LES REPERCUSSIONS DES CHANGEMENTS DE PROGRAMME ENTRE 1964 ET 1989 SUR L'ENSEIGNEMENT DU THEOREME DE THALES

Yves MATHERON
IREM d'Aix-Marseille

L'article suivant est tiré d'un mémoire de maîtrise de sciences de l'éducation soutenu en juillet 1993 à l'Université de Provence. Il s'appuie sur les cours assurés par Alain Mercier et Samuel Johsua dans le cadre des U.V. de didactique de licence et maîtrise.

Il doit beaucoup à l'aide et aux conseils prodigués par Alain Mercier qui a eu la gentillesse de bien vouloir encadrer ce travail à l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille durant l'année 1992-1993. D'autre part, le nombre et la richesse des publications consultables à la bibliothèque de l'I.R.E.M. et portant sur les mathématiques, leur histoire et leur enseignement ont été des aides précieuses pour ce travail.

Les concepts de contrat et de transposition didactiques, élaborés respectivement par Guy Brousseau et Yves Chevallard, sont ici utilisés comme outils théoriques pour l'étude des changements dans l'enseignement du théorème de Thalès et des conséquences qu'il en est résulté à travers la mise en oeuvre des différents programmes de 1964, 1971, 1978 et 1989.

L'auteur est professeur de mathématiques au collège Marseilleveyre à Marseille.

I. Propos du théorème de Thalès

1. Un problème d'enseignement

Les différentes réformes des programmes de mathématiques qui se sont succédées durant ces 30 dernières années ont profondément bouleversé le contenu de la géométrie enseignée au Collège. Dans ce grand tourbillon, quelques points forts semblent avoir résisté, qui paraissent des lieux d'ancrage solides autour desquels tout enseignement de la géométrie au Collège s'articule nécessairement. Ainsi en est-il du théorème de Thalès encore dénommé propriété, axiome ou énoncé de Thalès, au gré des changements de programme ou des choix des rédacteurs des manuels. Une question pouvait alors se poser.

Comment "cet invariant" a-t-il traversé les réformes de 1971 et 1978 ? En bout de chaîne qu'est-il devenu dans les programmes actuels de troisième (appliqués depuis la rentrée 1989) en comparaison à ce qu'il était dans les programmes de 1964 avant la réforme des mathématiques modernes ?

Mais cette question en elle-même banale (les programmes changent), renvoyait pour l'auteur de ces lignes à une autre interrogation.

L'ancien programme me conduisait déjà à "mentir par omission" aux élèves, en faisant l'impasse sur le problème du passage du théorème établi sur les rationnels, au théorème étendu à $\mathbb{R}$.

Depuis la mise en oeuvre du programme de 1989, les choses s'étaient singulièrement aggravées : plus aucune référence aux ensembles de nombres, étude du théorème appauvrie au point de se limiter au triangle, champ d'utilisation du théorème très restreint. Plus inquiétant encore; alors qu'un des objets de l'enseignement des mathématiques est l'activité démonstrative opposée à la constatation empirique (ce que tout professeur de mathématiques s'escrime à enseigner aux élèves), voilà que nous étions confrontés à deux "ruptures de contrat didactique"[1] (le contrat didactique est constitué par le système d'attentes réciproques, souvent implicites, qui fixe les rôles, places et fonctions du professeur et des élèves par rapport au savoir traité) pour utiliser la terminologie de G. Brousseau :

- impossibilité, ne serait-ce que de tenter une démonstration du théorème,
- obligation de recourir à la constatation visuelle (portant sur l'ordre des points), pour pouvoir utiliser la réciproque (faute de définir la notion de mesure algébrique).

Le savoir en jeu ici n'étant pas "éthéré" mais produit avec l'intention d'être enseigné, la théorie de la transposition didactique pouvait se révéler être un outil efficace pour démêler l'enchevêtrement des fils où se nouait le problème. Ce choix se nourrissait de la conviction qu'on retrouverait bien au cours de l'étude, les deux autres pôles du système didactique provisoirement absents : l'enseignant et l'enseigné. Il fallait donc dans un premier temps voir ce qu'il en était du théorème de Thalès en termes de savoirs savant et enseigné.

2. Quelques particularités de l'objet d'enseignement

Il présente un double intérêt.

Comme savoir savant, tout d'abord, puisqu'il paraît bien être issu d'une pratique sociale permettant de résoudre des problèmes dans lesquels apparaissent parallélisme et proportionnalité. Au-delà de la légende qui veut que Thalès ait ébloui le pharaon en mesurant la hauteur de la grande pyramide grâce à la comparaison de son ombre et de celle d'un bâton, il semble que cette connaissance ait permis au préalable de résoudre des problèmes pratiques. Par exemple celui, connu des Babyloniens, consistant à calculer les marches d'un escalier connaissant leur hauteur et celle de l'escalier Ce savoir évolue durant l'Antiquité puisqu'il faut attendre EUCLIDE, trois siècles après Thalès, pour trouver trace de sa première démonstration dans les Eléments (voir annexe p. 83). Dès lors il est fixé dans ce qui deviendra jusqu'au siècle dernier l'ouvrage mathématique de référence, le livre le plus diffusé après la Bible.

Comme savoir enseigné, sa transposition bute, dans une sorte de dialectique avec le développement du "savoir savant", sur le problème de la construction de la droite réelle, du passage des rationnels aux irrationnels. Comment s'assurer en effet

---

[1]Guy Brousseau"Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7, n° 2, pp. 33-115, 1986.

que la mesure des longueurs de segments sur une droite est toujours possible avec l'ensemble des nombres dont on dispose ? Que celui ci ne comporte pas de "trous" ? Qu'il est complet ?

3. La démonstration d'Euclide

Que l'intention de contourner le problème des irrationnels ait été présente ou pas chez Euclide, force est de constater que la démonstration qu'il fournit du théorème de Thalès évite la difficulté. De notre point de vue "moderne", le problème de l'existence d'un ensemble de nombres déclaré et construit, pouvant assurer les mesures de toutes les longueurs, est évité.

En effet, le théorème est démontré dans le livre VI des Eléments en utilisant les aires de triangles, ce qui ne nécessite pas la construction de l'ensemble des réels. Elle nécessite la théorie des parallèles, l'aire des triangles et la théorie des proportions du livre V pour établir les rapports d'aires des triangles (voir annexe). Cette démonstration est donc bien loin de l'objet d'enseignement traditionnel : la proportionnalité de longueurs de segments portés par des droites à l'issue d'une projection. Ainsi pour un regard moderne, il y a dans la démonstration d'Euclide passage par des "objets de dimension 2" (les aires), pour établir une propriété portant sur des "objets de dimension 1" (les segments portés par les droites dont les longueurs sont proportionnelles), sans le recours à "l'instrument" qui pourrait faire la jonction (la projection).

4. Une préconstruction

L'étude des manuels portant sur les périodes concernées (de 1964 à 1989) montre que leurs auteurs ont, pour l'établissement de la propriété, traditionnellement privilégié l'approche par la proportionnalité des longueurs. Le plus souvent, la propriété est établie dans le cas où le rapport des longueurs est rationnel, son extension au cas irrationnel étant admise. Cependant, l'ouvrage de 1989 qui a été étudié, fait explicitement référence à une démonstration par les aires.

Il y a ainsi une "partie cachée" dans l'établissement de la propriété, celle relative à la construction de la droite réelle et aux réels. Comment d'ailleurs pourrait-il en être autrement, dès lors que cette construction touche à des problèmes délicats seulement résolus dans la deuxième partie du XIXème siècle bien qu'entrevus dès l'Antiquité.

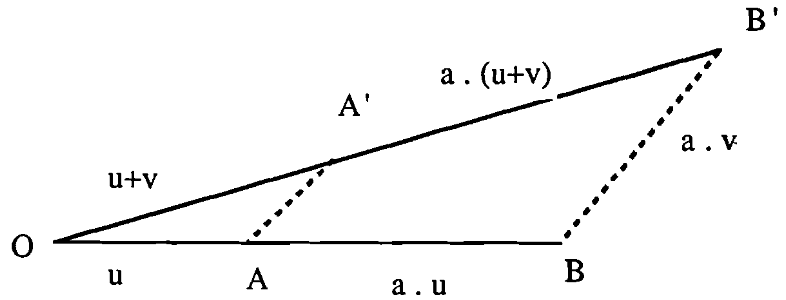
Si l'on décide ainsi qu'il est traditionnellement fait dans les programmes, sauf pendant la réforme des mathématiques modernes, c'est-à-dire de 1971 à 1978 en quatrième, de ne pas traiter de la construction de $\mathbb{R}$, cette difficulté est donc cachée, ou contournée. Cette "partie cachée" peut être définie comme "une préconstruction" dans le sens définit par Y. Chevallard

De ce fait :"*L'objet n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée,* *dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion".*[2]

Ainsi, la possibilité d'au moins une bijection entre l'ensemble des points d'une droite et un ensemble de nombres, apparaît-elle "naturelle" pour quiconque a en tête l'image de deux règles graduées (l'une avec des positifs, l'autre avec des négatifs) mises bout à bout et prolongées infiniment (image utilisée dans l'ouvrage de quatrième étudié portant sur le programme de 1971). Pourtant comme on sait, cette idée "naturelle" est loin de renvoyer à un concept trivial, puisqu'elle débouche sur l'étude des ensembles infinis et sur des problèmes touchant aux "fondements" des mathématiques.

