difficulté qui ne concerne pas seulement la population plus spécialement étudiée ici mais qui est plutôt spécifique des mathématiques pour les niveaux élémentaires (dans les niveaux plus élevés, elle est plutôt à la charge de la physique). La modélisation demande de gérer les *rapports des mathématiques avec la réalité, du raisonnement mathématique avec la logique du quotidien.*

D'une part, il est important que les élèves aient l'occasion d'utiliser leurs connaissances en mathématiques pour traiter des problèmes concrets ou de se poser des questions d'ordre mathématique à partir de questions issues de la réalité. Cependant ces problèmes demandent à la fois de mettre en relation des connaissances mathématiques avec d'autres qui relèvent d'autres domaines et de trier entre ce qui est pris en compte dans le modèle et ce qui n'est pas pris en compte : on ne demande pas à un modèle de décrire complètement la réalité mais de permettre de prévoir de façon satisfaisante. Par exemple, il est clair que la proportionnalité ne modélise que les courses (à pied) qui se déroulent à vitesse constante et que ce n'est le cas d'aucune course réelle, mais ce modèle permet de prévoir de façon raisonnable le temps qu'on mettrait sur une distance pas trop différente de celle sur laquelle on a couru.

Le fait de travailler sur des situations concrètes nécessite aussi de distinguer ce qui relève de la logique mathématique et de la logique du quotidien qui ne coïncident pas toujours. Cette difficulté existe pour tous les élèves mais les rapports que ceux-ci entretiennent avec les mathématiques, l'école et le savoir en général, leur facilitent plus ou moins cette distinction. Il faut en effet remarquer que les élèves sont très inégalement confrontés à une autre logique dans leurs activités extrascolaires, suivant leur pratique de certains jeux, en particulier jeux pratiqués avec des adultes qui les amènent à apprendre à faire des raisonnements sous hypothèse ou à utiliser des catégories de classement (jeux de stratégie ou jeux de devinette dans un domaine à sérier par exemple).

De plus, on a tendance à avoir davantage recours aux problèmes concrets qui s'appuient sur la réalité quotidienne dans le cas d'élèves en difficulté, et il peut parfois s'installer de ce fait un véritable malentendu et une communication absurde entre le professeur et certains élèves, l'un se plaçant dans la logique mathématique, l'autre dans la logique du quotidien. Ainsi, un élève de 6ème que j'observais en travail individuel avait à résoudre le problème suivant : "Des cahiers sont vendus 4,60 F à l'unité ou par lots de 5 cahiers à 18 F le lot. Un professeur a besoin de 114 cahiers pour les élèves de ses classes. Que doit-il acheter pour payer le moins cher possible ? Combien paiera-t-il ?". Avec une calculatrice, sans pouvoir formuler ce qu'il cherche à chaque étape, il fait la suite d'opérations suivantes : 114 : 5 = 22,8 × 18 = 410,4 et écrit 410,4 sur sa feuille. Je lui fais remarquer qu'on ne peut prendre que des lots entiers. Il fait alors 23 × 18 = 414. Je lui demande si on ne peut pas payer moins cher en prenant des cahiers à l'unité. Il me répond que 23 × 5 = 115 et que le professeur gardera le dernier cahier pour lui. Il refuse d'envisager toute autre solution. J'ai pu voir qu'il comprenait le problème et pouvait le résoudre parce que je l'ai observé individuellement. A travers ses productions, on aurait pu penser qu'il ne comprenait pas le problème ou qu'il ne savait pas le traiter. Ainsi on sous-évalue parfois la compréhension de ces élèves parce qu'ils rencontrent aussi beaucoup de problèmes d'expression. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Cela ne veut pas dire que la logique du quotidien ne peut pas être ou même ne doit pas être un point de départ, mais il y aura parfois des oppositions entre les deux ce qui amènera la nécessité de distinguer ce qu'on peut dire en se servant des mathématiques et ce qu'on dirait ou ferait dans la vie. Cela demande de bâtir des situations qui s'appuient sur la réalité familière et permettent de la dépasser en posant aux enfants de véritables problèmes théoriques.

* *Sur le plan du langage*

Dans les problèmes liés au langage, il faut en distinguer au moins de deux ordres. Ceux qui sont propres au langage mathématique lui-même interviennent bien sûr dans les difficultés des élèves observés, mais ils ne sont pas spécifiques de cette population. Aussi laissons-nous de côté ces problèmes que vont devoir surmonter tous les élèves et qui ont déjà fait l'objet de plusieurs recherches, par exemple la thèse de Colette Laborde (Laborde 1982). En revanche, les problèmes plus généraux liés à la maîtrise du français sont souvent importants chez les élèves que j'ai observés. Ils contribuent d'ailleurs à accroître les difficultés propres au langage mathématique et ont des répercussions à plusieurs niveaux :

a) Ils interviennent à l'écrit dans la compréhension des énoncés, par une difficulté à structurer les données par exemple, et aussi dans la formulation des résultats. Ce niveau externe est en relation avec la réussite. Les problèmes de langage s'ajoutent aux difficultés conceptuelles dans les situations complexes. Ainsi, les élèves en difficulté observés retiennent rarement toute l'information contenue dans un énoncé de mathématiques non redondant, notamment la plupart d'entre eux n'arrivent que très difficilement à prendre en compte plusieurs conditions simultanées. Une des difficultés dans la compréhension des énoncés tient aussi à la non reconnaissance de la portée de l'énoncé et de ses éléments, en particulier en ce qui concerne la généralité : quel énoncé est général, quel énoncé est contextualisé, quels sont les éléments de l'énoncé qui sont quantifiés universellement, quels sont ceux qui sont liés au contexte ?

Les difficultés langagières se traduisent aussi dans l'expression, la formulation de résultats ou de questions, ce qui amène d'ailleurs souvent une sous-réussite par rapport aux connaissances réelles de ces élèves.

b) Le maniement du français intervient aussi (avec d'autres facteurs) dans l'interprétation de ce qui se fait en classe. Dans le déroulement de l'enseignement, en effet, le maître utilise plusieurs niveaux de discours qui sont souvent assez imbriqués et que l'élève doit réussir à décoder avec leur signification dans la situation. Dans une même période de discours du maître, il y a souvent passage d'un type de discours à un autre. Les élèves doivent être capables de repérer ces changements de niveau pour tirer profit du discours non mathématique du maître, ce qu'on pourrait appeler le discours périmathématique, pour s'approprier plus facilement le discours mathématique du maître et éventuellement des autres élèves.

c) Les difficultés langagières ont sans doute aussi des répercussions à un niveau plus fondamental, dans le développement du langage intérieur au sens de Vygotsky (1985) et de la pensée. Il est certain que les difficultés dues à la langue ne se réduisent pas à la maîtrise du français puisqu'il y a des enfants étrangers qui le maîtrisent très mal et qui ne rencontrent pas de problème de conceptualisation en mathématiques même s'ils sont gênés au niveau externe dont j'ai parlé. J'en ai eu deux exemples dans les classes de 6ème que j'ai observées.

L'imprécision du langage et l'absence d'habitude de se formuler à soi-même les questions et les procédures de résolution engagées pendant la recherche d'un problème contribuent sans doute à la difficulté de certains élèves à se créer les représentations mentales intermédiaires qui seraient des points d'appui de la conceptualisation. Le développement du langage en général et pour la conceptualisation en mathématiques est donc un point très important à considérer dans l'analyse des difficultés des élèves. D'ailleurs cette relation entre le français et les mathématiques est à considérer dans les deux sens. Il est probable que le développement du langage mathématique puisse aussi aider à la maîtrise du français. Cependant, c'est sur ce qui relève de la négociation du contrat didactique plutôt que sur la relation entre le langage et les difficultés en mathématiques que j'ai fait porter ma recherche. Les difficultés d'ordre cognitif que nous avons examinées sont en effet imbriquées avec des difficultés plus générales qui ont des répercussions sur la gestion de la classe.

III.4. Sur un plan plus général

Ainsi, l'enseignant rencontre dans ces classes faibles un certain nombre de **difficultés dans la gestion de la classe** qui sont dues au fait que beaucoup d'élèves en grande difficulté à l'école ont, à l'extérieur de l'école, des *problèmes d'ordre affectif* sur lesquels nous n'avons aucune prise. De plus, leur situation d'échec à l'école contribue à *leur donner d'eux-mêmes une image dévalorisée.* Cela peut avoir des répercussions sur l'acceptation de certaines formes de travail, notamment le travail en groupes, et rend difficile les phases de bilan collectif. La difficulté de communication avec ses pairs, liée au manque de socialisation, fait que des élèves faibles ont peur de ne pas pouvoir s'exprimer ou d'avoir le dessous dans un groupe, les décisions y étant souvent prises avec des arguments d'autorité. De plus, il peut être plus difficile d'accepter un savoir venant d'un autre élève : il est normal de ne pas trouver ce que le professeur trouve puisqu'il est censé savoir, il est beaucoup plus dévalorisant de ne pas trouver ou de ne pas comprendre ce qu'un autre élève a trouvé. Ces élèves ont besoin d'être toujours sécurisés et cherchent une relation privilégiée avec l'enseignant. Ils prennent la parole de façon intempestive et n'écoutent pas ce que disent les autres élèves, ce qui fait que, dans des classes faibles, beaucoup de temps se passe à régler des problèmes de discipline. Le temps de travail effectif est donc plus court et la pression du temps sur l'enseignant en est d'autant plus forte.