5. Une place à l'intérieur de la dialectique "ancien-nouveau"

Il y a par ailleurs un autre pan des mathématiques sur lequel se greffe le théorème de Thalès et qui lui aussi reste dans l'ombre au moment où il est enseigné : celui relatif aux espaces vectoriels. En effet, dès lors qu'est connue la première loi de distributivité $a.(\vec{u}+\vec{v}) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$, le théorème de Thalès n'en devient qu'une conséquence dans l'espace affine associé.



Si $\vec{OB} = a.\vec{OA}$ alors $\vec{OB'} = a.\vec{OA'}$, B' étant le projeté de B sur (OA') parallèlement à (AA').

Ainsi en tant qu'objet d'enseignement, le Théorème de Thalès apparaît-il comme "objet transactionnel entre passé et avenir" avec lesquels "il réalise un équilibre contradictoire"[3]

"En un second moment de la dialectique d'enseignement, il doit apparaître comme ancien, c'est à dire autorisant une identification (par les enseignés) qui l'inscrive dans la perspective de l'univers de connaissances anciens".[4]

Ce second moment est assuré lorsqu'existe dans l'enseignement à venir une notion qui lui garantisse une "obsolescence interne"[5] inscrite dans la progression, dans les programmes. Pour le théorème de Thalès, en tant qu'objet d'enseignement, la notion d'espace vectoriel enseignée au lycée semble avoir constitué dans les programmes de 1971 et de 1978 le second moment de la dialectique d'enseignement.

---

[2]Y Chevallard La transposition didactique, p. 89-91.
[3]Y. Chevallard, La transposition didactique, p.67.
[4]Y Chevallard, La transposition didactique, p. 66.
[5]ibid. p.68.

On peut donc s'interroger sur son devenir dès l'instant où ce deuxième temps disparaît dans les programmes actuels du second cycle.

6. La méthode utilisée

Afin d'étudier l'évolution de la transposition didactique du théorème de Thalès au cours des 30 dernières années, l'étude s'est appuyée sur l'analyse d'ouvrages significatifs de "leurs temps", c'est-à-dire de manuels qui semblent avoir porté l'esprit des programmes de leur époque, et qui étaient massivement utilisés par les enseignants pour les programmes de :

- 1964, M. Monge et M. Guinchan (Belin, troisième)
- 1971, M. Queysanne et A. Revuz (F. Nathan, quatrième et troisième)
- 1978, Collection A. Mauguin (Istra, quatrième et troisième)
- 1989, Pythagore (Hatier, quatrième et troisième)

A travers les exercices proposés, on a aussi tenté d'étudier les places qui sont attribuées à l'enseignant et à l'élève par rapport à ce savoir.

Mais reprenons les choses à leurs débuts, avant le grand bouleversement et tentons de décrire le contexte dans lequel évoluait le Théorème de Thalès dans les programmes de 1964.

II. Le programme de 1964

1. Un terrain bien préparé

Ce qui frappe à la lecture du programme de 1964 (voir annexe p. 84) est l'environnement riche dans lequel le théorème de Thalès trouve sa place.

En effet, outre le programme de quatrième, qui a étudié les applications particulières du théorème de Thalès aux parallèles équidistantes et aux théorèmes relatifs aux milieux dans un triangle, son étude en troisième est précédée de celle des rapports de longueurs et de mesures algébriques de segments. Ces études préalables plantent avantageusement le décor dans lequel il va prendre place.

Dans l'ouvrage étudié (Monge-Guinchan, Belin, troisième), le problème décrit précédemment (concernant la possibilité de la mesure d'un segment grâce à l'ensemble de nombres dont on dispose) est évoqué à travers la distinction opérée entre segments commensurables et incommensurables. Une fois admise la possibilité de l'écriture du rapport de deux segments incommensurables, la définition des longueurs par changement d'unité est donnée

Après avoir défini la colinéarité de deux vecteurs et la mesure algébrique, on s'intéresse à l'étude des points qui divisent un segment dans un rapport réel (relatif) ou arithmétique (positif) donné. Cette question présente deux avantages au moins pour l'étude ultérieure du théorème de Thalès.

- 1 Les élèves ont déjà manipulé des rapports du type $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ et $\frac{MA}{MB}$

On peut donc supposer une certaine aisance dans le calcul algébrique qui s'en suivra.

- 2 La signification géométrique de l'écriture de ces rapports. est donnée. En effet, on démontre l'unicité de M dans le cas $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ avec $k \neq 1$ et l'existence de deux points M_1 et M_2 dans le cas $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k \neq 1$.

Cette étude est importante dans la mesure où l'unicité de M (résultant de l'écriture de rapports de mesures algébriques) simplifie l'écriture et la démonstration de la réciproque du théorème de Thalès.

Dans le prolongement de ce cours apparaît ainsi une grande diversité d'exercices qui donnent sens à l'écriture $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$: calculs de rapports, de longueurs connaissant leur rapport et une relation, de rapports de mesures algébriques, d'abscisses, de relations algébriques...

Ces exercices sont précédés de travaux pratiques portant sur les parallèles équidistantes, la manipulation de $\frac{MA}{MB}$ pour différentes positions de M, de calculs littéraux, de l'étude de la position de points dans un rapport donné.

Ainsi le terrain dans lequel de théorème de Thalès va trouver place a été déjà bien retourné, le décor bien planté, la cohérence de la notion qui va être introduite assurée.

2. Le chapitre sur le théorème de Thalès

Dans le chapitre suivant le théorème de Thalès est démontré dans le cas où les segments sont commensurables (notion étudiée précédemment) en utilisant le théorème des parallèles équidistantes (étudié en quatrième et revu dans les TP du chapitre précédent). Il est admis dans le cas où les segments sont incommensurables (rapport irrationnel). Dans la foulée, son écriture est établie pour les mesures algébriques et les vecteurs (les auteurs écrivent le "rapport de deux vecteurs").

Par la suite, l'ouvrage prend le parti d'établir la réciproque dans le cas général et de l'appliquer aux cas particuliers du triangle et du trapèze. Du théorème découlent aussi les propriétés des bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle.

Les travaux pratiques portent sur : la division d'un segment en segments de longueurs proportionnelles, la construction d'une 4^e proportionnelle, d'un point divisant un segment dans un rapport rationnel donné, des calculs de longueurs dans un triangle notamment.

Les exercices portent sur l'utilisation des théorèmes direct et réciproque, l'établissement de relations algébriques telles que le théorème de Ménélaüs.

3. Sa place dans la chronogénèse du savoir en troisième

Comme "objet transactionnel entre passé et avenir", quelle fonction remplit-il pour le second temps de cette dialectique ?

La partie 2 du programme de géométrie plane stipule laconiquement: "Triangles semblables. Cas de similitude". L'ouvrage ménage donc un chapitre de transition intitulé : "Divisions semblables sur deux droites parallèles". Celui-ci permet de définir les triangles homothétiques par le sommet, au moyen de l'étude des 3 situations de Thalès dans un triangle. En découle la définition du rapport d'homothétie défini comme rapport des mesures algébriques des côtés homologues. Le chapitre se termine par l'étude des divisions semblables sur des droites parallèles (théorèmes direct et réciproque) comme conséquence de la notion d'homothétie.

L'homothétie débouche naturellement sur les triangles semblables et sur les trois cas de similitude de deux triangles. Ceux-ci vont ensuite être le point commun autour duquel s'articuleront les 3 chapitres à venir :

- Ils permettent de démontrer les relations métriques dans le triangle rectangle (dont le théorème de Pythagore) ; sont aussi établies leurs réciproques.
- Ils établissent les définitions du cosinus et de la cotangente, du sinus et de la tangente.
- Ils permettent d'établir la puissance d'un point par rapport à un cercle.

On retrouve ensuite la trace directe ou indirecte du théorème de Thalès dans quatre autres chapitres. Tout d'abord dans le chapitre sur les aires où est établi le rapport des aires de deux triangles semblables. Puis dans la partie géométrie dans d'espace, le théorème de Thalès est évoqué dans les exercices consacrés "au parallélisme de droites et de plans". Enfin en algèbre, le théorème de Thalès et sa conséquence sur les divisions semblables sur deux parallèles, permettent de démontrer que les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines sont des droites.

Ainsi, dans le programme de 1964, le théorème de Thalès, établi dans la partie 1 de la géométrie plane, irrigue les parties 2, 3, 4 et est utilisé dans la partie 6 de cette même géométrie plane. On le retrouve dans les exercices de la partie 1 de géométrie dans l'espace et dans la partie 4 du programme d'algèbre consacré aux fonctions linéaires et affines. D'autre part le terrain a été bien préparé (en quatrième et troisième) pour la venue de cet hôte de choix qui gouvernera la quasi-totalité de la géométrie plane et étendra son influence au-delà. Son existence en tant qu'objet de savoir enseigné se justifie par la cohérence interne qu'il fournit au programme. Toute tentative, pour l'évacuer ou même le déstabiliser, entraînerait l'ébranlement de l'édifice.

Il règne en maître, ce qui semble en soi légitime lorsqu'on porte le nom du fondateur de la géométrie en Occident, et nul ne songerait à renverser son trône. C'est pourtant l'entreprise à laquelle va s'attacher la réforme (ou plutôt la révolution !), qui s'annonce en montrant qu'en fait, le roi est nu !

III. Le programme de 1971

1. Le parti-pris axiomatique

Comme on le sait le parti pris, lors de la réforme de 1971 (voir annexe p. 85), consistait à construire grâce à une axiomatique explicitée le plus souvent possible, les concepts et les objets à enseigner dans le corpus du programme. Ainsi dans l'ouvrage de quatrième étudié (Queysanne-Revuz, Nathan, quatrième), "fidèle à l'esprit du programme", l'élève après avoir deux paragraphes durant manipulé quelques instruments (règle, crayon et équerre) est invité à jouer dans la cour des grands "les règles du jeu mathématique"! Il s'agit, après avoir dressé quelques constatations expérimentales de l'observation du *plan physique*, d'établir les règles du jeu (les axiomes) qui permettront de transformer ce *plan physique* en un modèle idéal : *le plan mathématique.*

Ainsi sont tout d'abord posés 3 axiomes d'incidence desquels vont découler la définition et l'étude des droites parallèles et sécantes.

Après ces premières passes possibles grâce à ces 3 règles du jeu, l'élève découvre que si l'on n'y prend garde l'outil qui vient d'être construit, ne peut que lui permettre de jouer avec 4 points non alignés. Ainsi donc "le modèle idéal" en cours de construction ne colle-t-il pas au plan physique duquel on cherche à s'abstraire. Et c'est même celui-ci qui nous fait prendre conscience que :

"de nouveaux axiomes devront être ajoutés à nos axiomes d'incidence pour que notre plan mathématique soit un meilleur modèle du plan physique". (p. 163)

Dès lors, nous voilà partis en quête d'axiomes que nous glanerons de chapitre en chapitre.

2. L'arrivée de la droite euclidienne

Le chapitre 17 commence ainsi par le rappel de l'insuffisance des axiomes d'incidence et annonce la venue d'un nouvel axiome qui *"permettra entre autres choses, de dire qu'il y a d'une certaine manière, autant de points sur une droite que d'éléments dans l'ensemble des nombres réels".*

Nous voilà donc arrivés à l'instant où va être dévoilé l'un des "points cachés" du théorème de Thalès évoqué dans la première partie : on admet l'existence d'une bijection g de (D) sur $\mathbb{R}$ appelée graduation de (D).

Il s'en suit que l'on admet qu'il existe une famille de bijections g de (D) sur $\mathbb{R}$ telles que pour deux quelconques de ces bijections g et g' et pour tout point M de (D), il existe deux réels a et b tels que: $g'(M) = ag(M) + b$.

C'est la célèbre et souvent raillée définition de la droite euclidienne du programme de 1971 donnée p. 65 des instructions officielles. La possibilité de la graduation de toute droite du plan débouche alors sur la notion de distance.[6]

3. L'arrivée de l'axiome de Thalès

La droite n'a en soi qu'un intérêt limité et c'est à nouveau le monde physique (duquel on a décidément bien du mal à s'arracher) qui va une fois de plus nécessiter l'introduction d'un nouvel axiome.

---

[6]Voir à ce sujet Y. Chevallard et M_A JOHSUA : Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance in "la transposition didactique".

"Un plan mathématique est appelé plan réel, s'il vérifie les deux axiomes suivants :

P_1) Toute droite de ce plan est une droite réelle.

*P_2) **(Axiome de Thalès).** Pour trois droites quelconques D, D' et D" de ce plan telles que la troisième ait une direction distincte de celles des deux premières, si p désigne la projection sur D' parallèlement à D".*

Pour toute graduation g de D, (A, B) étant le repère de cette graduation:

L'abscisse dans la graduation g d'un point quelconque de D, est égale à l'abscisse de sa projection p(M) dans la graduation g' de repère (p(A),p(B))." (p. 194)

La réciproque de la propriété de Thalès est immédiate et assurée par le fait que la graduation est une bijection.

Il s'en suit l'application directe et réciproque au triangle et la conservation du barycentre de deux points par projection. Le problème classique découlant du théorème de Thalès et consistant à partager un segment dans un rapport donné est alors formulé en terme de "construction graphique du barycentre de deux points".

On montre par la suite qu'une fois choisies des graduations sur deux axes et une projection p de l'un sur l'autre, alors il existe un réel k tel que quel que soit le couple (M, N) de points d'un axe : $\overline{p(M)p(N)} = K x \overline{MN}$.

Il n'est plus alors nécessaire, pour ce nombre k appelé rapport de projection, de faire la distinction antérieure entre longueurs commensurables et incommensurables, puisque $\mathbb{R}$ a été construit.

4. Quelques conséquences sur la topogénèse

Les exercices proposés sont assez pauvres. Certains sont relatifs au calcul ou à la comparaison d'abscisses par application directe de l'énoncé de l'axiome ; du résultat trouvé s'en suit l'utilisation de la réciproque. D'autres demandent la construction du point divisant un segment dans un rapport donné, présenté grâce à la conservation du barycentre par projection. D'autres, enfin demandent le calcul du rapport de projection ou le calcul d'abscisses connaissant ce rapport. Ainsi les exercices de l'ouvrage sont-ils avant tout des applications calculatoires du cours.

La transposition didactique du théorème de Thalès pendant la réforme de 1971 influe donc sur la topogénèse, c'est-à-dire sur les places et les rôles dévolus à l'enseignant et à l'élève corrélativement au savoir. Le maître faisant la théorie, ici l'axiomatisation du plan euclidien, la tâche attribuée à l'élève consiste à constater de manière empirique (par le recours à la droite ou au plan physiques) la pertinence ou l'insuffisance de l'axiomatique construite.

Une fois la théorie apprise par l'élève, son travail revient à l'appliquer à l'intérieur d'exercices essentiellement calculatoires, finalement de peu d'intérêt par rapport au savoir. Comment pourrait-il en être autrement puisque le rôle de l'élève ne consiste, ni à faire la théorie, (c'est le rôle du maître), ni à explorer par lui-même des bribes du "savoir savant" que le maître n'a pas enseigné (problèmes sur des relations algébriques ou des "curiosités géométriques" issues du théorème par exemple).

5. Quelques conséquences sur le contrat didactique

A travers les problèmes, l'élève éprouve bien souvent le sentiment de "faire des mathématiques", de cheminer avec le maître sur un territoire qui leur est un peu commun à tous les deux. Cette place ne lui est plus attribuée dans la topogénèse découlant de cette transposition didactique du théorème de Thalès. Ainsi s'en trouvent modifiés les termes du contrat didactique : le professeur fait la théorie, l'élève l'apprend; le professeur est détenteur du savoir, l'élève applique ce que le professeur a transmis. Dans la mesure où les phases d'action, de production de l'élève en tant que sujet sont limitées à la portion congrue, quelle construction du savoir par l'élève s'opère-t-il et à quel coût ? Ce point de vue doit être tempéré par le fait que l'étude d'un ouvrage est un moyen bien indirect pour l'analyse du contrat qui, en dernière analyse, se passe entre acteurs d'un système didactique. Cependant, on ne peut s'empêcher de rapprocher l'impression qui se dégage de ce que G. Brousseau écrit sur l'apprentissage et l'enseignement :

"Un des apports fondamentaux de la didactique moderne a consisté à montrer l'importance du rôle joué dans le processus d'enseignement par les phases d'apprentissage où l'élève travaille de façon presque isolée sur un problème ou dans une situation à propos desquels il assume un maximum de responsabilités. Cet apport s'appuie sur une évolution des conceptions à propos des théories de l'apprentissage: pour l'élève, le sens des connaissances dont l'acquisition est formellement observé chez lui, est en fait constitué par l'ensemble des régulations d'actions dans lesquelles ces connaissances entrent. Mais l'apprentissage de ces régulations semble beaucoup plus coûteux (voire impossible) à obtenir par la communication de savoirs que comme production du sujet lui-même sous sa responsabilité par adaptation. Cette orientation a conduit à opposer, parfois de façon un peu factice et excessive, des "situations d'enseignement" où l'enseignant apporte toutes les informations et ne délègue aucune responsabilité, et des "situations d'apprentissage" où il se passe l'inverse. Devant les objections qui ont surgi contre les premières, notamment après certaines tentatives de réformes qualifiées de formalistes, il a été envisagé de transformer le plus possible les situations d'enseignement en situations d'apprentissages".[7]

6. L'"objet transactionnel entre passé et avenir"

Dans la logique du changement accompli, la manière dont est présenté le théorème de Pythagore qui "subsiste" en troisième s'inscrit dans le parti-pris axiomatique qui préside à l'exposé de la géométrie. Celui-ci renvoie donc le théorème de Thalès à son statut d'"objet transactionnel entre passé et avenir", comme étant un axiome nécessaire à un moment donné de la construction de la géométrie plane, mais insuffisant dès lors qu'on se préoccupe d'étudier un autre concept, à savoir l'orthogonalité.

Comme toujours le plan et la droite physiques sont évoqués pour introduire la notion d'orthogonalité...grâce à l'équerre !

Cette observation débouche dans l'ouvrage de troisième de la même collection sur "deux axiomes de l'orthogonalité" dont le développement permet d'introduire la

---

[7]G.Brousseau."Le contrat didactique: le milieu", Recherches en didactique des mathématiques, 9-3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988, p.323.324.

définition de la projection orthogonale et de son rapport. Celui-ci n'est qu'un cas particulier du rapport de projection dont l'existence et la propriété avaient été établies comme conséquence de l'axiome de Thalès en quatrième. A ce stade est introduit un nouvel axiome dit "de définition d'un plan euclidien" et qui pose la symétrie du rapport de projection orthogonale d'un axe sur un autre.

De cet axiome découle alors le théorème de Pythagore :

"Si k et k' sont les rapports de projections orthogonales d'un même axe sur deux axes de supports perpendiculaires, on a la relation : $k^2 + k'^2 = 1$*".*

L'obsolescence de l'objet d'enseignement "Théorème de Thalès" est donc garantie par l'existence d'un champ qu'il ne permet pas d'explorer ; elle est inscrite dans sa fonction. Il a permis d'établir l'existence du rapport de projection mais n'est plus opératoire dans le domaine qui nous intéresse en troisième, si n'y sont pas adjoints plusieurs autres axiomes. Le théorème de Thalès est ainsi un axiome avec la puissance mais aussi les limites que cela implique.