A cela, il faut ajouter des différences culturelles qui font que certains élèves ont une **vision du "métier d'élève"**, pour reprendre l'expression de Chevallard (1988), plus ou moins bien adaptée au système scolaire. L'enseignement tel qu'il se pratique en général suppose en effet l'adhésion tacite à un bon nombre de présupposés culturels, qui ne sont pas réellement partagés par tous les élèves. Ainsi, suivant leur milieu familial, les élèves auront ou non l'habitude d'argumenter sur des questions de principe (voir par exemple Lautrey, 1980), ils trouveront ou non naturel d'entendre une question qu'on leur pose et la réponse qu'ils ont à faire comme destinée à prouver qu'ils savent et non seulement pour donner une information qui manque à l'interlocuteur. C'est d'ailleurs une explication généralement retenue pour expliquer la différence de réussite à l'école suivant le milieu social d'origine (écart à la norme scolaire).

Cet écart par rapport aux attentes de l'enseignant risque d'être encore plus grand dans le cas d'un enseignement qui se place dans une perspective constructiviste. Pour qu'un élève ait un projet (implicite) d'apprentissage face à une résolution de problème, il est en effet nécessaire qu'il ait une conception de son travail compatible avec la naissance d'un tel projet : ce sera difficile s'il pense qu'un devoir est comme un travail matériel qui doit être fait pour n'être plus à faire et qu'ensuite on l'oublie pour passer à autre chose ou qu'un devoir est fait pour être jugé, témoin qu'on a ou qu'on n'a pas une connaissance qu'il faut alors acquérir en apprenant une leçon. Pour que l'on puisse faire dévolution à un élève d'un problème auquel il ne peut pas fournir de réponse immédiate, il faut qu'il accepte sa responsabilité dans la résolution de ce problème. Or il peut trouver illégitime qu'on lui propose un problème dont on ne lui a pas enseigné la réponse et refuser cette responsabilité. Il peut également considérer que c'est une perte de temps puisque le maître connaît la réponse et pourrait la lui enseigner.

Son **rapport à l'évaluation** peut aussi contribuer à la mise en route d'un cercle vicieux. D'une part, l'élève réclame que tout ce qu'il fait soit évalué parce que toute peine mérite salaire et qu'il ne veut pas travailler pour rien. D'autre part, il sait que l'évaluation sert à le juger, il pense donc que l'important est d'avoir de bonnes notes pour éviter des désagréments à l'école comme à la maison. Mais il lui est difficile d'avoir de bonnes notes en jouant le jeu de la connaissance, jeu dont il n'a peut-être même pas perçu l'existence, il se met alors à la recherche d'indices qui pourraient l'aider à deviner aux moindres frais ce qu'attend le maître. Comme il arrive (assez souvent, somme toute) que le professeur l'aide dans cette entreprise, il peut jusqu'à un certain point produire des réponses justes sans mettre en jeu de connaissances. L'absence d'apprentissage ne se révèle alors que plus tard, à un moment où il peut être plus difficile de redonner à l'élève des occasions d'apprentissage.

Par ailleurs, si l'élève attend de l'école qu'elle le prépare à avoir un métier, il recherche dans ce qu'on lui propose l'utilité par rapport à son projet et ne la trouve pas en général : les détours des carrières scolaires lui sont souvent inconnus. De plus, les enfants en difficulté à l'école ont souvent un projet social très modeste qui ne demande que peu d'études, les savoirs scolaires leur semblent particulièrement déconnectés des savoirs pratiques qui leur paraissent utiles.

IV. Une lecture didactique. Dévolution, institutionnalisation et dialectique outil-objet. Des points clés

La théorie des situations aussi bien que la dialectique outil-objet se situent dans une perspective constructiviste et font une place importante au processus de contextualisation et décontextualisation des connaissances considéré comme un des moteurs de la construction du sens des concepts mathématiques pour les élèves. Ainsi, G.Brousseau déclare-t-il (R.D.M. 7.2. 1987 p. 51) *"dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation "*. De même, dans la dialectique outil-objet (Douady, 1987), on suppose que les élèves vont s'engager dans la résolution de problèmes pour lesquels ils ne disposent pas encore explicitement des outils performants puisque c'est justement la connaissance visée qui est un outil adapté. Mais ils peuvent aborder ces problèmes et leur donner un sens, parce qu'ils peuvent au moins dire si une réponse proposée est ou non solution du problème.

Dans cette perspective, la dévolution - que Brousseau (1990, p.325) définit comme *l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert"* - est un processus nécessaire à l'intérieur de la situation didactique parce que l'élève n'a pas immédiatement accès à la situation a-didactique: *"La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective"* (R.D.M. 7.2. 1987 p. 50). La dévolution est une condition pour que l'élève fonctionne de façon scientifique et non en réponse à des indices extérieurs à la situation, d'ordre didactique notamment, condition nécessaire si on se place dans l'hypothèse où l'élève construit des connaissances nouvelles en réponse à des problèmes.

A partir de l'observation des élèves en difficulté, on peut se poser plusieurs questions à propos de la dévolution :

- en quoi consiste-t-elle exactement ? comment l'opérer ? comment sait-on qu'elle a réussi ?
- est-elle toujours possible ? quelles conditions doit-elle remplir ?
- si elle n'a pas pu avoir lieu pour certains élèves qui ont suivi les autres ou ont utilisé des indices didactiques, l'apprentissage visé dans la situation peut-il néanmoins se faire ? A quelles conditions ?

Au départ, pour Brousseau, il s'agit essentiellement de faire entrer les élèves dans un fonctionnement mathématique face au problème qu'on veut leur voir résoudre. Mais cela suppose déjà que l'élève est dans une logique d'apprentissage. Il écrit par exemple (R.D.M. 7.2., 1987)*"L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques"* .

Or mes observations sur les élèves en difficulté me laissent penser qu'il n'est pas sûr que les préalables sous-entendus ici soient remplis pour tous les élèves. Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet qu'il y a toujours un objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée. Ce n'est peut-être pas toujours le cas et, même dans le cas où l'élève s'attend à apprendre quelque chose, il peut y avoir méprise sur la nature de la connaissance visée (s'agit-il de savoir résoudre le problème posé ou d'acquérir une connaissance plus générale réutilisable dans d'autres problèmes, même très différents de celui-là ?). La question que je me pose est la suivante : qu'est-ce qui permet à l'élève de "converger vers" la situation a-didactique, qu'est-ce qui fait qu'il met en jeu un savoir mathématique en tentant de résoudre le problème posé par le maître ? quelle dévolution du problème est nécessaire, avant la résolution, pour que l'élève apprenne ? comment faire dévolution de la prise en charge par l'élève de son propre apprentissage (à un niveau général aussi bien qu'au niveau de chaque situation) ?

Une autre question est de savoir si, pour qu'il y ait apprentissage à partir d'une résolution de problème, il est nécessaire que la dévolution soit faite avant la résolution. Je pense pour ma part que *le processus de dévolution peut se poursuivre au-delà de l'action et même au delà de la situation a-didactique.* Je pense en effet qu'il y a, pour certains élèves qui, au cours de l'action, ont fonctionné de façon non scientifique, par exemple en utilisant des indices didactiques ou en s'en remettant à des camarades, une possibilité de "dévolution après coup" par un retour réflexif sur l'action, lors de l'institutionnalisation. Si cette possibilité n'existait pas, la situation serait effectivement désespérée pour certains élèves. La question est alors de savoir comment on peut donner à ces élèves une nouvelle occasion de donner du sens aux notions déjà institutionnalisées ou en cours d'institutionnalisation.

Ceci m'amène à considérer les liens entre dévolution et institutionnalisation. Les hypothèses dominantes actuellement sur l'apprentissage conduisent à demander aux enseignants de s'appuyer sur l'activité des élèves. Et on trouve d'ailleurs maintenant, dans les brochures IREM ou dans les manuels, des quantités d'activités à proposer aux élèves. Le schéma est grossièrement celui-ci : on propose au départ aux élèves un problème qui met en jeu la notion visée ou qui montre son intérêt. Les élèves mettent au point des procédures plus ou moins adaptées. L'enseignant dégage celles qui sont performantes, le nouvel outil qui était visé, qui est institutionnalisé à ce moment là et qu'on exigera ensuite, notamment dans le contrôle qui suivra. Dans ce schéma, l'institutionnalisation vient après la résolution du problème d'introduction, c'est le cours du professeur.

Or, nous avons dit qu'on constate chez certains élèves une rupture entre la situation d'action et l'institutionnalisation qui est faite par le professeur. Cela laisse penser d'une part que la dévolution ne s'est peut-être pas passée comme on l'espérait, d'autre part que l'institutionnalisation n'est peut-être pas suffisamment reliée au problème réellement traité par les élèves. D'abord, nous avons vu que les élèves ne savent peut-être pas qu'il y a autre chose à apprendre que la résolution d'un problème particulier. Est-ce qu'un discours sur l'enjeu de ce qu'on leur demande peut les aider ? A quel moment le tenir ? Faut-il pointer quelque chose à ce niveau avant la résolution ? après ? quelles interventions ? Ce sont toutes ces questions qu'examinent les recherches sur le "méta", c'est-à-dire le discours non strictement mathématique mais sur les mathématiques que tient l'enseignant en classe (voir Robert et Robinet 1993). La réponse de la théorie des situations (et de la dialectique outil-objet aussi) est plutôt de construire une situation telle que les variables permettent une évolution des connaissances mises en jeu par les élèves : un premier choix doit permettre la dévolution, d'autres permettront de construire le sens des concepts visés. Mais l'institutionnalisation étant le processus par lequel le maître va donner un statut officiel aux connaissances en jeu, n'est-ce pas déjà une première institutionnalisation que faire savoir aux élèves qu'il y aura quelque chose de général et réutilisable à apprendre de la résolution du problème particulier qu'il leur propose ?