Ainsi l'objet nouveau "orthogonalité" permet-il à l'enseignant "de nourrir le fonctionnement" de la relation didactique dans cette partie géométrique du programme.

IV. Le programme de 1978

1. Une plus grande liberté ?

La réforme des mathématiques modernes connut le bonheur que l'on sait! Aussi un arrêté du 16/11/1978 définit de nouveaux programmes de quatrième et troisième qui rentrèrent en application en quatrième en 1979 et en troisième en 1980 (voir annexe p. 86). Ils spécifient conjointement :

"En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises ; elles permettent d'obtenir les autres par voie déductive".

Il n'y a donc plus de référence explicite à la nécessité d'une construction axiomatisée du déroulement du cours de mathématiques. Le mot même d'axiome est banni et dans ce qu'il faut admettre, on ne sait s'il s'agit d'une nécessité (un axiome résultant de l'axiomatique choisie par le professeur et qui peut varier) ou d'un théorème dont le professeur choisira de ne pas enseigner la démonstration. Il est révélateur de ce point de vue de constater qu'il n'est plus question, dans le programme officiel, de théorème ou d'axiome mais de PROPRIÉTÉ de Thalès. Les degrés de liberté apparaissent assez grands donc, et en géométrie notamment le programme de quatrième spécifie *"Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé".* Mais cette liberté est bien encadrée si on l'examine sous l'angle de l'introduction du théorème de Thalès.

En effet, elle vient se heurter au texte du programme. Il n'y a pas de construction de $\mathbb{R}$ et l'existence d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et une droite si elle est explicitement évoquée, reste, elle aussi pour partie, au niveau du pré-construit. Toute tentative d'en établir une formulation rigoureuse, à la manière de la présentation de 1971, est d'ores et déjà compromise !

2. Clair-obscur

Suivant les nouvelles directives du programme, l'ouvrage étudié (Mauguin, Istra, quatrième et troisième) prend le parti de montrer en quatrième l'insuffisance des rationnels (démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$), indique que Π n'est pas rationnel et admet l'existence de $\mathbb{R}$ comme "le plus grand ensemble des nombres", permettant de mesurer toutes les longueurs (p. 108.109), sans évoquer la construction de $\mathbb{R}$ par les suites décimales illimitées du programme de 1971. De même, l'ouvrage indique que dans le plan muni d'une distance, on peut réaliser une bijection des points d'une droite quelconque sur $\mathbb{R}$ et mentionne une méthode. On explicite qu'il y a de l'implicite !

Dans le prolongement de cette logique où on n'ose appeler les choses par leur nom, la "propriété" de Thalès ne figure plus au programme de quatrième, c'est-à-dire au début de l'enseignement de la géométrie s'appuyant sur le raisonnement déductif, mais en troisième. Ce choix lève la contrainte le présentant comme un axiome (programme de quatrième de 1971), et d'ailleurs l'ouvrage étudié ne s'y trompe pas qui le nomme très clairement théorème.

On voit donc que la place assignée en troisième par le programme, ainsi que l'environnement dans lequel la propriété de Thalès évolue, limitent singulièrement les degrés de liberté énoncés dans les attendus du programme.

3. L'arrivée du théorème de Thalès

L'ouvrage étudié tente une démonstration comme il sied traditionnellement à de tels objets de savoir mathématique. Il s'agit en fait, comme il l'indique lui même, d'une "étude préparatoire" visant à pointer le sens et la spécificité du théorème de Thalès.

On étudie d'abord le cas particulier où $\overline{MN} = 3 \times \overline{AB}$, ce qui autorise à supputer que la généralisation à $\overline{MN} = p \times \overline{AB} (p \in \mathbb{Z})$ est possible.

Suivant cette logique, l'observation du cas $\overline{MN} = \frac{5}{3} \times \overline{AB}$ conduit à admettre la généralisation à $\overline{MN} = \frac{p}{q} \times \overline{AB} (\frac{p}{q} \in \mathbb{Q})$.

On admet alors le cas si $\overline{MN} = k \times \overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = k \times \overline{A'B'}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Entre observation empirique, démonstration dans des cas particuliers, généralisations admises, professeur et élève évoluent à la recherche du savoir. Si les contours de l'objet finissent par être appréhendés, qu'en est-il de l'objet lui même ?

Le théorème est énoncé dans les deux formes :

Si $\overline{MN} = k \times \overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = k \times \overline{A'B'}$ et $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$.

S'en suivent les applications au triangle, et l'établissement de la réciproque du théorème de Thalès. La démonstration classique est établie pour 3 parallèles et 2 rapports égaux, puis appliquée aux cas particuliers de 3 droites et du triangle. Le chapitre se termine par des problèmes de construction, recherche de point partageant deux autres dans un rapport algébrique donné, 4^e proportionnelle.

4. Quelques conséquences sur la topogénèse

Les exercices proposés redeviennent, après la sécheresse de ceux de la réforme de 1971, d'une assez grande variété et richesse. On demande l'écriture et la comparaison de quotients de mesures algébriques, la résolution de problèmes de construction, des calculs d'abscisses, de longueurs. Les théorèmes direct et réciproque de Thalès retrouvent leur place dans de "vrais problèmes de géométrie". On y démontre des relations algébriques telles que le théorème de Ménélaüs. D'autre part l'apport de l'étude des transformations est intégré dans des exercices où on invoque des projections, symétries centrales, translations.

Par bien des points l'ouvrage propose un choix d'exercices comparables à ceux de la réforme de 1964. Y sont adjoints un vocabulaire et des prolongements empruntés au programme de 1971 concernant les transformations.

Il semblerait qu'une certaine dose de pré-construit dans l'exposition du cours permettent de gagner une certaine richesse au niveau des exercices. Dans un système de vases communicants accroître l'explicite restreindrait la place réservée à l'activité de l'élève et réciproquement. C'est en tout cas un constat qui pourrait se dégager de la confrontation de ces programmes.

5. Quelques conséquences sur "la dialectique ancien-nouveau"

Dans le programme de 1978 et sur la même ligne que le théorème de Thalès, apparaît la multiplication d'un vecteur par un réel. La continuité est établie par le fait que la manipulation de relations telles que $\overline{AM} = k \times \overline{AB}$ sur une droite lors de l'étude du théorème de Thalès débouche naturellement sur $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$. L'ouvrage développe ensuite l'étude de la multiplication par un scalaire, de façon à établir les quatre axiomes d'espace vectoriel dans lesquels elle intervient.

L'établissement de $a.(\vec{U} + \vec{V}) = a.\vec{U} + a.\vec{V}$ s'appuie sur l'étude du cas particulier $a = 3$ dans lequel la relation est démontrée grâce au théorème de Thalès. Ce résultat permet, dans le programme de seconde, de manipuler le calcul vectoriel nécessaire alors à l'étude des homothéties et du barycentre. Il assure ainsi le vieillissement, "l'obsolescence interne" du théorème, qui sera consacrée lors de l'étude explicite des espaces vectoriels en première.

Ce vieillissement est d'autre part inscrit dans la logique interne du programme de 1978, notamment dans l'établissement du théorème de Pythagore. En effet, entre la ligne du programme consacrée à "la propriété de Thalès" et celle consacrée à "la propriété de Pythagore", se glisse une ligne mentionnant le "rapport de projection orthogonale" et sa symétrie. Ce point va servir de transition entre ces deux "notions et propriétés fondamentales " comme les appelle le programme lui-même.

Ainsi, le théorème de Thalès permet d'établir que : quels que soient les points A et B d'une droite graduée se projetant orthogonalement en A' et B' sur une autre droite graduée, le réel $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ne dépend pas du choix de A et B. Ce réel s'appelle le rapport de projection orthogonale de la première droite graduée sur la seconde.

Une fois démontrée la symétrie de ce rapport (en utilisant les propriétés de la symétrie orthogonale par rapport à un des axes de symétrie de la figure constituée par ces 2 droites graduées sécantes) sont établies les relations métriques dans le triangle rectangle. L'une d'entre elles est le théorème de Pythagore. Le rapport de projection orthogonale permet aussi de définir le cosinus d'un angle et ouvre ainsi le champ de la trigonométrie (p. 215).

Ainsi, après "la Réforme des mathématiques modernes " de 1971, le programme qui lui succède en 1978 ouvre une place importante au théorème de Thalès. Considéré comme une des "notions et propriétés fondamentales", même si son introduction renvoie à des pré-construits implicites, une fois établi il trouve à l'intérieur du programme un environnement qui lui permet de vivre. Il assure la cohérence interne d'une partie du corpus de la géométrie, à travers les notions de produit par un scalaire et rapport de projection orthogonale, ce dernier débouchant sur le théorème de Pythagore et la trigonométrie. Cette cohérence interne assure "l'obsolescence interne" et permet à la dialectique ancien-nouveau de fonctionner.

V. Le programme de 1989

1. De nouvelles orientations

Le programme de 1978 fut enseigné jusqu'à la rentrée 1989 en troisième. A partir de cette date, rentrèrent en application de nouveaux programmes élaborés en 1985 (voir annexe p.), et issus d'une refonte complète de l'enseignement au Collège, dans l'ensemble des disciplines. Diffusés en livre de poche, les programmes et instructions sont préfacés par le ministre de l'Education Nationale en personne. Il y écrit :

"L'évolution accélérée des connaissances nécessite un examen approfondi des savoirs enseignés. La publication des nouveaux programmes des collèges répond à cette nécessité".[8]

Dans cette direction, les instructions préconisent de :

"souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...)".[9]

---

[8]J.P. Chevallard:"Collèges. Programmes et instructions", BO. CNDP, 1985, p. 7
[9]Instructions générales. Choix des méthodes."Collèges. Programmes et instructions", BO CNDP, 1985, p. 81.

Cet aspect "utilitariste" des mathématiques marque à tel point le climat de l'époque, qu'on en trouve de nombreuses traces dans **"le rapport de mission sur l'enseignement des mathématiques"**, effectué à la demande du ministre de l'Education Nationale de 1989, et rédigé par Didier Dacunha Castelle, mathématicien qui deviendra par la suite Président du Conseil National des Programmes, poste qu'il vient de quitter dernièrement.

Ainsi peut-on y lire à propos de l'Ecole et du Collège :

"A ce niveau, les mathématiques apprises sont non seulement utiles, mais indispensables dans la vie quotidienne (privée comme professionnelle). Il faut s'assurer de l'efficacité de cet enseignement". (p. 2).

La nécessité de changements fréquents de programme est affirmée : *"La place des mathématiques doit être périodiquement réexaminée en fonction des développements scientifiques et techniques, des intérêts des élèves et de ceux de la société". (p. 3).*

Il s'en suit que sont assignés des buts sociaux à l'enseignement des mathématiques :

"Le but premier est de donner à tous une formation de base (maths pour tous) ..Le but second est de former plus de scientifiques." (p. 4)

2. Une rupture revendiquée

De ces nouvelles orientations, il découle que :

"Il est maintenant absurde de parler de l'enseignement des mathématiques en se référant seulement aux "maths modernes" des années 70. L'échec mondial de cette réforme a entraîné une nouvelle phase de réflexion, appuyée par le développement des applications des mathématiques dans bien des domaines, l'émergence des calculatrices." (p. 5).

Une page de l'enseignement des mathématiques semble bien être tournée.
L'argumentation avancée par l'institution et la "communauté pensante" qui y est rattachée, constitue une belle illustration du rôle assuré par la "noosphère"[10] lors de l'élaboration et de la mise en oeuvre de ces nouveaux programmes :

"La société se rappelle continuellement au système d'enseignement par ses demandes. Face à elles, la noosphère réalise un travail de négociation qui doit permettre de transmuer les demandes "sociétales" en termes acceptables par le fonctionnement didactique, notamment par leur retranscription en termes de contenus à enseigner...C'est ainsi que ses agents l'ayant souvent intériorisée comme une exigence allant de soi, la noosphère cédera à la demande de se conformer au modèle culturel dominant de ce que c'est que savoir et comprendre. Elle acceptera de présenter les

---

[10]Pour Y.Chevallard, c'est le lieu où l'on pense le fonctionnement didactique.

concepts mathématiques dans des termes "concrets", c'est à dire "pensables" par qui n'a aucune pratique mathématique".[11]

Ainsi les instructions officielles relaient-elles ces demandes "sociétales" en vue d'un aspect utilitariste des mathématiques :

"Cette démarche permet de bâtir des mathématiques à partir des problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour, d'utiliser les savoirs mathématiques dans des spécialités diverses." . (p. 77).

Restent alors à inventer les méthodes de cet enseignement des mathématiques. Pour asseoir la position qui va être prise, on se réfère alors à la "science", ou à la recherche sur "l'appropriation des savoirs" par l'élève. Ainsi D. Dacunha Castelle, dans un paragraphe intitulé "rendre la démarche mathématique plus authentique et intégrer l'outil informatique", appuie son argumentation sur l'activité du chercheur en mathématiques. Il en expose les différentes phases (p. 12) : modélisation, résolution, validation, et précise que :

"... il semble nécessaire de reconstruire dans l'enseignement une démarche qui tienne fortement compte du cheminement précédent, afin de développer chez l'élève, curiosité, sens critique et intérêt".

De ces attendus découle sa conclusion sur la manière d'enseigner les mathématiques :
"C'est dans l'activité mathématique que l'élève peut se former. Si cette activité est bien vécue, l'appropriation des connaissances à l'école ou après l'école se fera plus aisément".

Il s'en suit que : *"Il faut poser des problèmes qui aient du sens pour l'élève et construire avec lui les outils nécessaires à leur résolution". (p. 12)*

3. La fonction sociale de cette orientation "utilitariste"

A ce stade, la boucle avec la dimension utilitaire des mathématiques sur laquelle la "noosphère" met l'accent, est bouclée. Il y a coïncidence entre le but (utilitaire) des maths, et les moyens de leur enseignement. Relevons d'ailleurs à ce propos, l'utilisation (surabondante dans les instructions officielles p77 à 82) du terme, si révélateur, "d'outil". C'est donc sous la forme d'activités que s'enseigneront les mathématiques. Ce qui, précisent les instructions,

"favorise le développement des capacités de travail personnel de l'élève, et de son aptitude à chercher, à communiquer, et à justifier ses affirmations". (p. 78).

Notons que cette approche assure alors une double fonction :
- En renouant avec l'idéologie de "l'enfant d'abord", "l'enfant au centre", ou "l'enfant singulier", elle est une tentative de résolution des difficultés posées par la gestion de la grande hétérogénéité du public de Collège.
- Elle est en phase avec l'idéologie de son époque.

---

[11] Y.Chevallard, Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques, Etude du cas de l'algèbre élémentaire, IREM d'Aix-Marseille, 1989, p. 82.

4. Les nouveaux rapports à l'objet

C'est dans le contexte décrit précédemment qu'il faut replacer les transformations de l'enseignement du "théorème de Thalès" La prise en compte de ce cadre nouveau permet d'étudier l'évolution des rapports institutionnel et personnels (pour l'enseignant et l'élève) à cet objet de savoir[12]. Dans le cadre de cette approche :

"Le système des rapports institutionnels à ces objets, relativement à la position p, constitue le contrat institutionnel, $C_{I,p}$, dont on peut dire qu'il "énonce", ou que s'y inscrit, la manière, prescrite par l'institution, de se comporter, dans I, pour les acteurs en position p". [13]

Appliquant ce modèle à la description du cadre officiel des nouveaux programmes, l'insistance mise à travers les instructions officielles et le rapport Dacunha-Castelle sur l' "aspect utilitariste" des mathématiques, fonde le nouveau contrat institutionnel à l'intérieur duquel il faut désormais appréhender le "théorème de Thalès". Sa désignation change à nouveau d'ailleurs, ainsi que ses rapports avec d'autres objets. En janvier 1989, des instructions complémentaires précisent :

Les méthodes :

"Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque : cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points."

Les contraintes :

"Cependant :
- l'énoncé général du théorème de Thalès est hors programme
- toute intervention de mesures algébriques est exclue
- la construction d'une moyenne géométrique n'est pas demandée".

5. Conséquences pour l'enseignement du théorème de Thalès

Dans l'ouvrage étudié, et suivant le plan spécifié par ces nouvelles instructions, le chapitre consacré à "la propriété de Thalès" débute par une activité intitulée "l'île mystérieuse". Il s'agit, à partir d'un texte de Jules Verne dans lequel un ingénieur mesure la hauteur d'une falaise avec un bâton et son "rayon visuel", de dégager, en présupposant la proportionnalité des longueurs, le théorème de Thalès dans le triangle ainsi formé. La phase "expérimentale" préconisée par les instructions officielles est ainsi réalisée pour la partie directe du théorème.

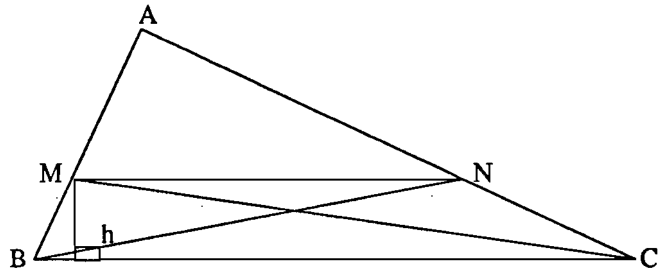
Deux activités permettent alors de "donner une justification simple de la **propriété** de Thalès" p. 113 et p. 114.

---

[12]Y.Chevallard, "Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", 1989, IREM d'Aix-Marseille.
[13]Y.CHEVALLARD op.cit.

Dans la 1° activité, la propriété est établie dans le cas d'un triangle rectangle, la sécante étant parallèle à l'hypoténuse. A cette occasion, la démonstration évoquée rappelle de "vieux souvenirs", puisque comme celle d'Euclide, elle fait appel aux calculs d'aires de triangles.

Comme aire BMN = aire CNM, alors par addition de aire AMN,
on a : aire ABN = aire ACM
donc ANxAB= AMxAC et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$



Dans la 2° activité, on étudie d'abord, toujours pour le triangle rectangle, le cas où la sécante est parallèle à un côté de l'angle droit. La démonstration fait appel au cosinus qui a été étudié en quatrième. Puis on se sert du résultat établi dans le triangle rectangle pour montrer la propriété dans un triangle quelconque en utilisant une de ses hauteurs. Enfin on étudie le cas où la parallèle est sécante " à l'extérieur" du triangle. Le résultat est consigné dans la (bien-nommée, compte tenu du contexte "utilitariste") "boîte à outils" p. 120, où on y adjoint la propriété complémentaire (non démontrée) sur la proportionnalité des segments portés par les parallèles.