Ces réflexions m'amènent à considérer aussi *l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours*. L'institutionnalisation des connaissances commence dès le tout début de la dévolution puisqu'il faut déjà que le maître donne à l'élève, s'il ne l'a pas, le projet d'acquérir ces connaissances, d'où *l'imbrication des processus de dévolution et d'institutionnalisation qui sont ainsi, dans une certaine mesure, contemporains*. Evidemment, nous trouvons là un des paradoxes du contrat didactique que Brousseau a mis en évidence : le maître ne peut pas parler de la connaissance nouvelle[9] puisque c'est justement l'enjeu de l'apprentissage, cependant il peut dire qu'on va apprendre quelque chose de nouveau et éclairer les élèves sur les connaissances anciennes à mobiliser pour "accrocher" cette connaissance nouvelle. En fait le maître tend à l'institutionnalisation tout au long du processus mais il ne peut dévoiler entièrement son projet sous peine de le faire échouer : s'il veut que l'institutionnalisation puisse se faire pour les élèves dans de bonnes conditions avec du sens, il ne peut aller droit au but mais l'a toujours présent à l'esprit pour ménager dès le départ et tout au long du processus d'enseignement les conditions qui vont lui permettre de négocier le contrat didactique dans ce sens. Dévolution et institutionnalisation sont ainsi les deux processus complémentaires par lesquels le maître va essayer de contrôler l'acquisition par les élèves des notions mathématiques avec leur sens : la dévolution pour qu'ils s'engagent réellement dans la résolution des problèmes, l'institutionnalisation pour que les élèves sachent dans ce qu'ils ont mis en jeu ce qui était visé et à retenir.

De plus, *la marge de manœuvre est très étroite, particulièrement dans le cas d'élèves en difficulté où l'équilibre à adopter lors de l'institutionnalisation n'est pas facile à trouver* : si, à l'issue d'une phase de recherche, il n'y a pas d'institutionnalisation, les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci, mais dès qu'il y a institutionnalisation, il y a risque de mise en place d'une règle qui va être utilisée sans référence au sens. On est alors devant la nécessité de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui peut alors détruire toute possibilité de référence à la situation dans la construction de la notion qu'on visait dans cette situation.

Je pense donc que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation - décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :

---

[9] Par "connaissance nouvelle", nous entendons ici aussi un approfondissement ou un nouvel emploi d'une connaissance ancienne.

- institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression dans la description de la dialectique outil-objet.
- réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes,
- cours construit par le professeur, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées par l'exposé des raisons du savoir.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique.

V. Les contraintes de fonctionnement des enseignants. Des pôles contradictoires

L'interprétation que nous avons donnée des difficultés des élèves, l'analyse que nous venons d'en faire en termes de dévolution et d'institutionnalisation nous conduisent à dégager des contraintes ressenties comme contradictoires par les enseignants, et qui sont particulièrement sensibles dans les classes faibles :

V.1. Quel équilibre entre la construction du sens et l'acquisition d'automatismes de base ?

Faut-il privilégier dans l'enseignement la construction par les élèves du sens des connaissances mathématiques ou l'acquisition de techniques et mécanismes de base ? Cette question est souvent vécue comme un dilemme par les enseignants des classes "faibles". Si tout le monde est convaincu de l'importance de la capitalisation de savoirs décontextualisés disponibles pour traiter des problèmes portant sur des contextes variés, les avis divergent sur la possibilité d'arriver à ce résultat pour tous les élèves et sur les moyens pour cela.

D'un côté, on n'est assuré que l'élève dispose d'un concept mathématique avec suffisamment de sens que s'il est capable de résoudre sans aide des problèmes assez complexes où ce concept est à l'œuvre puisque le fait de reconnaître qu'on peut utiliser un concept dans une situation fait partie du sens de ce concept. Pour arriver à ce résultat, il paraît nécessaire que l'élève ait eu au cours de l'apprentissage l'occasion de fonctionner de façon suffisamment "a-didactique" sur ce type de problèmes. D'ailleurs, l'hypothèse selon laquelle l'action de l'élève est importante pour l'acquisition des connaissances, est actuellement valorisée dans la noosphère comme le montrent les derniers programmes de collège où une large place est faite aux "activités" servant à introduire les notions mathématiques.

Cependant, comme nous avons pu le voir dans le cas de Didier, la résolution de problèmes complexes ne peut se concevoir qu'en s'appuyant sur des connaissances anciennes et des techniques assez solides, même si c'est pour les remettre en question.

La mise en place de jeux de cadres demande aussi un minimum de connaissances dans chacun des cadres en jeu.

De plus, les activités où une grande place est laissée à l'initiative des élèves sont grandes consommatrices de temps. Dans ces conditions, les enseignants estiment à un coût si élevé l'acquisition par tous les élèves des notions mathématiques avec suffisamment de sens, en même temps que l'acquisition des mécanismes de base, qu'ils ne croient pas pouvoir poursuivre les deux objectifs dans toutes les classes et se sentent contraints de faire un choix. Ils ne peuvent alors que donner la priorité à l'enseignement des mécanismes de base.

Cependant, le sens et le fonctionnement automatique des connaissances ne s'opposent pas nécessairement : il est même indispensable d'avoir un fonctionnement automatique sur certaines choses pour libérer de la place en mémoire de travail et travailler sur des objets nouveaux. Certaines connaissances sont appelées à avoir un jour un fonctionnement automatique chez les sujets, quand ils arrivent à un niveau suffisant d'expertise. Il en est ainsi notamment des algorithmes, du calcul algébrique... Mais avoir un fonctionnement automatique ne veut pas dire, pour l'expert, ne pas avoir de moyen de contrôle alors que pour l'élève en difficulté, on constate souvent un fonctionnement automatique sans moyen de contrôle.

Une question qui me paraît fondamentale quand on se préoccupe de l'enseignement aux élèves en difficulté est donc celle de l'équilibre entre les pôles apparemment contradictoires du sens et des automatismes. Et comme les questions de temps sont particulièrement importantes dans ce type de classe, il faut se demander si l'on peut travailler la technique en même temps que le sens et comment ? Est-ce que la maîtrise de la technique ne contribue pas aussi au sens ? Par exemple, si on pense au calcul algébrique, il est clair qu'il est nécessaire que les élèves traitent des situations de modélisation pour être capables d'utiliser les techniques de résolution d'équation à bon escient dans la résolution des problèmes mais le travail sur les écritures elles-mêmes n'en est pas moins nécessaire et contribue lui aussi à donner du sens à la résolution des équations, en fournissant des moyens de contrôle d'une autre nature (syntaxiques).

V.2. Comment partir des productions des élèves et leur faire acquérir un savoir mathématique décontextualisé ?

Nous avons déjà signalé l'exiguïté de la marge de manœuvre concernant l'institutionnalisation : d'une part, les élèves ne peuvent pas dégager seuls ce que la démarche qu'ils ont utilisée dans la résolution d'un problème a de général et de réutilisable, d'autre part le risque de dérapage formel est grand dès qu'il y a décontextualisation. Si l'on veut partir des activités des élèves dans des phases de recherche, comment articuler le cours à ce qu'ont fait les élèves ? A quel moment apporter de l'information, sous quelle forme ? Comment garder la maîtrise du déroulement de l'enseignement sans provoquer de rupture avec ce qu'ont produit les élèves ? Comment gérer le bilan et l'institutionnalisation si les élèves ont produit des choses très diverses dans la phase de recherche ?

Il arrive que l'enseignant se méprenne sur la signification réelle des connaissances en jeu pour les élèves et saute des étapes importantes pour que cette décontextualisation se fasse sans perte de sens excessive. Ce phénomène est à rapprocher de l'effet Jourdain identifié par G. Brousseau. En voici un exemple pris dans une classe de 6ème où les élèves avaient travaillé sur les fractions à partir d'aires de rectangles. J'avais posé la question suivante à des élèves avec qui je travaillais en soutien hors de la classe : "Voici un rectangle. Peux-tu fabriquer des quarts de forme différentes ?" Les trois élèves, interrogés individuellement, ont tous produit les dessins des figures 1 et 2 ainsi que celui de la figure 3 pour l'un d'entre eux. Les morceaux de la figure 1, n'étant pas superposables, la question de la validation se posait mais les élèves concernés ne pouvaient pas fournir d'argument.

Je leur ai donc demandé, en laissant apparemment tomber le problème des quarts, s'ils pouvaient fabriquer des huitièmes de formes différentes. J'ai alors eu, entre autres, des productions des types des figures 4 et 5 :

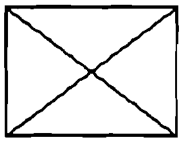


Fig.1

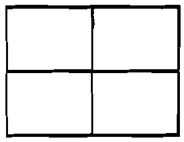


Fig.2

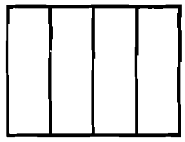


Fig.3

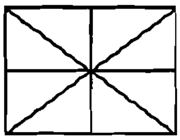


Fig.4

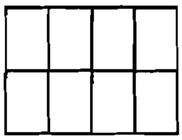


Fig.5

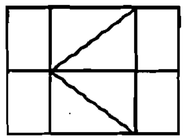


Fig.6

Les élèves pouvaient dire dans chaque cas que $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ et conclure à l'égalité des différents quarts de la figure 1. Mais je leur ai alors demandé ce qu'on trouvait en accolant un huitième du premier type et un huitième du deuxième. Les élèves ne savaient plus, pensaient que ça ne devait pas faire $\frac{1}{4}$ mais que pour le savoir, il fallait paver. Ils n'ont pu conclure qu'après avoir réalisé des pavages du type de la figure 6.

Pour eux la détermination d'une fraction était toujours liée à la possibilité de paver alors que pendant ce temps en classe, on était censé travailler au niveau des nombres. Cela semblait raisonnable puisque des figures de formes différentes étaient codées par une même fraction et que les élèves de cette classe avaient aussi travaillé sur les fractions dans le contexte des longueurs. Mais, dans les deux contextes, il s'agissait d'une problématique de reports. Remarquons que la mesure des aires est en jeu aussi dans cet exemple et que l'existence d'une mesure indépendamment de la possibilité de paver n'est pas une chose facile à concevoir pour des élèves de 6ème.