La même "démarche expérimentaliste" que celle de la mesure de la falaise, conduit, dans le cas de l'observation de deux barres trouées de mécano, à l'établissement de la réciproque. La propriété réciproque est consignée dans la "boîte à outils", en se référant aux trois types de figures possibles, sans mentionner explicitement que l'ordre dans lequel se trouvent les points est important. En effet, "l'interdiction" portant sur les mesures algébriques, empêche d'assurer le parallélisme à partir de l'égalité de rapports de longueurs.

Une utilisation "pratique" du théorème de Thalès est proposée en activité (le tracé d'escalier), de même qu'une autre utilisant les théorèmes direct et réciproque de Thalès. Les activités se terminent par la mise en évidence des coefficients d'agrandissement des aires et des volumes.

6. Une dialectique "ancien-nouveau" bloquée

L'ouvrage propose des exercices nombreux et d'un grand éclectisme.

Comme cela a été fait pour l'étude des précédentes réformes on peut tenter de chercher dans la "mise en texte du savoir", ce qui va permettre à la "dialectique ancien-nouveau" assurant "l'obsolescence interne", de fonctionner. Dans le prolongement de cette approche, on pourrait rechercher si, comme lors des précédentes réformes, cette obsolescence interne, à travers la mise en texte du savoir, ménage des espaces pour la reprise, "l'après coup" pour l'enseigné, facilitant l'apprentissage.

"......le temps de l'enseigné semble bien être fait aussi de réorganisations qui annulent de paysages antérieurs pour en réinsérer les matériaux en des constructions inédites".[14]

Une "filiation naturelle" place le théorème de Pythagore à la suite de celui de Thalès. Or dans le programme de 1989, celui-ci passe de Troisième en Quatrième où faute "d'outils" (mathématiques) suffisants, il ne peut d'ailleurs être démontré. De même en est-il du cosinus qui trouve lui aussi place dans les programmes de quatrième. Un "deuxième débouché" du théorème de Thalès se referme lui aussi. Enfin le théorème de Thalès pouvait servir à l'établissement de la forme canonique de l'équation d'une droite. En troisième où ce point du programme demeure, l'ouvrage étudié (Pythagore, Hatier) mentionne une activité p. 170.171 où l'on se borne à constater que l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est $y = ax+b$.

Ainsi, les fonctions traditionnelles qu'assumait le théorème de Thalès pour l'introduction et l'étude de nouveaux objets de savoir semblent-elles singulièrement écornées. Un point nouveau apparaît cependant au programme. Il s'agit du cône et de la pyramide, de leur section par un plan parallèle à la base. L'ouvrage y consacre deux activités p. 218.219 dont les objectifs sont entre autres, le réinvestissement du théorème de Thalès. Celui-ci est alors utilisé pour le calcul des dimensions de la "petite pyramide" ou du "petit cône" obtenu après section, ainsi que pour le calcul de leur volume.

7. Le "vieillissement historique"

De l'étude du programme de 1989 et de l'ouvrage utilisé, ressort une rupture par rapport à la tradition antérieure de l'enseignement du théorème de Thalès dans les trois précédents programmes. On peut tenter d'avancer qu'elle assure le renouvellement d'objets atteints par leur "vieillissement historique" :

"Ce vieillissement historique des objets d'enseignement a deux faces : d'une part, il ne permet pas de maintenir adéquate la différence des places didactiques ; d'autre part, vis-à-vis de la société (les parents, les contribuables....), il ne permet plus (le cas échéant), de marquer la différence entre savoir "laïc" et savoir des "clercs", ce qui tend à gommer la légitimité sociale du projet d'enseignement dont il atteint les objets: à l'enseignant, n'importe quel parent (ou presque) serait substituable dans sa tâche d'enseignement, n'était le temps qui manque".[15]

Qu'en est-il de ce vieillissement pour l'objet "théorème de Thalès" ?

Sans doute "bénéficie-t-il" du discrédit jeté sur l'option formaliste et axiomatique prise lors de la réforme des mathématiques modernes. Nombre d'enseignants ont pu constater le "traumatisme" infligé alors par le caractère artificiel et gratuit dont elles paraissaient affublées, à nombre de parents d'élèves. Allons jusqu'à dire que cette commotion risquait de "gommer la légitimité sociale du projet d'enseignement".

Il est révélateur de ce point de vue qu'on puisse alors lire dans le bulletin de l' APMEP de septembre 1985 (au moment où paraissent les nouveaux programmes), sous la plume de J. Kuntzmann un article intitulé "Pour une mathématique globale" :

---

[14] Y.Chevallard, La transposition didactique, p. 85.

[15] Y.Chevallard, La transposition didactique, p.78.

"Dans la présentation habituelle de la mathématique, chaque propriété occupe une place dans une théorie bien déterminée, ces théories s'articulant harmonieusement les unes aux autres. Ceci est satisfaisant pour l'esprit, surtout... quand on est mathématicien. Mais en réalité, si l'on veut prendre en compte ce qui préoccupe l'élève, l'homme de la rue, l'utilisateur de mathématique, on obtient ce que je nomme la mathématique globale (sur laquelle, nous savons d'ailleurs peu de choses)".[16]

L'auteur cite alors 3 exemples de "cette mathématique globale". Deux d'entre eux renvoient directement au sujet qui nous occupe.

Le premier concerne le théorème de Pythagore établi à partir des aires de deux carrés ; méthode dont nous retrouvons l'inspiration dans l'ouvrage de quatrième de la collection étudiée.

L'auteur note ensuite sous forme d'introduction au deuxième exemple :

"Il est amusant de remarquer que le théorème de Thalès, base de la théorie des triangles semblables peut être démontré lui aussi à partir des aires".

Nous revoilà bien proches de la démonstration qu'en donne Euclide 2300 ans plus tôt, et qu'utilisera quatre ans plus tard, à quelques adaptations près, l'ouvrage de troisième étudié ! Avec la même fonction ? La démonstration d'Euclide, reposant sur les aires de triangles, permet un contournement du problème des incommensurables.

De quoi s'agit-il alors ? Sans doute de créer de la nouveauté par rapport à l'ancienne manière de présenter le théorème ("il est amusant de remarquer"... écrit J. Kuntzmann). N'importe quel parent, "homme de la rue", connaissant la formule de l'aire du triangle et l'utilisation "des produits en croix" (notions enseignées en sixième), serait donc à même de "comprendre" le théorème de Thalès. "Ce n'était donc que cela !" peut-il alors se dire...

8. Les nouveaux termes du contrat institutionnel

Voilà donc les parents (entendons ceux qui portent intérêt, ou qui ont intérêt à l'école) "ramenés à bonne distance", mais par un procédé inverse de celui qui les avait éloignés une vingtaine d'années plus tôt.

Sans doute étaient-ils partis trop loin, au risque de ne plus voir la légitimité sociale fondant le projet d'enseignement de mathématiques "trop modernes". Dans l'ère "post-moderniste", ils pourront de nouveau à travers des activités de niveau accessible à la majorité d'entre eux (issue du baby-boom et qui a majoritairement fréquenté l'enseignement secondaire dans les années 1960-70), percevoir l'utilité sociale des mathématiques, pour peu qu'ils s'en donnent (un peu) la peine.

Or certains s'en donnent la peine, car les choses ont changé pour l'école, notamment sous la pression de la crise. Ainsi B. Charlot, dans son ouvrage "l'école en mutation" (1987) peut-il écrire :

---

[16] Bulletin n°350 de APMEP, p. 787.

"La fonction centrale de l'école n'est plus de diffuser une idéologie explicite en direction des diverses classes sociales mais de détecter, de développer et d'évaluer les aptitudes des jeunes et de répartir ceux-ci aux différents niveaux de la division sociale du travail en fonction de leurs aptitudes... Dès lors, le sens de l'école devient l'école elle-même, plus d'école encore, passer dans la classe suivante, le bon cycle, la bonne section, la bonne option. Le sens du savoir tend alors à se réduire à la fonction qu'il remplit dans l'école... Certains parents, ceux de la nouvelle petite bourgeoisie de techniciens, de cadres moyens, de professions para-médicales, d'enseignants, ceux parfois des couches populaires les plus mobiles, intériorisent les nouvelles règles du jeu, se fixent pour objectif d'épanouir au mieux toutes les aptitudes des enfants et deviennent parfois de véritables entraîneurs de leurs enfants, au sens sportif du terme".

Quant aux autres, futurs exclus du travail, déjà marqués par le dualisme social, l'activité de la "mathématique globale", dans laquelle est affaibli le savoir mathématique en jeu, permet de les occuper durant le temps qu'ils fréquentent le collège du quartier. Ainsi, dans Le Monde du 9/04/93 un Principal de "collèges de banlieues sous tension" (titre de la série d'articles) peut-il définir les termes du nouveau contrat institutionnel :

"Qu'attend-on des élèves ? D'être non violents, assidus, respectueux des matériels et des locaux, que le travail soit fait, ***peu importe qu'il soit bon ou mauvais.*** *S'il y a transgression des règles, alors il y a sanction".*

VI. En guise de conclusion

Nous voici donc désormais face à un programme dont l'affaiblissement, en terme de savoirs mathématiques mis en jeu pour l'étudier, ôte beaucoup de cohérence interne. Des chapitres subsistent au programme de troisième, dont on ne sait trop si c'est par "légitimité" au regard des notions antérieurement étudiées, ou par la force de la tradition qui fait qu'en France par exemple, le théorème de Thalès s'enseigne en troisième et le Baccalauréat se passe en terminale.