La trop grande rapidité de la décontextualisation peut s'expliquer par la difficulté pour les enseignants à connaître l'état des connaissances réelles des élèves, et aussi par la nécessité où ils se trouvent de faire avancer le temps didactique.

En reprenant les distinctions de Claire Margolinas (1993), nous pouvons analyser ce fait en disant que les enseignants, responsables de la phase de conclusion, s'ils n'ont pas les moyens de faire une phase de validation (c'est-à-dire de faire produire des arguments par les élèves vérifiables ou falsifiables par la situation), par exemple si la situation ne le permet pas, vont conclure par une phase d'évaluation (conclure sous leur propre autorité) et les élèves vont passer directement de l'action à l'évaluation. De plus, il se peut qu'une phase de validation fonctionne de fait comme une phase d'évaluation pour certains élèves.

La conclusion est pourtant nécessaire : les élèves ont besoin de disposer d'une synthèse claire du travail réalisé et de notes réutilisables[10]. Cependant, le lien entre le travail effectivement réalisé et la synthèse du professeur sera peut-être précaire pour certains élèves. Il nous paraît donc nécessaire de distinguer différents niveaux dans la décontextualisation pour les élèves :

- si le contexte est matériel, pouvoir prévoir ou conclure sans recourir au matériel, en imaginant seulement la manipulation qui est intériorisée,
- utiliser des arguments qui mettent en relation des connaissances qui ne se réfèrent plus forcément au contexte,
- utiliser la connaissance dans un autre contexte.

Cette dernière étape serait aussi à hiérarchiser suivant que la problématique de réinvestissement est proche des problématiques déjà rencontrées ou qu'elle est très nouvelle : par exemple, pour les fractions, la problématique de la mesure des aires planes est relativement proche de celle de la mesure des longueurs de segments même si le passage de l'une à l'autre soulève des problèmes nouveaux et importants (non superposabilité des parties de même mesure) tandis que la problématique de la mesure est différente de celle des codages d'applications linéaires.

V.3. Quels rapports entre réussite et apprentissage ? Comment concilier réussite à court terme et réussite à long terme ?

L'analyse des entretiens que j'ai menés avec des instituteurs et des professeurs de collège a mis en évidence aussi une espèce de contradiction entre d'une part la volonté que les élèves apprennent et assimilent les contenus d'enseignement avec du sens de façon à pouvoir les réinvestir sur le long terme et d'autre part la nécessité d'un minimum de réussite sur le court terme. La pression du côté de la réussite à court terme vient aussi bien des élèves et des parents que des collègues et semble plus forte au collège qu'à l'école élémentaire. Un minimum de réussite des élèves est nécessaire au professeur pour le fonctionnement de sa classe. C'est aussi le principal moyen de valorisation du professeur lui-même. La réussite du professeur peut s'évaluer selon deux critères :

- d'une part, le succès des élèves aux examens ou aux contrôles, notamment s'ils sont communs à plusieurs classes du même niveau (évaluation officielle). C'est d'ailleurs aussi ce qu'attendent les élèves et les parents d'élèves,
- d'autre part, la bonne marche de la classe, l'ambiance propice au travail, avec des élèves intéressés et qui prennent du plaisir à faire des mathématiques. Un indice en est la participation des élèves.

Selon le premier critère, le professeur doit aider le plus possible les élèves à acquérir les contenus qui seront l'objet de l'évaluation importante, celle qui a des

---

10 voir sur ce point l'article de J.C. Duperret dans Repères-IREM n°13.

conséquences institutionnelles. Pour cela, il faut une gradation bien adaptée des difficultés, des explications claires, voire des explications "modèle" que les élèves pourront reproduire (phrases de résumé écrites dans le cahier, exercices type intégrés dans le cours). Il faut surtout éviter que les élèves fassent des erreurs dans ces évaluations officielles et pour cela il est nécessaire d'abord de corriger toutes les erreurs qui se produisent en cours d'apprentissage (une erreur non corrigée a toutes les chances de se reproduire), et même, autant que possible, de prévenir les erreurs en mettant les élèves en garde, en leur signalant des endroits dangereux.

Pour le deuxième critère, le professeur doit parvenir à motiver les élèves, capter et conserver leur attention, les faire participer. Il n'est plus envisageable de dispenser des cours magistraux, en tous cas au collège. Il faut que les élèves aient une part assez grande d'activité visible. Pour les professeurs, les bons élèves sont ceux qui contribuent aux deux types de réussite. Le professeur se sent responsable des deux types de réussite mais il assure en priorité le second dans l'espoir d'avoir le premier. Mais c'est aussi en assurant le premier, donner aux élèves l'impression que ce qu'il fait est utile pour l'évaluation qu'il va obtenir le second.

V.4. Gestion de la complexité dans les problèmes de recherche : comment trouver des problèmes suffisamment complexes et cependant abordables pour que les élèves engagent les notions avec du sens ?

Nous avons vu que les élèves en difficulté utilisent difficilement des situations qu'ils ont rencontrées, comme situations de référence pour traiter des questions nouvelles. Une question didactique est l'élaboration de situations qui peuvent jouer ce rôle de référence tout en permettant une *gestion de la complexité des problèmes proposés aux élèves* suivant les différents moments de l'apprentissage.

L'intérêt des *problèmes de référence* est de permettre d'évoquer un contenu à partir d'un contexte avec le sens qu'il avait dans ce contexte au moment où on veut l'utiliser dans un autre. Mais tous les problèmes ne peuvent pas servir de référence. D'une part, un problème de référence doit être assez caractéristique du savoir qu'il met en jeu : celui-ci doit y prendre une signification qu'on retrouve dans beaucoup d'autres problèmes et en même temps donner plusieurs moyens d'accès, par exemple permettre une traduction dans plusieurs cadres. Il doit pour cela avoir une complexité suffisante. D'autre part, et à cause même de cette complexité, il doit demander aux élèves un travail et un investissement significatifs. Pour qu'il puisse jouer son rôle, un tel problème doit donc plaire aux élèves et être facilement mémorisable. Les problèmes de référence ont une fonction bien différente de simples exemples qui sont là pour aider à comprendre mais ne sont pas destinés à être retenus. Ils vont au contraire faire partie intégrante du cours, et même en constituer l'essentiel pendant un certain temps, jusqu'à ce qu'une décontextualisation suffisante soit possible.

Pour des classes composées majoritairement d'élèves en difficulté, la recherche de tels problèmes va être particulièrement importante et délicate. Ils doivent être assez complexes pour que les notions en jeu y prennent suffisamment de sens mais aussi doivent pouvoir être abordés par les élèves sans les décourager. De toute façon, s'ils sont trop complexes, le professeur sera amené à faire des négociations à la baisse et à mener lui-même l'essentiel de la recherche. Cela suppose aussi une gestion de la complexité à étudier soigneusement, d'autant plus que les moyens utilisés habituellement pour cela comme le travail en groupes sont souvent d'un recours plus malaisé dans ce type de classe.

V.5. Gestion de l'évaluation : comment maintenir les exigences sans décourager ?

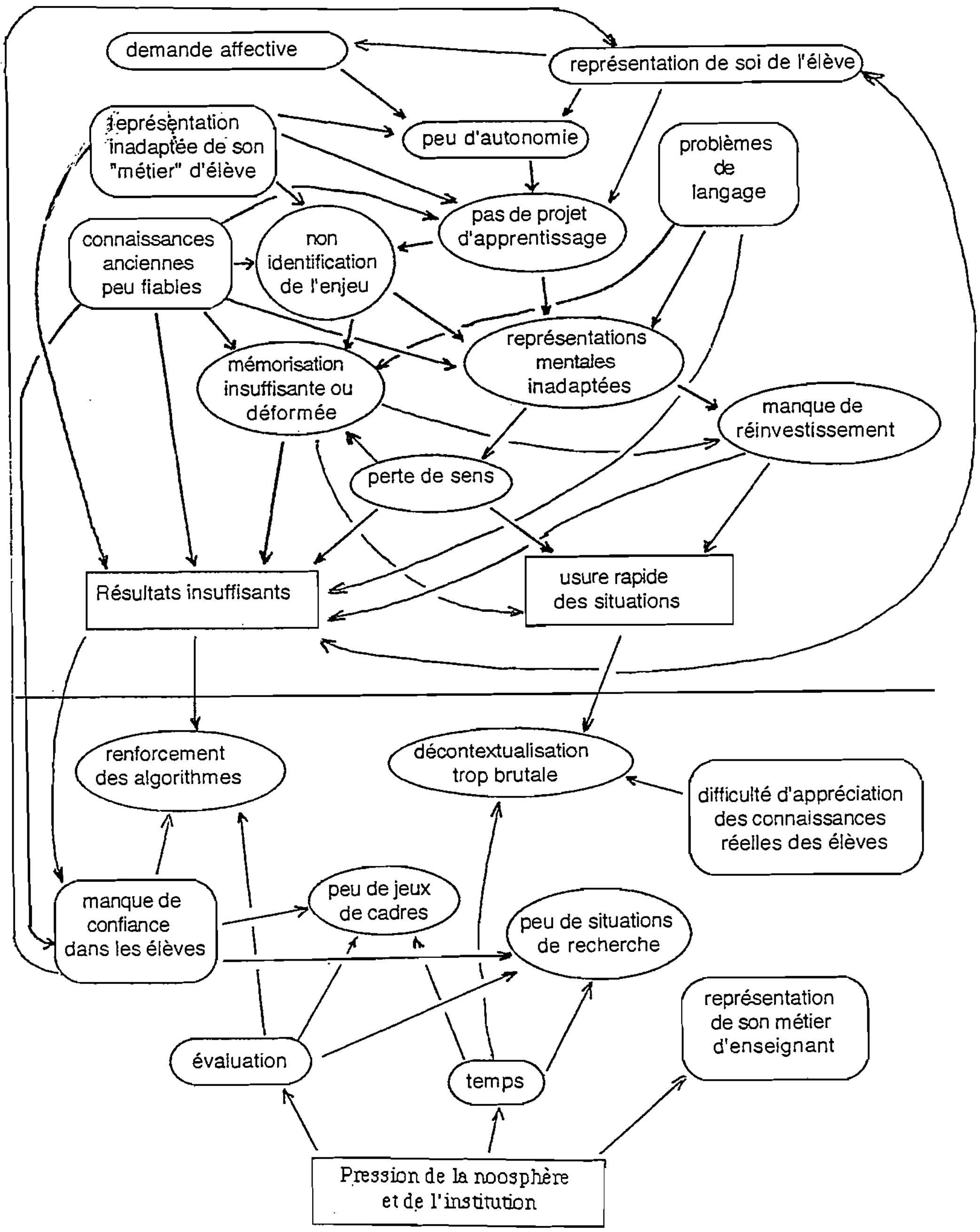
La gestion d'une classe faible pose aussi des problèmes au niveau de l'évaluation. Doit-on faire une évaluation relative à la classe permettant de situer les élèves les uns par rapport aux autres et d'évaluer les progrès en fonction du niveau de départ ou doit-on maintenir les mêmes exigences que dans une classe ordinaire ? Nous avons vu que l'enseignant a besoin d'un minimum de réussite pour gérer convenablement sa classe. Il sera alors tenté de faire le premier choix. Mais alors comment les élèves et les parents accepteront-ils l'orientation de fin d'année si les notes de l'année laissaient espérer autre chose ? S'il fait le deuxième choix, les élèves risquent de se décourager et il a lui même du mal à évaluer l'effet de son enseignement. Doit-on alors pratiquer plusieurs types d'évaluation en parallèle, l'une interne à la classe pour réguler l'enseignement et l'autre, externe (contrôles communs avec d'autres classes par exemple, avec barème commun) pour décider de l'orientation ?

Une autre question se pose aussi : que prendre en compte dans l'évaluation ? Si les élèves travaillent pour avoir de bonnes notes, le contenu des contrôles va déterminer d'autant plus ce qui leur paraît important. Si les contrôles ne comportent que l'application d'algorithmes, le risque est que les élèves se désinvestissent un peu plus des problèmes de recherche et attendent qu'on leur livre la technique à appliquer. S'il y a une véritable partie de recherche, le risque est une mauvaise réussite. Comment noter la recherche d'un problème un peu ouvert ? Peut-on noter séparément l'investissement de l'élève et son résultat ? Ne risque-t-on pas alors de l'encourager à remplir seulement son métier d'élève sans réellement s'investir au niveau du contenu ?

Face à ces systèmes de contraintes opposées et face aux contraintes de temps souvent déterminantes, les enseignants font parfois des choix différents, privilégiant la recherche et l'expression des élèves ou l'avancée du temps didactique et l'entraînement aux techniques. Les systèmes de contrainte que nous avons dégagés ne sont pas indépendants et on peut prévoir que les choix des enseignants ne vont pas se répartir de manière aléatoire. Par exemple, on peut attendre que le souci de faire acquérir des automatismes soit lié à la présentation du savoir décontextualisé et au désir de la réussite à court terme. De plus, il semble que les différences de choix sont accentués dans le cas de classes faibles parce que les enseignants renforcent dans ce cas ce qui leur paraît essentiel à cause de la pression plus forte du temps.

VI. Imbrication des difficultés des élèves et des contraintes des enseignants. Enclenchement de cercles vicieux. Paradoxes

Les difficultés des élèves et les contraintes des enseignants s'imbriquent et produisent des cercles vicieux et des paradoxes que nous allons décrire dans les paragraphes suivants. J'ai tenté de rendre compte de cette imbrication dans le diagramme ci-dessous :



VI.1. Simplification des situations et enclenchement d'un cercle vicieux

La difficulté de réinvestissement des élèves est particulièrement grande dans le cas de situations complexes où il y a à identifier un problème connu à l'intérieur d'une situation où interviennent d'autres éléments. Cela renforce l'idée qu'on facilite l'apprentissage en simplifiant le problème, en mettant des paliers intermédiaires. Cela entraîne aussi, chez les enseignants comme chez les élèves, le désir de recourir le plus possible à l'apprentissage de procédures de traitement stéréotypées, plus sécurisantes pour les uns comme pour les autres. En effet, dès qu'ils sortent de la routine, les élèves en difficulté quêtent l'approbation du maître à chaque pas, ils réclament donc des algorithmes. Par ailleurs, du côté des enseignants, on fait moins confiance aux élèves, on a tendance à les aider davantage et on pense, par le renforcement des algorithmes, leur donner le moyen de réussir au moins quelque chose.

Il est vrai que les algorithmes eux-mêmes sont souvent insuffisamment mémorisés par ces élèves. Ceci amène une charge en mémoire insupportable lors de la résolution de problèmes, leur fait perdre le fil de la résolution et encourage donc l'enseignant à donner plus de place encore à l'apprentissage des leçons et des algorithmes. De plus, la pression du temps jointe au manque d'autonomie des élèves donne aux enseignants une double raison d'hésiter à laisser de l'initiative aux élèves dans des classes faibles.

En outre, avec les élèves en difficulté, les professeurs ont tendance à se concentrer sur le cadre numérique en négligeant des activités géométriques ou graphiques qui pourraient leur donner d'autres références. Le fonctionnement d'un jeu de cadres nécessite pour les élèves d'une part un minimum de connaissances solides dans chacun des cadres de cette mise en jeu - même si ce minimum peut être très faible dans l'un des deux, d'autre part un apprentissage : la plupart des élèves ne le font pas spontanément, parce qu'un changement de point de vue est toujours difficile. A cause de ces difficultés, les enseignants pensent généralement que, pour les élèves faibles, il faut faire le moins de mélanges possible. Ils donnent rarement à ces élèves des problèmes où plusieurs cadres ou plusieurs notions sont en jeu. Cela contribue à accroître le déficit de connaissances et à diminuer encore les sources de déséquilibre et donc les occasions d'apprentissage et de mises en relation.

Les difficultés des élèves contribuent ainsi à l'enclenchement d'un cercle vicieux renforcé ensuite par les choix des enseignants : on tend tellement de perches qu'on obtient une réussite qui n'est l'indice d'aucun apprentissage. On assiste alors à un processus boule de neige : les élèves ne se représentent pas les actions, ne perçoivent pas les enjeux → les élèves ne mémorisent pas → le professeur se concentre sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés → les situations proposées aux élèves se résument à la répétition de problèmes d'exécution, du type de ce qu'il demandera lors du contrôle → les élèves ne se représentent pas, ne mettent pas en relation → ... et l'apprentissage se résume au renforcement d'algorithmes dont les conditions d'utilisation ne sont jamais maîtrisées.

VI.2. Activités sans conclusion

On peut avoir un autre phénomène : l'enseignant est soucieux de faire chercher les élèves pour donner du sens aux notions, faire participer les élèves et les motiver. Mais ces activités prennent du temps et la phase de conclusion disparaît ou est très réduite, ce qui fait qu'on ne décolle pas de ce que les élèves savent faire tout seuls ou que le cours s'il a lieu après est déconnecté de la partie recherche. On retrouve là la pression du temps et aussi des difficultés de gestion de la classe au cours d'un bilan collectif : les élèves doivent pouvoir s'écouter les uns les autres tout en engageant personnellement leurs connaissances et en défendant les procédures qu'ils ont mises en œuvre dans l'activité. Il y a ainsi dans certaines classes une pression à limiter les phases de conclusion ou à les remplacer par une conclusion du maître lui-même.

VI.3. Gestion des phases de recherche

Certains élèves, nous l'avons déjà évoqué plusieurs fois, vont pousser l'enseignant à une négociation à la baisse du contrat didactique. Ils vont aussi essayer de trouver des réponses en évitant d'engager leur responsabilité dans la résolution du problème en essayant de fonctionner au seul niveau du contrat. Leur manque d'autonomie et leur besoin d'attirer l'attention du professeur vont augmenter les occasions pour le professeur de donner, éventuellement malgré lui et inconsciemment, ces indices qu'ils recherchent pour réussir au moindre coût cognitif. De plus, les problèmes de discipline et les difficultés de communication entre élèves vont parfois rendre difficile le travail en groupe. Cette difficulté au niveau de l'organisation de la classe va aussi contribuer à pousser l'enseignant à simplifier les problèmes : en collaborant, les élèves pourraient aborder des problèmes plus complexes que ceux qu'ils peuvent aborder seuls. On a ainsi un autre cercle vicieux au niveau de la gestion de la classe : comme les élèves manquent d'autonomie, on va adopter une gestion de la classe qui réduira les occasions d'apprendre l'autonomie.

VI.4. Un paradoxe : on est amené à exiger des élèves faibles des arguments et des explications qu'on ne demande pas aux bons élèves

Ce paradoxe est lié au fait que le professeur fait moins confiance aux élèves dans une classe faible : il arrive ainsi que le professeur reconnaisse ce qu'il attendait dans un début d'explication d'un bon élève, il complète alors souvent lui-même pour gagner du temps, pensant que l'élève aurait pu le faire aussi ; au contraire, quand il n'est pas sûr que l'élève pourrait terminer l'explication lui-même, il va demander plus de détails, de nouvelles raisons ; c'est alors aussi pour lui un moyen d'évaluation, de vérifier que l'élève a bien compris. Par exemple, dans une classe faible de seconde, pour justifier un minimum d'une fonction affine par morçeaux, un élève affirme qu'il s'agit d'une parabole parce que c'est symétrique. Le professeur qui a travaillé les paraboles quelque temps avant demande aux élèves d'expliquer pourquoi ça ne peut pas être une parabole : il attend une justification liée à l'équation, du premier degré dans un cas, du second dans l'autre. Il s'avère que les élèves ne sont pas capables de produire cette justification, mais il n'est pas sûr que beaucoup d'élèves de seconde seraient capables de la produire. Dans une bonne classe, on n'aurait sans doute pas eu l'occasion de poser ce problème, soit parce que l'occasion ne s'en serait pas présentée (une telle occasion est le plus souvent provoquée par l'erreur d'un élève), soit parce qu'un élève aurait tout de suite produit la bonne réponse, laissant penser au professeur que c'était clair pour l'ensemble de la classe. Ce phénomène a pour conséquence que, dans une classe faible, la structure d'une séance d'enseignement est en général moins linéaire que dans une bonne classe à cause des digressions nombreuses et diverses (du type de celle que nous venons de signaler mais aussi par le règlement de problèmes de discipline). Il est donc plus difficile de repérer l'objectif d'enseignement et ce qu'il y a à retenir de la séquence.

VI.5. La perte de sens par atomisation de la tâche

De plus, quand l'élève ne trouve pas ou ne fournit pas la réponse attendue, l'enseignant est conduit à poser de nouvelles questions et à décomposer la tâche, ce qui amène à expliciter des étapes intermédiaires qui restent le plus souvent implicites quand les élèves trouvent rapidement. Cette introduction d'étapes intermédiaires contribue à faire perdre de vue le problème initial à des élèves qui ont déjà beaucoup de difficultés à garder le fil de ce qu'ils sont en train de faire. On se trouve un peu dans la même situation que pour la lecture : si on lit un texte en décomposant chaque syllabe, on a du mal à en comprendre le sens, de même, il est difficile de saisir le sens et l'intérêt d'un problème quand on est amené à trop décomposer la tâche. J'ai été très souvent confrontée à ce problème avec l'élève que j'ai observé en travail individuel (voir en annexe, à titre d'illustration, un extrait d'un entretien avec Didier). On voit le même phénomène dans le problème des œufs que relate E. Hébert (1992, p. 74) au moment du choix de l'inconnue.

VII. Des perspectives de recherche

Face à ces contraintes contradictoires, quelles sont les marges de manœuvre de l'enseignant ? Comment l'aider à faire des choix ?

VII.1. Apprendre à gérer la complexité

Nous avons dénoncé le cercle vicieux qui amène à simplifier les problèmes proposés aux élèves faibles jusqu'à les vider de leur sens. Cependant, il n'est pas raisonnable non plus de leur proposer des problèmes qu'ils ne peuvent pas démarrer. On doit prévoir un apprentissage de la résolution de problèmes complexes qui demande notamment la structuration des données, le découpage de problèmes plus simples. Cette question se pose aussi bien pour les situations de réinvestissement que pour les situations d'introduction d'une notion nouvelle.

Diverses stratégies ont été largement expérimentées auprès d'élèves de l'école primaire et du collège pour cet apprentissage, notamment :

- proposition d'une situation qui comporte un grand nombre de données de différentes natures, sans question et demande aux élèves de formuler eux-mêmes des questions auxquelles ils pourraient répondre à partir des données, ou recherche de données nécessaires, éventuellement manquantes, pour répondre à une question qu'ils ont envie de se poser.
- proposition d'une situation complexe sur laquelle on laisse les élèves chercher sans leur fournir la solution, puis proposition d'un problème plus simple qui aide à la solution du problème précédent. D. Butlen et M. Pézard (1992) ont obtenu des résultats encourageants par cette méthode avec des élèves de CM2 faibles pour des problèmes de produits cartésiens (menus avec des choix multiples).

Cependant, la gestion de la complexité est un problème fondamental en didactique qui est loin d'être résolu. La détermination des variables didactiques et des critères de choix pour les valeurs à leur donner est un point central de la théorie des situations didactiques.

VII.2. Conversion de registres et changements de cadres

Les problèmes complexes peuvent nécessiter des changements de cadres qui sont un des ressorts possibles pour agir sur les conceptions des élèves, les aider à franchir des difficultés résistantes. La définition des jeux de cadres possibles à partir d'un problème nécessite une analyse fine du problème en liaison avec les conceptions actuelles des élèves : suivant le problème et suivant le niveau des élèves, ce ne seront pas toujours les mêmes cadres (au sens mathématique du terme) qu'on aura envie de distinguer. La notion de fenêtre conceptuelle que définit maintenant R. Douady (1992) peut aider à cette analyse.

Une manière de réconcilier le sens et la technique est de travailler les conversions entre registres pour une même notion (Duval, 1988). La notion de registre se distingue de celle de cadre en ceci qu'elle porte sur le signifiant, les représentations sémiotiques liées à un concept, alors que celle de cadre met en jeu le signifié : quand on traduit un problème dans le cadre algébrique ou dans le cadre géométrique, on va utiliser des objets de ce cadre avec leurs propriétés, avec les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets du cadre : on utilisera des modes de traitement différents mais aussi des objets différents. Par exemple quand on représente graphiquement des équations par des droites, on pourra utiliser des propriétés géométriques comme le parallélisme, les points d'intersection... qui peuvent se traduire dans le cadre algébrique. En revanche quand on passe des écritures fractionnaires aux écritures décimales, on a un changement (ou conversion) de registre à l'intérieur du cadre numérique. Les conversions de registre, par exemple les changements d'écriture des nombres sont des activités qui, tout en développant les techniques contribuent au sens.

VII.3. Les occasions de construire le sens

Un des temps forts dans le processus de dépersonnalisation et décontextualisation des savoirs construits en classe se situe au cours des bilans qui suivent une phase de recherche des élèves. Dans ces bilans, à côté des moments d'institutionnalisation, il y a des moments où le maître cherche à homogénéiser la classe et où s'effectue une première dépersonnalisation des procédures mises au point par les élèves dans la phase de recherche. Mais que se passe-t-il pour les élèves qui n'ont pas produit la connaissance attendue pendant la phase d'action ? ou pour ceux qui ont agi, voire réussi la tâche donnée, mais sans création de représentations mentales ? Comment leur donner l'occasion de le faire ?

Cette occasion peut être donnée en demandant aux élèves de dire ce qui s'est passé dans une situation d'action, peu après, mais un autre jour, ce qui distingue ce rappel du bilan. En essayant de dire collectivement ce qui s'est passé, quel problème a été traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe. Les élèves qui ne se sont pas construit de représentation mentale lors de la phase d'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. Il se peut que pour certains élèves l'action soit à nouveau nécessaire mais elle est alors placée dans une nouvelle perspective : il faut agir non seulement pour trouver une solution mais aussi pour pouvoir en parler. D'une part il se produit alors une dépersonnalisation des solutions dans la mesure où elles sont reprises et exposées par d'autres élèves que ceux qui les ont trouvées, d'autre part il se produit une pré-décontextualisation : en reprenant à froid ce qui s'est passé, on élague les détails pour identifier ce qui est important. A cette occasion, le sens caché, le rôle pour l'apprentissage de l'un ou l'autre des problèmes posés peut se révéler à certains élèves. En même temps, par le retour réflexif sur l'action que ces situations supposent, elles favorisent la construction de représentations mentales par les élèves.

Ce premier type de phase de rappel remplit surtout les fonctions de dévolution après-coup, donc d'homogénéisation de la classe et de dépersonnalisation des solutions avec institutionnalisation locale. Il doit permettre d'adapter l'institutionnalisation locale aux conceptions actuelles des élèves.

VII.4. Mettre en relation, articuler plusieurs situations

Il est important non seulement que les élèves construisent du sens pour les notions mathématiques à travers la résolution de probèmes bien choisis et qu'ils aient l'occasion de reconnaître ce sens et pas seulement de résoudre le problème, mais il faut encore qu'ils aient l'occasion de mettre en relation des sens différents d'un même concept et aussi des concepts différents qui interviennent dans le même champ. Les moments de rappel peuvent aussi avoir la fonction de relier des sens différents d'une même notion vue dans des contextes différents ou d'articuler différents concepts. Ce deuxième type de rappel porte sur une suite de problèmes sur un thème, par exemple la symétrie orthogonale. Il s'agit pour les élèves de se rappeler plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un même thème, avec un peu de recul donc : qu'a-t-on appris depuis qu'on travaille sur la symétrie orthogonale ? Quels problèmes a-t-on rencontrés ? Chacun des problèmes traités est alors intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau. Au cours d'une telle situation, les formulations des élèves évoluent, on peut avoir des retours sur des débats de validation qui ont déjà eu lieu ou rencontrer la nécessité de nouveaux. On n'est pas à proprement parler dans une situation de formulation où il s'agit de produire un nouveau langage, ni dans une situation de validation, mais on retravaille les formulations et les arguments déjà produits.

Ce second type de rappel a surtout une fonction de décontextualisation et d'ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens avec l'institution de diverses relations.

Ces deux types de phases de rappel ont un rôle essentiel dans l'articulation du cours et des activités des élèves. Elles contribuent à l'institutionnalisation des notions et jouent un rôle essentiel dans la constitution de ce que G. Brousseau appelle "la mémoire de la classe". Mais n'introduit-on pas une nouvelle contradiction dans la gestion du temps : ces situations de rappel qui pourraient faire gagner du temps au niveau du sens (sur le long terme) ne risquent-elles pas de trop en faire perdre sur le court terme ?

VII.5. Le rôle du maître dans les phases de bilan et de rappel

Dans les phases de rappel dont nous venons de parler, le rôle du maître est essentiel dans la gestion de la parole des uns et des autres et du temps. Le choix de donner la parole à un élève plutôt qu'à un autre donne à la situation une signification toute différente : s'il veut que la fonction d'homogénéisation et de dépersonnalisation soit remplie, il va donner la parole aux élèves qui n'ont pas trouvé de solution ou qui n'ont pas abouti pour vérifier qu'ils suivent et reprennent à leur compte les méthodes utilisées, s'il veut avancer dans la décontextualisation et la formulation, il va davantage donner la parole aux "leaders", quitte à faire reprendre les nouvelles formulations du problème par l'ensemble de la classe dans le courant de la séance ou ultérieurement. On voit ainsi une évolution par rapport à la phase de bilan où ce sont plutôt les "leaders" qui exposent les méthodes de résolution qu'ils ont trouvées, les "suiveurs" se contentant d'écouter ou d'intervenir sur des points de détail qui sont dans le domaine de l'ancien. Les marges de manœuvre du maître se situent aussi dans le choix des questions, dans ce qu'il reprend ou non des interventions des élèves, dans ses commentaires. Il peut agir sur ces marges pour ancrer "le nouveau" dans les connaissances anciennes et dans ce que les élèves ont réellement fait ou faire avancer la connaissance en s'écartant un peu du problème réellement traité, en proposant un début de généralisation ou de réinvestissement dans un contexte légèrement différent.

Le rôle du maître est essentiel dans le processus d'institutionnalisation, quel que soit le style d'enseignement. Il doit notamment choisir ce qui est à retenir dans chaque séance et décider en même temps quel "ancien" remobiliser, que reprendre dans les activités des élèves, jusqu'où aller dans la décontextualisation. Ces décisions vont dépendre de ce que les élèves ont réellement fait et de l'évaluation qu'en fait le professeur : est-ce que ce qu'il considère comme ancien est réellement acquis par suffisamment d'élèves, est-ce que l'appropriation des méthodes de résolution est suffisamment généralisée dans la classe... Il s'agit là d'une évaluation globale, intuitive des élèves, qui a des liens avec l'évaluation officielle réalisée par ailleurs mais qui ne s'y réduit pas (cf Perrenoud 1984). Cette lecture par le professeur du travail des élèves va faire intervenir les représentations qu'il a sur le savoir visé ainsi que sur la manière d'apprendre, sur son rôle dans l'apprentissage des élèves. De leur côté, les élèves sont inégalement prêts à suivre le maître dans une décontextualisation de ce qui a été vraiment traité. Il revient encore au maître de laisser ou non la possibilité de refaire ce chemin à d'autres moments pour ceux qui n'étaient pas encore prêts.

VII.6. Quel rôle peut jouer le discours "métamathématique" de l'enseignant ?

Nous avons eu l'occasion d'aborder plusieurs aspects du rôle du maître : dans le choix des situations, dans la gestion des interventions des élèves et de ses propres interventions sur le contenu. Il faut encore considérer les interventions de l'enseignant sur les mathématiques et les contenus enseignés. Celles-ci contribuent à donner des repères aux élèves et à mettre en relation différents contenus, différentes situations, à mettre en relief l'intérêt d'une méthode ou d'une autre. Des recherches portent actuellement sur les caractéristiques de ce discours non strictement mathématique mais concernant les mathématiques, et sur les variations de ce discours liées aux enseignants, aux contenus, ou au niveau supposé des élèves (voir par exemple Josse et Robert 1993).

Conclusion

Si on les envisage dans l'optique d'une application à l'enseignement, les perspectives que je viens de développer peuvent sembler aggraver certains problèmes, notamment au niveau de la gestion du temps : si on prévoit plus d'étapes dans la décontextualisation, si on demande aux élèves de raconter ce qu'ils ont fait dans les séances précédentes, on va passer beaucoup de temps et accroître la pression à ce niveau. Il ne sera sûrement pas possible de travailler de cette façon sur tous les contenus du programme.

Pour interpréter ce qui est dit ici, il faut se garder de prendre ces perspectives comme des suggestions modèles pour l'enseignement, mais les considérer comme une recherche d'outils d'analyse. Par exemple, à propos des phases de rappel, on identifie différents types de fonctionnement du savoir suivant les élèves et ce qui peut s'y jouer. C'est l'analyse du fonctionnement de la classe et des difficultés des élèves qui nous fait penser qu'il est important pour l'enseignement de donner à certains élèves une nouvelle occasion de construire le sens des notions mises en jeu dans des situations d'action. Mais cela ne veut pas dire que la mise en place systématique de telles phases soit possible ni même efficace dans l'enseignement. Par exemple, si les élèves n'arrivent pas, au cours du bilan ou du rappel, à faire émerger le sens mathématique de la situation d'action, l'enseignant devra le faire pour eux : il faut que les élèves puissent disposer d'une conclusion claire à laquelle ils pourront se référer. Il en est de même pour la mise en relation de situations différentes mettant en jeu différents aspects d'un même concept. Cependant, on peut penser que le fait de demander aux élèves une réflexion a posteriori sur les problèmes résolus, même dans le cas où ils n'arrivent pas à la mener à terme, leur indique que ce travail est important, à leur charge et qu'elle fait partie de l'activité du cours de mathématiques. On peut alors peut-être espérer qu'ils prendront progressivement en charge ce travail de réflexion et par là aussi peut-être leur attitude pendant la résolution de problèmes. Cela n'a pas la même signification.

C'est sur les rapports entre recherche et enseignement que je voudrais donc terminer cet article. La didactique dit des choses sur l'enseignement et doit être utile à l'enseignement. L'objet de la didactique est de développer des outils d'analyse qui permettront de mieux décrire, de mieux comprendre, de prévoir ou de reproduire des phénomènes didactiques et elle pourra par là même à terme contribuer à améliorer l'enseignement. Cependant, il faut se garder d'une diffusion trop rapide des résultats de la recherche dans l'enseignement : par nature, la recherche met en relief certains phénomènes qui sont étudiés et laisse dans l'ombre d'autres éléments qui sont pertinents aussi pour l'enseignement. Une application trop rapide des résultats de la recherche à l'enseignement risque donc de surestimer certains facteurs et de produire des déséquilibres, amenant ainsi les effets de balancier bien connus. De plus, les études portant sur le rôle de l'enseignant, qui se développent actuellement, ont encore peu de résultats, ce qui limite les possibilités de contrôle de la reproductibilité des situations.

Bibliographie

AMIGUES R., CHEVALLARD Y., JOSHUA S., PAOUR J.L., SCHUBAUER-LEONI M.L. (1988) Le contrat didactique : différentes approches. *Interactions didactiques* n°8. Neuchatel et Genève.

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris.

BEILLEROT J. et collectif (1990) *Savoir et rapport au savoir.* Editions Universitaires, Paris.

BOERO P. (1987) Analyse de quelques facteurs d'erreur dans l'apprentissage des mathématiques dérivant de l'origine socio-culturelle des élèves. *Actes de la réunion CIEAEM Sherbrooke 1987.* Ed. Université de Sherbrooke, 1988.

BONNEVILLE J.F., COMITI C., GRENIER D., LAPIERRE G.(1990) Eléments d'étude des représentations des enseignants de mathématiques. Le métier, les contraintes, l'apprentissage. *Publications de l'Institut de Formation des maîtres, équipe imat* Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, p. 33-115. La pensée sauvage Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en didactique des mathématiques* n° 11.2.

BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 12.2.3.

CHARLOT B. (1983) *L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir* Journées Nationales de l'APMEP Lille, 22-24 sept.1983 dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques n°342 fev. 1984.*

CHARLOT B. ; BAUTIER E. ; ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues ... et ailleurs* A. Colin.

CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire.* n°39 p. 21-39.

CHEVALLARD Y. (1983) *Remarques sur la notion de contrat didactique.* Brochure de l'IREM d'Aix-Marseille repris dans CHEVALLARD (1988b) *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.* Publication de l'IREM de Marseille n°14.

CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur la question de l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille n°13

C.I.E.A.E.M. (1988) *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathémati-que.* Comptes rendus de la 39ème rencontre de la C.E.I.A.E.M., Sherbrooke, Août 1987

DOUADY R. (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 p. 5-31. La pensée sauvage Grenoble.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* n°6.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) *Nombres décimaux.* Brochure n° 62 IREM Paris 7.

DUPERRET J.C. Point de vue : objet sans âme, outil sans vie ... *Repères IREM* n°13.

DURU M. (1986) Notation et Orientation. Quelle cohérence, quelles conséquences ? *Revue Française de Pédagogie n°77 oct-nov-dec 1986*

DURU BELLAT M. et MINGAT A. (1989) Analyse de la genèse temporelle des trajectoires scolaires. *Revue Française de pédagogie n°88.*

DUVAL R. (1988) Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg.

FORQUIN J.C. (1981) *L'approche sociologique de la réussite et de l'échec scolaires* CREFED - ENS Saint-Cloud.

FRANÇOIS F. (1980) Analyse linguistique, normes scolaires et différenciations socioculturelles *Langages n°59 sept 1980*

FREUDENTHAL H. (1984) L'échec des coureurs, conférence aux journées APMEP de Lille, oct 1983, *Bulletin de l'APMEP n°342, fev.84.*

GILLY M. (1980) *Maître - élève. Rôles institutionnels et représentations* Paris P.U.F.

HEBERT E. (1992) «Les œufs» Entretiens sur la modélisatiion algébrique en classe de seconde. Cahier DIDIREM n° 20, IREM Paris VII

HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de pédagogie* n°84 p.5-12 INRP Paris.

ISAMBERT-JAMATI V. (1990) *Les savoirs scolaires. Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leur réforme.* Ed. Universitaires, collection "Savoir et formation", Paris.

JODELET D. (Ed.) (1989) *Les représentations sociales*. PUF, Paris.
JOSSE E. et ROBERT A. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en didactique des mathématiques* vol.13 n°1/2. 119-154. Ed. La pensée sauvage Grenoble
LABORDE C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.
LAUTREY J. (1980) *Classe sociale, milieu familial, intelligence.* Paris, PUF.
LEGER A. (1983) *Enseignants du secondaire* P.U.F.
LEGER A. et TRIPIER M. (1986) *Fuir ou construire l'école populaire ?* Méridiens Klincksieck
LEGRAND M. (1990) Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques* n°9.3. p.365-406.
MARGOLINAS C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Ed. La Pensée sauvage, Grenoble.
NIMIER J. (1988) *Les modes de relation aux mathématiques.* Coll. Psychologie sociale, ed. Méridiens Klincksieck
NOIRFALISE R. (1987) Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* n°7.3. Ed. La pensée sauvage Grenoble
PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'excellence scolaire* Librairie Droz Genève
PERRET-CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* Peter Lang, Genève.
PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM- 6ème.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7, février 1992.
PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques* vol.13 n°1/2. Ed. La pensée sauvage Grenoble
PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Elèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères-IREM n° 3* p.97-139 Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.
PLAISANCE E. (1985) Colloque du C.N.R.S. de 1984 *L'échec scolaire . Nouveaux débats, nouvelles approches.* Editions du C.N.R.S.
ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM* n°1. IREM de PARIS 7.
ROBERT A. et ROBINET J. (1993) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Cahier DIDIREM n°21*. IREM Paris 7
VERGNAUD G. (1991a) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 10.2.3. La pensée sauvage, Grenoble.
VERGNAUD G. (1991b) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue française de pédagogie n°96*. p. 79-86, INRP Paris.
VYGOTSKI L.S. (1985) *Pensée et langage.* Editions sociales Messidor, Paris.

Annexe : extrait d'un entretien avec un élève de CM1.

Travail en calcul mental :

Didier essaie de faire 11615 sans écrire :

D. une fois 5, ça fait 5, une fois 5 encore une fois parce qu'on doit faire comme ça et comme ça, ça fait 5. Après une fois 1, ça fait 1, encore une fois 1, ça fait 1. Moi, j'ai trouvé 15 !

M. Alors, est-ce que tu pourrais trouver 10 fois 15 ?

D. Non, ça peut pas être 150.

M. Pourquoi ?

D. Attendez, il faut que je réfléchisse, parce qu'il faut toujours réfléchir avant de dire une bêtise. Ah, oui, je vais vous dire pourquoi. Parce que moi, je me suis arrêté à 10, 10 fois 15... et je me suis dit avec 11, ça fait 110, avec 12, 120, avec 13, 130, avec 14, ça fait 140, ... ça fait 150.

M. 10615, ça fait 150, tu en es sûr ? ... Alors, est-ce que tu peux trouver 11 fois 15 ?

D. 151, je dis ça au hasard.

M. Pourquoi 151 ? Ecoute, admettons que tu aies des boîtes de chocolats et il y a 15 chocolats dans chaque boîte.

D. Et il y a combien de boîtes ?

M. 11 boîtes.

D. Ah, là, il faut que je le fasse aussi par l'écrit.

M. Non, tu as déjà fait du travail, vas-y, aujourd'hui, on travaille d'abord par l'oral, je te donnerai le papier et le crayon après.

D. Qu'est-ce-que vous m'avez dit ?

Je répète.

D. 15 et 15 ça fait 30, 30 et 15, ça fait 45. 15 et 40, ça fait 55.

M. On n'en était pas à 40, on était à 45.

D. 40 et 15, ça fait 45.

M. Tu te perds, là, reprends.

D. 15 et 15, ça fait 30, 15 et 30... c'est ça ? Je me rappelle plus.

M. Qu'est-ce que tu cherches à faire ?

D. J'essaie de voir combien ça fait. Je réussis pas. Chaque fois, il faut que je me perds.

M. Pourquoi tu n'y arrives pas ?

D. Parce que je ne réfléchis pas assez.

M. Tu te perds parce que tu ne sais plus où tu en es dans tes +15. Tu fais +15 ... +15, tu rajoutes une boîte à chaque fois. *Est-ce que tu ne connais pas un moyen qui te permette de trouver plus vite le nombre de chocolats parce que le problème, c'est que tu te perds avec tout ça ... Tu ne sais plus combien de boîtes tu as comptées.*

M; (après avoir répété le problème). Qu'est-ce que tu pourrais faire ?

D. une multiplication... non, une addition. A moins que je parte d'un nombre et puis j'en retire 15.

M. Qu'est-ce que c'était ta méthode ?

D. Je voulais faire + + + jusqu'à ce que je trouve le nombre.

M. Vas-y. N'oublie pas de compter les boîtes..

Après avoir ajouté encore 3 fois 15, il perd le fil à nouveau et n'arrive plus à utiliser les méthodes précédentes.

D. 75. J'ai déjà combien de boîtes là ? Je crois que j'en ai 5. Après 75, c'est 85

M. Ah, tu crois, 75 et 15 ?

D. 85

M. Non, 75 et 15

D. C'est pas 95 ?
M. Non plus, regarde 75, pour ajouter 15 qu'est-ce que tu peux faire d'abord ? Essaie que ce soit plus facile ... 15 c'est 10 et 5.
D. Donc je pose déjà le 5, ça fera 80, ça fera 90.
M. Oui
D. ça fera déjà 7 boîtes, ah non, ça fera 6, parce que tout à l'heure j'en étais à 5
M. oui, bon 90, après ?
D. 95
M. C'est 15
D. 100, là c'est dans les 100, 115, 105, je me trompe.
M. 105
D. ça fait 7 boîtes 115 130
M. Tu en étais à 105, 105 et 15 comment tu as fait ?
D. j'ai compté sur mes doigts
M. Ah bon, voilà, tu te trompes toujours quand tu comptes sur tes doigts. C'est trop grand pour que tu comptes sur tes doigts. Comment tu fais pour rajouter 15, on a dit.
D. 105, attendez 125 ça fera.
M. mais non, 105 tu ajoutes déjà 5, ça fait ?
D. 110
M. Et encore ?
D. 10
M. ça fait ?
D. 120
M. Voilà
D. Après c'est 135, après 145
M. Non, 145, regarde, est-ce que ça peut se terminer par un 5 après 135 ?
D. Non, 140
M. 135 et 5 ça fait 140
D. Ah oui, c'est des nombres impairs.
M. Lesquels sont impairs ?
D. Les numéros impairs c'est 1, 3, 5, ... 19
M. D'accord, et là où on en était ?
D. 7 boîtes
M. 7 boîtes, tu te souviens combien c'était ?
D. Non
M. Ah, tu vois, il faut aussi compter les boîtes. On en était à 135, c'est pas 7 boîtes.
D. C'était 105, 7 boîtes
M. 105, 7 boîtes, d'accord, alors 135, c'était combien ?
D. 8 boîtes
M. Non, parce que de 105 à 135, il y a combien ?
D. 15
M. De 105 à 135 il y a 15 ? On l'entend rien qu'au son, 105, 135, combien de plus ?
D. 15, si c'est plus un il y a 15
M. Didier, tu étais à 7 alors on recommence à 7, 105, alors 8, ça fera combien ?
D. 135
M. Non
D. Ah, 105 120
M. 120 pour 8, alors pour 9 ?
D. 135
M. pour 10 ?

D. 145
M. Non
D. 160
M. 135 et 5, 140 et qu'est-ce que tu dois ajouter ?
D. 150, et 11 c'est .... 150, 155, 160, 170 ....
M. 165. Tu as trouvé le résultat, mais tu t'es fatigué beaucoup. Est-ce que tu n'aurais pas pu trouver plus vite le résultat pour 10 boîtes ? Dans chaque boîte, il y a 15 chocolats, si il y a 10 boîtes, est-ce que tu aurais pu trouver plus vite ?
D. Non, j'aurais pas pu trouver plus vite.
M. Pourquoi ? Tu l'avais pourtant trouvé tout à l'heure
D. Ah si, en comptant les dizaines.
M. Et alors combien de dizaines tu devais trouver ?
D. Ben, je m'en rappelle plus. Oh là là, j'ai une courte mémoire sans doute.
M. Je te rappelle qu'on a 15 chocolats dans chaque boîte et 10 boîtes.
D. Ah, 10, attendez ça fait 110, 120, ... il compte de 10 en 10 jusqu'à 240.
M. Qu'est-ce que tu es en train de chercher ?
D. Moi, je suis en train de chercher si je pouvais trouver plus vite.
M. Dis-moi si c'étaient des boîtes de 10 chocolats et que tu aies 15 boîtes, est-ce que tu aurais trouvé facilement ? Disons qu'on a des sacs de billes. Tu as 10 billes dans chaque sac et tu as 15 sacs, est-ce que tu aurais trouvé facilement ?
D. Non
M. Tu as 10 billes dans un sac, dans 2 tu en aurais combien ?
D. 10 et 10, 20, après 30, 40, 50.
M. Et alors dans 15 sacs, essaie de dire tout de suite.
D. 155
M. 150, pas 155. Comment tu fais pour trouver vite ?
D. 10, 20, 30.... il continue jusqu'à 100 ....
M. Oui, tu ajoutes des 10, et alors là tu avais combien de fois 10 ?
D. 10 fois
M. Non, tu avais 15 fois 10
D. Ah, je croyais que vous me disiez pour ce que je viens de vous dire.
M. Oui, alors est-ce que c'est pareil 10 boîtes avec 15 chocolats dans chaque boîte, ou 15 boîtes avec 10 chocolats dans chaque ....
D. ça fera 150
M. Je peux prendre un chocolat dans chaque boîte et je remplis des petits sacs de 10 chocolats. Combien j'aurai de sacs ?
D. 15
M. Alors est-ce que tu peux trouver facilement 10 fois 15 ?
D. 10 fois 15 ça fait 150