Car, à y bien regarder, moyennant la connaissance de l'aire du triangle, de la proportionnalité et de l'étude élémentaire du calcul sur les fractions, toutes choses étudiées en sixième et cinquième, la version 1989 du théorème de Thalès pourrait fort bien s'enseigner dans ces classes. "Et la projection ?" se récrieront ceux qui brandissent les attendus du programme. Notons que la démonstration par les aires l'ignore superbement, et que le concept fonctionne actuellement sous forme non explicitée de pré-construit dans la plupart des exercices proposés aux élèves.

Au point de désarticulation interne où en est arrivé le programme, nombre de chapitres flottent dans une sorte de "lévitation" qui interdit de les arrimer à d'autres. Ainsi en est-il de ces "curiosités" que sont devenus le théorème de Pythagore, le cosinus ou les vecteurs en quatrième.

A l'issue de cette étude, il apparaît que le problème qui concernait la difficulté de l'enseignement actuel du théorème de Thalès, difficulté à le faire vivre, est un problème qui dépasse, et de loin, les difficultés rencontrées dans un système didactique que l'on pourrait "isoler" : c'est-à-dire qu'il dépasse les possibilités accordées à un enseignant dans l'élaboration de "son cours", à moins qu'il ignore les contraintes institutionnelles que lui impose la transposition didactique !

L'étude de la transposition didactique du théorème de Thalès, permet de révéler l'ampleur des contraintes pesant sur l'enseignant, et aussi leurs déplacements au gré des changements de programme. La difficulté pour faire vivre le chapitre sur le théorème de Thalès renvoie ainsi à un système de contraintes qui surdéterminent la nature du savoir en jeu dans le système didactique et les places de l'enseignant et de l'élève par rapport au savoir. Il est bien évident que vu sous cet angle, le professeur d'un tel "système isolé" ne peut "s'en sortir" seul !

S'en trouvent aussi modifiés les rapports des élèves au théorème de Thalès ainsi enseigné. Un de ces changements débouche sur une première hypothèse qu'il faudrait vérifier. Elle consiste à penser que les élèves, davantage familiarisés avec la situation de Thalès dans un triangle, abordent plus facilement la notion d'homothétie au Lycée.

Si cette hypothèse s'avérait fondée, il faudrait alors noter par quel renversement du statut de l'objet ce rôle facilitateur est assuré. En effet, jusqu'à la mise en oeuvre du programme actuel, le statut qui lui était accordé lui permettait de nourrir l'étude mathématique de nombreuses autres parties du programme de Collège.

Dans le programme de 1964, la "position haute" qu'il occupait s'appuyait sur l'étude d'objets de savoir nécessaires à sa venue. La démarche volontairement choisie d'asseoir l'enseignement des mathématiques sur des bases axiomatiques explicitées, assurait sa position d'axiome incontournable en 1971. Cette "position haute" perdurait dans les programmes de 1978 qui corrigeaient le penchant formaliste de la réforme antérieure. Cette position lui permettait d'assurer l'introduction d'objets nouveaux dont le cosinus et le théorème de Pythagore par exemple étaient des constantes dans les trois programmes de 1964, 1971 et 1978. Ainsi le théorème de Thalès permettait de donner du sens au concept de projection, lui fournissant une épine dorsale qui allait soutenir la venue de ces objets nouveaux. A son tour, la projection leur conférait une place, et donc du sens, en référence à une construction ordonnée du savoir géométrique.

Avec le programme de 1989, un renversement est opéré. Enseigné en troisième, le théorème de Thalès ne donne plus vie aux objets traditionnels "cosinus" et "théorème de Pythagore" enseignés en quatrième. Les liens qu'il entretient avec la projection sont ténus puisque son étude limitée au cas particulier du triangle ne nécessite pas forcément le recours explicite au concept. Sa seule fonction se limite à introduire des situations d'agrandissement-réduction. Elle renvoie donc à la notion d'homothétie étudiée en seconde.

Ainsi, s'il s'avérait qu'il joue sous sa forme actuelle un rôle facilitateur d'apprentissages ultérieurs, ce ne serait plus en terme de savoir mathématique de référence mais plutôt en terme de situation mathématique de référence qu'il opérerait (celle du triangle coupé par une parallèle à la base). Ce point renvoie d'ailleurs à l'étude (qui reste à faire) de la fonction institutionnelle remplie par l'affaiblissement des contenus de savoir mathématique en jeu dans les actuels programmes.

A ce stade, un lecteur pressé pourrait à bon droit poser la question : "mais que faut-il faire alors ?". Une réponse (facile) consiste à dire que cette étude n'avait aucune prétention prescriptive mais tentait seulement une analyse. Cette réflexion, loin d'être une fuite, s'appuie sur le fait amplement signalé que la transposition didactique actuelle du théorème de Thalès n'est pas une "mauvaise" transposition, une bizarrerie ou un raté. On a pu noter à quel point "la société" se rappelait aux réformateurs des programmes actuels, si bien qu'ils en arrivaient à assigner de nouvelles fonctions sociales à l'enseignement des mathématiques, à repenser des contenus et des méthodes en cohérence avec ces nouvelles orientations. Cette transposition est donc le produit du développement d'une société qui, par l'intermédiaire de la "noosphère", attribue un rôle spécifique à l'école, à l'enseignement des mathématiques, à leurs contenus, à la manière dont les acteurs de l'institution didactique doivent se comporter vis-à-vis des savoirs à enseigner, à apprendre, etc. Ou en d'autres termes et plus brutalement: "la société a l'école qu'elle mérite" ! C'est pour cette école produit de cette société que cette transposition didactique du théorème de Thalès trouve sa place.

Rapprocher de la sorte, "la société" et "le théorème de Thalès", peut paraître de prime abord bien iconoclaste, voire franchement prétentieux ! C'est pourtant des rapports qui s'établissent sur les trente dernières années entre "la société pensant l'enseignement des mathématiques" et l'institution d'enseignement qui a pour charge de les traduire en actes, que résultent, en bout de course, les différentes transpositions de l'objet qui nous intéresse. Ce phénomène est particulièrement visible dans les périodes de rupture, telles que les illustrent les programmes "axiomatiques" de 1971 ou "utilitaristes" de 1989. Par suite, se confronter ainsi à "la société" apparaît de fait bien ambitieux et quelque peu prométhéen !

Remarquons que, comme nombre de notions du programme actuel, l'affaiblissement en terme de savoirs mathématiques dans lequel se trouve l'enseignement du théorème de Thalès, pourrait bien conduire à sa disparition pure et simple du Collège. Signalons d'autre part que depuis quelques temps, certaines publications laissent transparaître un nouvel intérêt pour le théorème de Thalès (article d'Evelyne Barbin dans le bulletin 388 d'avril-mai 1993 de l'APMEP signalant la parution prochaine d'un ouvrage de R. Bkouche *"Autour du théorème de Thalès"*). L'avenir nous dira si cet intérêt récent permet d'espérer une "revalorisation" du rôle joué par ce théorème dans les mathématiques enseignées au Collège, ou s'il est condamné à une dégénérescence certaine.

Cependant, l'avenir n'étant écrit nulle part, dans l'enseignement des mathématiques comme dans le développement des sociétés, signalons quelques points autour desquels pourrait s'engager une réflexion sur l'enseignement du théorème de Thalès et qui font qu'il reste un objet d'étude intéressant.

Il est à la charnière algèbre-géométrie, fait appel au concept de proportionnalité et aux dimensions géométriques auxquelles il renvoie (projection, mesures algébriques, agrandissement-réduction donc homothétie voire similitude). Il s'appuie sur des pré-construits plus ou moins explicités selon les réformes (proportionnalité, ensembles illimités de nombres et de points,...). Son utilisation nécessite entre autres la connaissance de certains algorithmes liés à la proportionnalité, aux fractions, au calcul algébrique. De quelle manière s'articule ce polysémisme, de quelle façon est-il mis en oeuvre par l'élève ? Toutes questions qui renvoient à la question beaucoup plus vaste des apprentissages.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G., 1992, "Eléments pour une ingénierie didactique", *Se former+*, Lyon.

BROUSSEAU G., 1988, "Le contrat didactique: le milieu", *Recherche en didactique des mathématiques*, 9.3, *La pensée sauvage, Grenoble.*

BROUSSEAU G., 1986, "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherche en didactique des maths,* 7-2, La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y., 1991, "La transposition didactique, Du savoir savant au savoir enseigné", *La pensée sauvage, Grenoble.*

CHEVALLARD Y., 1984 "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège 1ere partie, l'évolution de la transposition didactique", *petit x n°5, IREM de Grenoble.*

CHEVALLARD Y., 1989, "Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques; Etude du cas de l'algèbre élémentaire", *IREM, Aix-Marseille.*

CHEVALLARD Y., 1989, "Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", *IREM, Aix-Marseille.*

CHEVALLARD Y., et JOHSUA.M-A, 1991, "La transposition didactique, Du savoir savant au savoir enseigné", *La pensée sauvage, Grenoble.*

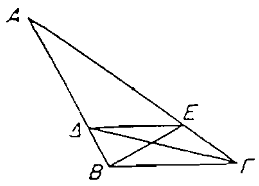
COLLETTE J-P, 1973, "Histoire des mathématiques", *Editions du renouveau pédagogiques Inc.*, Ottawa.

DAHAN-DALMEDICO.A., PEIFFER J., 1986, *"Une histoire des mathématiques, Routes et dédales"*, Seuil, Paris.
DIEUDONNÉ J., 1987*"Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui"*, Hachette, Paris.

KAYAS G., Préface aux Eléments d'Euclide, 1978, tome II, *éd. du CNRS*, Paris.

2.

La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles; et si une sécante coupe les deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, cette sécante est parallèle au troisième côté du triangle.



Soit le triangle ABΓ et une droite ΔE//BΓ; je dis que l'on a :

$$B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA.$$

Joignons les droites BE et ΓΔ.

Les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, car ils ont la même base, ΔE et sont situés entre les mêmes parallèles ΔE et BΓ (*I.38*).

AΔE étant un autre triangle quelconque, nous avons :

$$(B\Delta E) : (A\Delta E) = (\Gamma\Delta E) : (A\Delta E) \qquad (V.7)$$

car les grandeurs égales à une même troisième ont même rapport.

Mais $$(B\Delta E) : (A\Delta E) = B\Delta : \Delta A \qquad (VI.1)$$

car ces triangles ont la même hauteur, la perpendiculaire à AB issue du point E; ils sont donc dans le rapport de leurs bases.

Pour la même raison, nous avons :

$$(\Gamma\Delta E) : (A\Delta E) = \Gamma E : EA$$

d'où $$B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA. \qquad (V.11)$$

Supposons maintenant que les côtés AB et AΓ du triangle ABΓ ont été partagés en parties proportionnelles vérifiant la relation précédente et joignons la droite ΔE; je dis que ΔE//BΓ.

En effet, par la même construction, nous avons :

$$B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$$

Mais $$B\Delta : \Delta A = (B\Delta E) : (A\Delta E)$$

et $$\Gamma E : EA = (\Gamma\Delta E) : (A\Delta E) \qquad (VI.1)$$

d'où $$(B\Delta E) : (A\Delta E) = (\Gamma\Delta E) : (A\Delta E) \qquad (V.11)$$

c'est-à-dire que les triangles BΔE et ΓΔE ont même rapport au triangle AΔE; ils sont donc égaux et se trouvent sur la même base ΔE; ils sont donc situés entre les mêmes parallèles (*I.39*).

On a donc $\Delta E // B\Gamma$.

C.Q.F.D.

PROGRAMME

(Arrêté du 26 octobre 1964)

ARITHMÉTIQUE

Racine carrée (arithmétique). Racine carrée d'un produit, d'un quotient.

Racine carrée à une unité près, à une approximation décimale donnée : définition; calcul au moyen d'une table de carrés, au moyen de la règle d'extraction arithmétique qui sera donnée sans justification.

Racine carrée (arithmétique) de x^2, x étant un nombre relatif.

ALGÈBRE

1. Rappel de la définition du quotient exact d'un nombre par un autre; rapport. Proportions; propriétés élémentaires.

2. Révision de l'étude des polynômes faite dans la classe de Quatrième. Division des monômes. Fractions rationnelles. Exercices simples de calcul portant sur des polynômes et des fractions rationnelles.

3. Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires (choix des unités sur les axes).

4. Notions de variable et de fonction; exemples. Représentation graphique d'une fonction d'une variable.

Fonction $ax + b$ de la variable x; sens de variation. Représentation graphique. Mouvement rectiligne uniforme.

5. Équations et inéquations; position du problème; signification dans ces problèmes des signes $=$, $<$, $\geqslant$.

Équation et inéquation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Interprétation graphique.

Équation du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques; système de deux équations du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques.

Application à la résolution de quelques problèmes simples.

GÉOMÉTRIE

A. — *Géométrie plane.*

1. Rapport de deux segments. Rapport de deux segments orientés portés par une même droite. Division d'un segment dans un rapport donné (arithmétique et algébrique).

Théorème de Thalès. Application au triangle et au trapèze; étude de la réciproque dans le cas du triangle et du trapèze.

2. Triangles semblables. Cas de similitude.

3. Projections orthogonales.

Relations métriques dans le triangle rectangle.

Rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente) d'un angle aigu. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°. Usage des tables de rapports trigonométriques.

4. Relation entre les longueurs des segments joignant un point donné aux points d'intersection d'un cercle avec deux sécantes passant par ce point. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

5. Révision des notions sur les polygones réguliers étudiées en Quatrième. Relations entre le côté, le rayon du cercle circonscrit et l'apothème du carré, de l'hexagone régulier, du triangle équilatéral. Formules (sans démonstration) donnant la longueur (le périmètre) du cercle en fonction du rayon, et la longueur d'un arc de cercle. Définition du radian.

6. Révision des formules relatives aux aires de polygones plans (rectangle, triangle, trapèze, parallélogramme). Formules (sans démonstration) donnant l'aire d'un cercle en fonction du rayon et l'aire d'un secteur circulaire.

B. — *Géométrie dans l'espace.*

(Les démonstrations ne sont pas exigées, le professeur étant juge de la possibilité de les établir suivant le niveau de sa classe.)

1. Droite et plan. Leur détermination. Leurs positions relatives; parallélisme de droites et de plans.

2. Angle de deux droites de l'espace : orthogonalité.

Plans perpendiculaires à une droite; droites perpendiculaires à un plan.

Angles dièdres, rectiligne d'un dièdre. Angle de deux plans. Plans perpendiculaires.

3. Projection orthogonale sur un plan; projection d'un point, d'une droite, d'un segment.

4. Vecteurs : vecteurs équipollents, vecteurs opposés. Somme géométrique de deux vecteurs.

GÉOMÉTRIE, CLASSE DE QUATRIÈME 1971

III. GÉOMÉTRIE DE LA DROITE

A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique; c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger; les prémisses devront donc être précisées avec soin. On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans les commentaires; mais d'autres choix demeurent légitimes.

1. Droite. Distance de deux points sur une droite, repères normés d'une droite. Abscisse d'un point M dans un repère normé; notation $\overline{MM'}$.

Changement de repères normés sur une droite.

Expression de la distance de deux points en fonction de leurs abscisses dans un repère normé.

Changement d'unité.

2. Ordre sur une droite. Droite orientée (ou axe). Demi-droite. Segment. Milieu de deux points. Exercices sur les barycentres de deux points.

IV. GÉOMÉTRIE PLANE

1. Droites du plan. Détermination d'une droite par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence; définition d'une direction de droites comme classe d'équivalence.

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

Énoncé de Thalès. Rapport de projection, pour une direction donnée, d'un axe sur un axe.

2. Triangle — Applications de l'énoncé de Thalès au triangle.

Projection sur une droite de milieux, de barycentres. Construction graphique du barycentre de deux points donnés, affectés de coefficients donnés.

Symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) : image d'une droite. Parallélogramme propre ou aplati (défini par l'existence d'un centre de symétrie). Parallélisme des droites portant les côtés d'un parallélogramme propre; réciproque. Projection d'un parallélogramme; réciproque.

3. Équipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.

Exercices de calcul vectoriel; médianes d'un triangle.

PROGRAMME DE LA CLASSE DE 3e DES COLLÈGES

(Arrêté du 16 novembre 1978)

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur seront admises; elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

I. - ALGÈBRE

Racine carrée: notation $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$. [On admettra que l'application $x \to x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective.] Usage des tables pour le calcul des carrés et des racines carrées. Racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels.

Construction, sur des exemples, de la représentation graphique d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Applications linéaires et applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; leurs représentations graphiques.

Equations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques: résolution d'une équation, d'une inéquation, d'un système de deux équations; résolution graphique d'un système d'équations ou inéquations.

Exemples variés de problèmes du premier degré.

II. - GÉOMÉTRIE

Notions et propriétés fondamentales

Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equations d'une droite dans un repère.

Rapport de projection orthogonale; symétrie de ce rapport.

Propriété de Pythagore et sa réciproque.

Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

Notions pratiques de trigonométrie

On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée

Angle de deux demi-droites de même origine: sa mesure. Bissectrice.

Somme des mesures des angles d'un triangle.

Cosinus, sinus d'un angle; tangente. Usage des tables trigonométriques en degrés décimaux et en radians.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Applications

Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé.

Symétries laissant globalement invariant: un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites.

Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers...

Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple: sphère (intersection avec un plan); cube (calcul de la diagonale); pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

Programme

CLASSE DE TROISIÈME

Le travail effectué doit permettre à l'élève de s'approprier solidement l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'acquérir définitivement des techniques opératoires (mentales ou écrites) et, conjointement, d'utiliser avec sûreté des calculatrices de poche, de s'entraîner constamment au raisonnement déductif.
L'utilisation d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

I TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

1. Énoncé de Thalès relatif au triangle.
   Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...).
   Pyramide et cône de révolution : volume, section par un plan parallèle à la base.
   Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses.
2. Angles :
   Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
   Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.
3. Dans un plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations ; de deux symétries centrales ; de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.
4. Translation et vecteur. Égalité vectorielle :
   Dans le plan rapporté à un repère : effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur.
5. Distance de deux points en repère orthonormal :
   Équation d'une droite sous la forme : $y = mx$; $y = mx+p$, $x = p$.
   Cœfficient directeur ; parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.
6. Addition vectorielle.

II TRAVAUX NUMÉRIQUES

1. Écritures littérales :
   Factorisation d'expressions de la forme : a^2-b^2 ; $a^2+2ab+b^2$; $a^2-2ab+b^2$
   (a et b désignent des formes simples de nombres exprimés dans les différentes écritures déjà rencontrées.)
2. Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)
   Produit et quotient de deux radicaux.
   Puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.
3. Équations et inéquations du premier degré : méthodes graphiques de resolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficicents numériques.
   Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
   Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

III ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES. FONCTIONS

1. Applications affines : représentation graphique d'une application affine.
2. Exploitation de données statistiques :
   Moyenne ; moyennes pondérées ; médiane.
3. Mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.
4. Résolution d'équations par essais et corrections successifs.
5. Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur.