L'INFLUENCE DU DESSIN SUR LA REDACTION D'UNE DEMONSTRATION

Christine SOUVIGNET
PLC2 Mathématiques
IUFM Grenoble

Cet article sur l'importance du dessin dans la démonstration relate une expérimentation qui a été effectuée dans deux classes de seconde de lycée en travail individuel. Il tente de répondre à trois questions :

- Quelle est la capacité d'un élève à déceler le caractère particulier d'un dessin ?
- Où l'élève prend-il ses données?
- Dans quel cas (dessin donné ou dessin à faire) l'appréhension du dessin est-elle plus perceptive ?

Pour ce faire, l'expérience s'est déroulée pour chaque élève suivant trois modalités :
- un exercice comportant *un texte seul,*
- un autre accompagné d'*un dessin incomplet,*
- un dernier accompagné d'*un dessin complet.*

L'influence du dessin sur la rédaction d'une démonstration

"Je suis nul en géométrie !". Cette phrase que j'ai pu entendre plusieurs fois au cours de mon année de stage de 2ème année d'I.U.F.M. montre à quel point la géométrie est mal perçue par les élèves. Il m'a donc paru intéressant, lors du mémoire professionnel, de parcourir un des aspects de l'enseignement en seconde : le rôle et l'importance du dessin dans la démonstration.

Dans l'apprentissage du raisonnement en géométrie le rôle et le statut de la figure (objet mathématique théorique) paraissent essentiels. Cette dernière permet aux élèves d'amorcer la recherche d'un problème, "de voir plus clair", en fournissant un domaine d'expérience sensible : les propriétés géométriques donnent lieu à des phénomènes perceptifs.

Une première étape est la prise en compte du dessin, un représentant sur papier de la figure (Arsac 1987) réalisé par l'élève comme figure générique. Le dessin n'est qu'une instanciation de l'ensemble des dessins attachés à une figure ; il ne suffit pas pour caractériser une figure.

En effet, parmi les propriétés observées sur le dessin associé à un problème, certaines sont des données, d'autres des conséquences, d'autres sont dues aux particularités du dessin (ces éléments ne doivent pas être pris en compte).

Pour savoir quelles informations sur le dessin sont pertinentes, on a recours au texte. Celui-ci est d'autant plus important que certaines hypothèses lues dans le texte ne peuvent pas apparaître sur le dessin.

Le raisonnement déductif devant s'appuyer sur une figure (correspond exactement aux données du texte) et non sur le dessin, les premières difficultés d'une démonstration résident dans la bonne utilisation d'un dessin.

L'attraction perceptive du dessin peut-être attachée à l'analyse géométrique de la figure (Duval, 1988). Le même dessin peut être relatif à plusieurs exercices, mais suivant l'énoncé il est appréhendé de différentes façons.

I. Présentation de l'étude

1. Objet de l'étude

L'objectif de cette étude est l'influence du dessin sur la rédaction d'une démonstration. La réalisation de dessins particuliers introduit-elle des erreurs dans la recherche de solutions ?

Je prends en effet pour hypothèse que le dessin favorise une démarche empirique, c'est à dire que certains élèves lisent la réponse à la question sur le dessin, en font leur hypothèse et essaient, "par tous les moyens", de démontrer la valeur de vérité de leur hypothèse.

Par ailleurs, le dessin apporte bien souvent des informations supplémentaires qui ne doivent pas être prises en compte dans l'étude de la figure ; certains élèves relèvent ces informations et créent ainsi des données supplémentaires à l'exercice.

L'analyse de certaines résolutions de problèmes présentant des dessins particuliers ou non permet de dégager les procédures utilisées par les élèves. Celles-ci montreront si l'élève est capable de passer du stade du dessin à la figure générale. Pourra-t-il relever les caractères spécifiques des dessins correspondant à l'énoncé ?

2. Pourquoi une telle étude ?

La place du dessin dans la démonstration me semble, en effet, bien particulière, elle engendre parfois des erreurs :

1) Pour certains élèves, un dessin construit permet d'effectuer des mesures qui à leurs yeux sont forcément exactes et fournit des informations nécessairement vérifiées par la figure. En voilà un exemple :

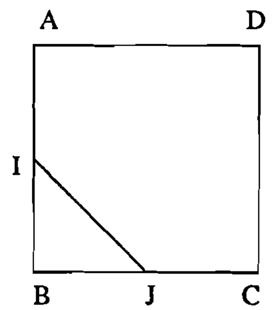


fig. 1

a. Exemple 1

Enoncé de l'exercice.

Soit un carré ABCD de côté a. Soit I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BC]. Calculer la distance IJ.

Les élèves font une figure et s'aperçoivent que le triangle IBJ est rectangle en B, ils pensent donc à utiliser le théorème de Pythagore certains avec la rédaction suivante :

Le triangle IBJ est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on a :

$IB^2 + BJ^2 = IJ^2$ donc $IJ^2 = 22+22 = 8$ cm.

Ces élèves affirment que le triangle est rectangle car sur leur dessin ils voient un angle droit mais ne reviennent pas à l'hypothèse du carré (quand on leur demande à l'oral : "Pourquoi es-tu sûr que le triangle est rectangle ?" ils affirment que c'est évident, "on le voit sur le dessin"), et prennent la dimension des segments [IB] et [JB] sur leur dessin.

Pour ces élèves le dessin semble être le seul instrument de travail et la source de données nécessaire pour faire la démonstration. Ils ne reviennent à l'énoncé que pour lire les questions suivantes.

2) L'observation du dessin construit par l'élève constitue en soi une réponse. Nous allons voir cela lors de l'exercice suivant.

b. Exemple 2

Enoncé de l'exercice :

Soit un triangle ABC rectangle en A de hauteur [AH] (H étant le pied de la hauteur). Le cercle de diamètre [BH] recoupe [AB] en I et le cercle de diamètre [HC] recoupe [AC] en J.

Démontrer la nature du quadrilatère AIHJ. (figure 2-A).

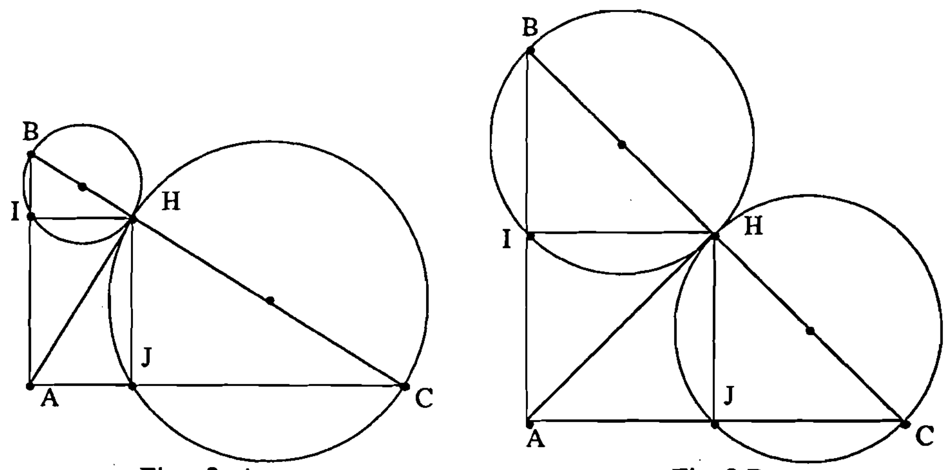


Fig. 2 A   Fig. 2 B

Un élève a représenté sur son dessin un triangle rectangle isocèle (Figure 2 B) en A et a donc essayé de démontrer que le quadrilatère était un carré au lieu d'un rectangle ; pour cela il a supposé que les côtés [AB] et [AC] étaient de même longueur.

Il s'agit apparemment de l'ajout d'une hypothèse pour démontrer "correctement" un résultat espéré car "évident" sur le dessin.

Dans toute cette étude, je cherche à observer plus particulièrement si en cherchant à établir la vérité d'un résultat lu sur un dessin, les élèves peuvent être conduits à déceler le caractère particulier de leur dessin par rapport aux hypothèses du problème.

Je cherche à voir dans l'élaboration des démonstrations :

- Quelles sont les informations qui sont prises par les élèves comme données pour appuyer leur raisonnement ?
- Sont-elles tirées du texte ?
- Sont-elles des constatations issues du dessin ?

De plus, l'élève est-il capable de faire des aller-retours entre constatations sur le dessin et lecture de l'énoncé ?

Et enfin, j'espère vérifier l'hypothèse suivante : lorsqu'un élève trace le dessin, il prendra plus en compte les propriétés géométriques qui lui permettent de le tracer. Si, par contre, le dessin est donné, l'appréhension du dessin sera plus perceptive.

II. Observations réalisées

1. Condition de l'expérimentation

Pour mon expérimentation, j'ai choisi de donner trois exercices de géométrie à faire avec des modalités différentes :

Modalité 1 : un texte
Modalité 2 : un texte et un dessin (non complet)
Modalité 3 : un texte et un dessin (complet)

J'ai choisi des exercices :

- ayant un énoncé court
- comprenant une question ouverte (n'induisant pas une réponse donnée).

J'ai proposé cette expérimentation dans deux classes de seconde lycée* , l'une de 36 élèves considérée par l'enseignant comme étant de niveau "moyen" en géométrie, l'autre de 31 élèves de niveau plus élevé.

2. Pourquoi ce choix ?

Souvent la présence d'un dessin ou d'une figure induit une recherche graphique, l'appréhension du dessin sera plus perceptive.

Une des caractéristiques du dessin est sa particularité. Or très souvent il est utilisé en géométrie pour traiter des questions générales. Avec la dernière modalité, je souhaite induire une double lecture : générale (la question "ouverte") et particulière (le dessin fourni) ; et mettre les élèves dans une situation contradictoire. Elle sera donc source d'une difficulté.

Remarquons toutefois que cette difficulté peut apparaître avec la modalité 1 si l'élève réalise un dessin particulier (ce sera d'ailleurs une des questions étudiées).

---

* élèves de 2nde 5 et 6 du Lycée Pravaz 38 Pont de Beauvoisin

Malgré cela je fais l'hypothèse que si l'élève trace lui même son dessin, il prend en compte davantage les propriétés géométriques qui lui ont permis de le tracer plutôt que l'aspect perceptif.

3. Les exercices proposés

a. Exercice n°1

Le texte est le même pour tous les élèves :

Soit un triangle ABD inscrit dans un cercle C. On appelle H son orthocentre, la perpendiculaire en D au côté [BD] recoupe C en P.
1)) Démontrer que le segment [BP] est un diamètre de C.
2) Quelle est la nature du quadrilatère AHDP ?

* Première modalité : le texte ci-dessus seul, distribué à neuf élèves.

Question 1 : Si c'est lui même qui le produit, un élève remet-il en cause un dessin "particulier" plus facilement que si c'est l'enseignant qui le lui propose.

* Deuxième modalité : le texte et un dessin non complet.

Dix-huit élèves ont le texte de l'exercice et comme début de figure un triangle quelconque. Pour neuf d'entre eux, l'orthocentre se trouve à l'intérieur du triangle ABD (fig.3) pour les neuf autres il se trouve à l'extérieur (fig.4).

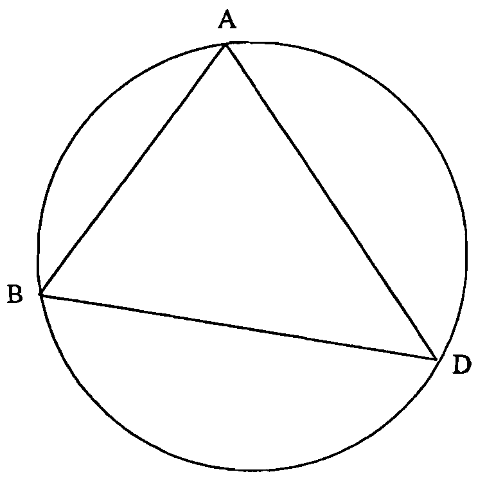


fig. 3 : orthocentre intérieur

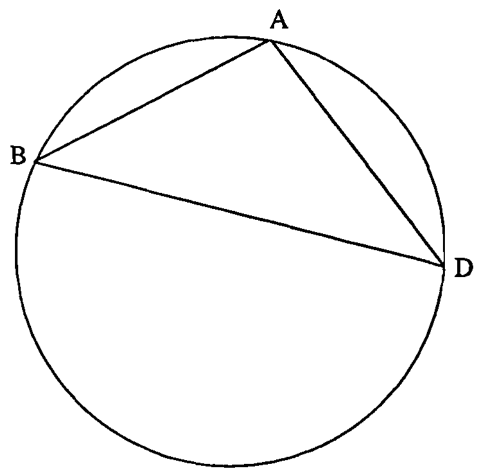


fig. 4 : orthocentre extérieur

Cette variable didactique est introduite car il est souvent plus difficile pour l'élève de tracer l'orthocentre d'un triangle lorsqu'il est extérieur à celui-ci. Dans ce cas-là, l'élève fait sûrement plus appel aux propriétés de l'orthocentre qu'au souvenir qu'il a d'un dessin prototypique. La démonstration est peut-être plus difficile à trouver puisque la perception de ce type de dessin est peu ordinaire.

* Autre version de la deuxième modalité : le texte et un dessin particulier non complet.

Question 2 : L'orientation du dessin joue-t-elle sur la perception ?

Notons, par exemple, que généralement on représente un carré et un losange dans les positions prototypiques suivantes :

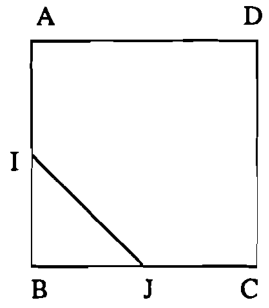


fig. 5

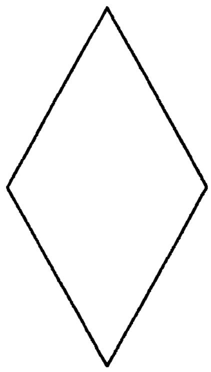


fig. 6

Le dessin suivant est presque toujours perçu comme représentant un losange et non un carré.

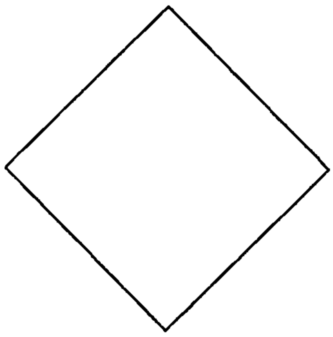


fig. 7

Si on donne des cas particuliers conduisant à des dessins prototypiques, ceux-ci sont-ils susceptibles d'amener l'élève à admettre des propriétés perceptivement évidentes non démontrées ?

On donne à dix-huit élèves comme début de dessin un triangle isocèle. Pour neuf d'entre eux le triangle est orienté de telle sorte qu'à la fin du tracé les diagonales du quadrilatère AHDP soient "obliques" (fig.8) et pour les neuf autres que l'une soit "verticale" et l'autre "horizontale" (fig.9).

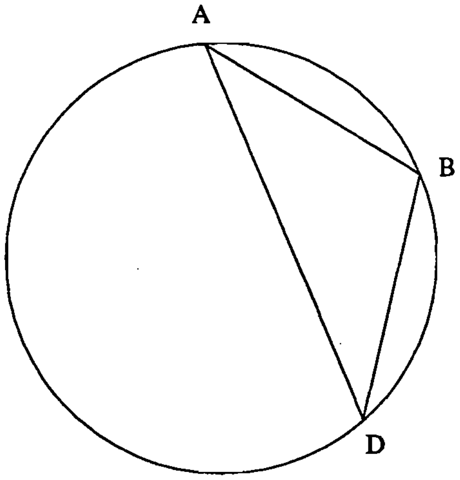


fig. 8 : diagonales obliques

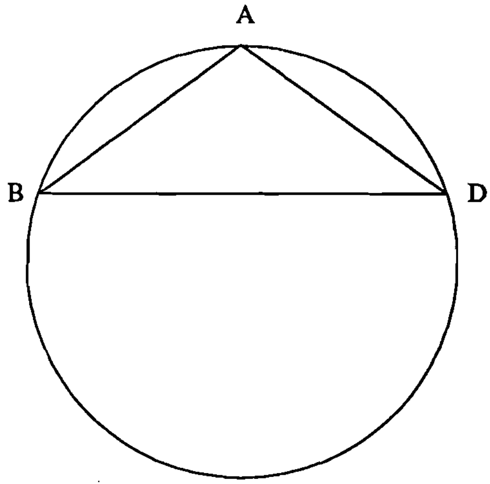


fig.9 : diagonales verticales

Question 3 : Après un tracé, si l'élève obtient un quadrilatère qui correspond à une forme prototypique (un losange dans le deuxième cas) ; il est tenté de démontrer la réponse que lui fournit le dessin plutôt que de remettre en question le dessin en cours de démonstration.

∗ Troisième modalité : un dessin particulier complet.

On donne à dix-huit élèves le texte et un dessin complet et particulier. Pour neuf d'entre eux la particularité du dessin est que le triangle ABD est isocèle (fig.10), pour les neuf autres le triangle est équilatéral (fig.11).

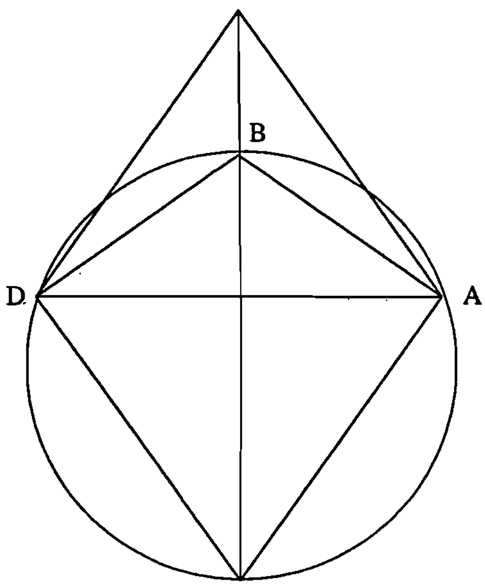


fig. 10

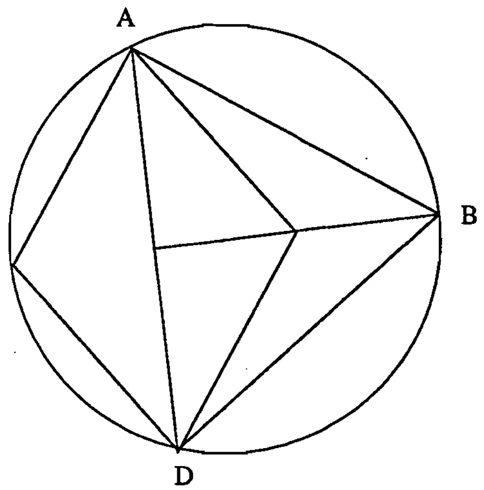


fig. 11

b. Exercice n°2

Soit un quadrilatère ABCD ; M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].
Quelle est la nature de MNPQ ?

Il s'agit ici aussi d'observer l'influence ou non du dessin de départ (le quadrilatère ABCD). De plus, cet exercice permet de vérifier si l'élève est capable de faire une exploration complète de la figure (ou du dessin) en essayant de découvrir des segments utiles non encore tracés sur celui-ci.

∗ Première modalité : le texte seul.

On distribue à vingt-deux élèves l'exercice avec seulement le texte afin de vérifier les mêmes questions énoncées pour l'exercice n°1. Cette activité a pour objet de tester la réaction des élèves face au mot "quadrilatère". Vont-ils dessiner un quadrilatère quelconque, prototypique ou autre ?

* Deuxième modalité : le texte et un dessin particulier non complet.

Neuf élèves ont comme début de dessin un quadrilatère "quelconque" (c'est-à-dire non prototypique) ayant cependant des diagonales de même longueur (fig.12) et neuf autres ont un autre quadrilatère avec la même particularité (fig.13).

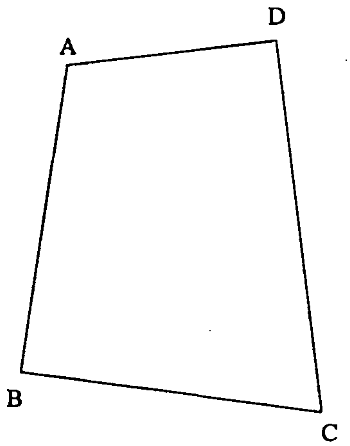


fig. 12 : diagonales égales

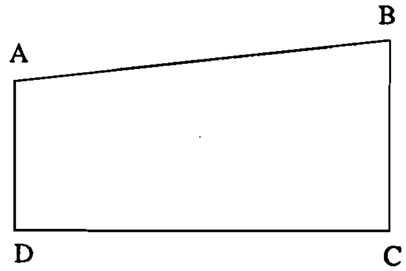


fig. 13 : diagonales égales

Avec ces deux types de dessins je souhaite vérifier la valeur de vérité du début de la question 2. La fin du tracé, aboutissant à un losange, me permet de tester la question 3.

Toujours pour essayer de répondre aux questions 2 et 3, je distribue à neuf élèves un quadrilatère "quelconque" ayant des diagonales perpendiculaires (fig.14) et à neuf autres un quadrilatère différent ayant cette même dernière caractéristique (fig.15).

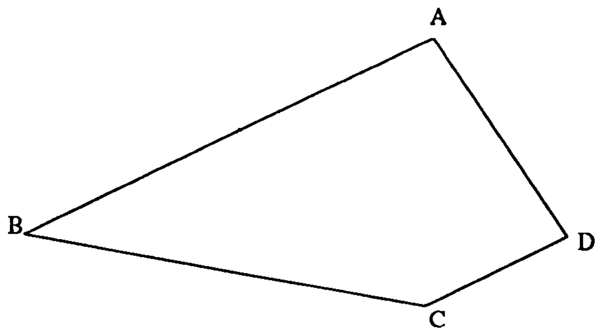


fig. 14 : diagonales perpendiculaires

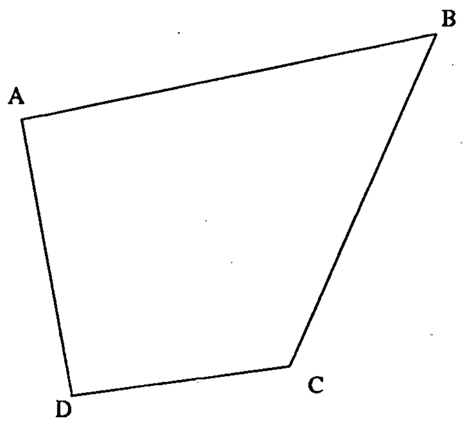


fig. 15 : diagonales perpendiculaires

Pour les neuf derniers, je donne le dessin d'un quadrilatère quelconque ayant des diagonales perpendiculaires et de même longueur (fig.16).

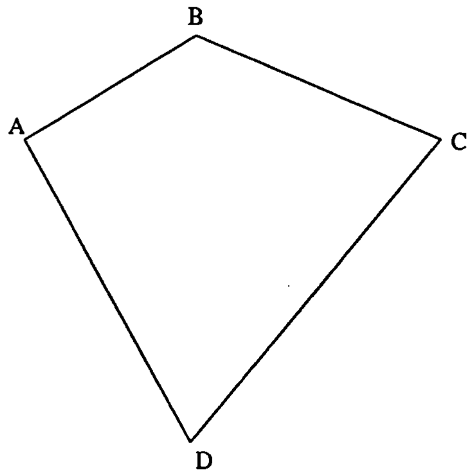


fig. 16 : diagonales perpendiculaires et égales

c. Exercice n°3

Les élèves ont tous le même texte.

Soit un parallélogramme ABCD. D' est le symétrique de D par rapport à A ;
C' est le symétrique de C par rapport à A.
Quelle est la nature du quadrilatère DCD'C' ?

Seize élèves ont la première modalité : le texte seul.

Les quarante-huit autres élèves ont la deuxième modalité : le texte et le début d'un dessin particulier. Pour tous il est représenté un parallélogramme ABCD avec pour chaque cas l'une des particularités suivantes :

- Les droites (AD) et (AC) sont perpendiculaires (pour neuf élèves, (fig.17)).
- Les distances AC et AD sont égales (aussi distribué à neuf élèves, (fig.18)).
- Les droites (AD) et (AC) sont perpendiculaires et les distances AC et AD sont égales (distribué à neuf élèves, (fig.19)).

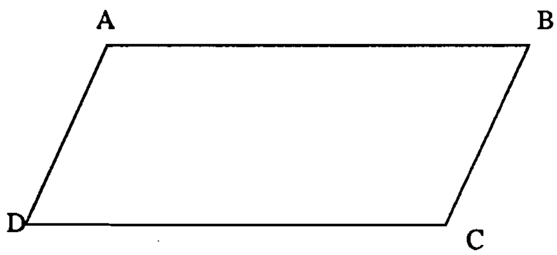


Figure 17

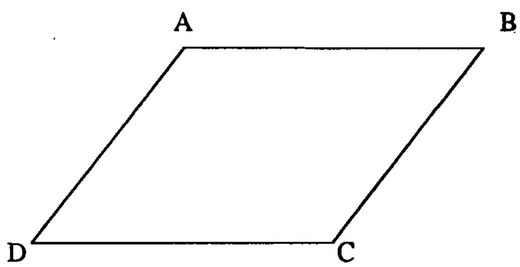


Figure 18

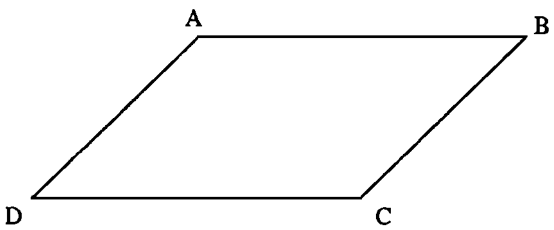


Figure 19

Ces trois types de dessins ont pour but de répondre aux questions 2 et 3.

Les différents cas sont résumés dans le tableau 1 :

	Modalité 1: Texte seul	Modalité 2 : Texte et Dessin Incomplet	Modalité 3 : Texte et Dessin Complet
Ex.1	(cf. II.3.a)	* orthocentre : - intérieur (fig.3) - extérieur (fig.4) * triangle isocèle : - diagonales obliques (fig.8) - diagonales verticales (fig.9)	* triangle isocèle (fig.10) * triangle équilatéral (fig.11)
Ex.2	(cf. II.3.b)	* "diag. =" : diagonales égales (fig.12 et 13) * "diag. ⊥ " : diagonales perpendiculaires (fig. 14 et 15) * "diag. = et ⊥" : diagonales égales et perpendiculaires (fig. 16)	Non proposé
Ex.3	(cf.II.3.c)	* (AD) ⊥(AC), (fig.17) * AC = AD, (fig.18) * (AD) ⊥(AC) et AC =AD, (fig.19)	Non proposé

Tableau 1

III. Analyse et commentaire des résultats

Les dessins produits par les élèves pour résoudre l'exercice n°1 ne sont pas particuliers : tous les triangles ABD sont quelconques. En ce qui concerne l'exercice n°3, lorsque les parallélogrammes ABCD sont particuliers, certains élèves ont fait une démonstration correcte (5 sur 24 dessins particuliers).

La façon de réaliser mon expérience ne me permet pas de savoir si ces élèves ont remis abstraitement en cause leur dessin ou s'ils ne se sont servis que des données du texte. En tout cas, aucun dessin n'a été remis en cause par écrit ni dans l'exercice n°1, ni dans l'exercice n°3.

Pour répondre à la question n°1 : "Si c'est lui même qui le produit, un élève remet-il en cause un dessin "particulier" plus facilement que si c'est l'enseignant qui le lui propose", je me servirai donc de l'analyse des résultats de l'exercice n°2.

D'après le tableau 2 (ci-après), sur 60 élèves, quatre ont remis par écrit, à un moment ou un autre, un dessin. Ces quatre élèves avaient tous un sujet de modalité 1 (c'est-à-dire le texte seul) ; par contre aucun dessin des énoncés de modalité 2 (c'est-à-dire comportant des début de dessins) n'a été réfuté.

Il semble bien que les élèves discutent plus volontiers de la valeur de vérité d'un dessin lorsqu'ils le produisent que lorsque le dessin est proposé par le professeur.

	Modalité 1	Modalité 2		
	(22 élèves)	"diag. =" (13 élèves)	"diag. ⊥" (16 élèves)	"diag. = et ⊥" (9 élèves)
L'élève a tracé plusieurs dessins	4	0	0	0
La réponse donnée est : "un parallélogramme"	10	3	4	2
La réponse donnée est : "un losange"	6	10	0	0
La réponse donnée est : "un rectangle"	1	0	12	2
La réponse donnée est : "un carré"	1	0	0	5
démonstration correcte	4	2	3	2

Tableau 2

On peut se demander si la modification des dessins, lorsqu'elle a lieu, permet aux élèves de produire une autre hypothèse de réponse.

Sur les quatre relevés, j'observe trois attitudes possibles :

- Un élève dessine, dans un premier temps, un rectangle puis considérant "qu'un quadrilatère a quatre cotés égaux" il dessine un carré et démontre grâce au théorème de Pythagore que le quadrilatère MNPQ est un carré (Annexe 1).

Je fais abstraction de la confusion suivante : au lieu de dessiner un losange, l'élève trace un cas particulier qu'il ne remet pas en cause cette fois-ci, mais au contraire qu'il utilise comme données.

- Deux autres tracent plusieurs dessins : un parallélogramme puis un quadrilatère quelconque pour l'un, un carré puis un parallélogramme puis un quadrilatère quelconque pour l'autre. Enfin tous les deux affirment sans démonstration que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme (Annexes 2 et 3).

Il semble donc ici que le dessin a pour certains élèves valeur de démonstration ; ils ont "oublié" que des exemples ne suffisent pas pour prouver qu'une propriété est vraie.

- Un dernier a fait plusieurs dessins : un rectangle, a ensuite écrit "dessin spécial car les côtés sont égaux et perpendiculaires", puis un trapèze, puis un quadrilatère quelconque. Enfin il a fait une démonstration correcte en utilisant le théorème des milieux (Annexe 4).

Je remarque donc que ce n'est pas lors d'une démonstration que les élèves remettent en question leur dessin mais lors de la lecture de l'énoncé.

Pour la question suivante : "L'orientation du dessin joue-t-elle sur la perception ?
Si on donne des cas particuliers offrant des situations prototypiques, ceux-ci sont-ils susceptibles d'amener l'élève à admettre des propriétés perceptivement évidentes non démontrées ?", j'utilise dans l'analyse les trois exercices suivant les modalités 2 et 3.

En effet, pour la première modalité, l'élève fait seul son dessin et, hormis un dessin parfaitement général, il peut construire un dessin particulier ou particulier prototypique. Dans les résultats de cette expérience, la diversité des constructions est trop importante pour pouvoir comparer les différentes formes prototypiques.

Je fais, ici, l'analyse des résultats suivant les différents quadrilatères obtenus (modalité 2) ou proposés (modalité 3) (Tableau 3).

	Formes prototypiques				simple cas particulier	
	rectangle	carré	losange		losange	
Modalité	2	2	2	3	2	3
Nb. d'élèves*	8	15	22	5	14	5
démonstration correcte	2	1	1	0	0	0
démonstration fausse	3	0	21	5	0	5
lecture sur le dessin	3	14	0	0	14	0

* ayant fait l'exercice

Tableau 3

1. Le rectangle

Ce quadrilatère apparaît dans l'exercice n°3 comme figure prototypique qui suit la modalité 2.

Sur les huit élèves qui ont abordé l'exercice, deux malgré le dessin prototypique n'ont pas osé émettre d'hypothèse (correcte) de réponse mais ont pourtant bien démontré qu'il ne s'agit que d'un parallélogramme.

Comme explication, je remarque que leur dessin manque beaucoup de précision, ils n'ont donc pas été influencés par la forme prototypique qu'ils auraient dus obtenir. Il faudrait dans une autre étude se demander si ces élèves ont une réelle difficulté à dessiner ou s'ils n'attachent que peu d'importance au dessin pour amorcer une démonstration.

Un autre a émis l'hypothèse de réponse du rectangle mais l'a réfutée dès la première ligne de la démonstration : "non car $AD \neq AC$" (en fait $AD = 2{,}8$ cm et $AC = 2{,}9$ cm sur son dessin) (Annexe 5).

Je suppose que sa réponse provient d'une mesure effective des distances AD et AC ; cet élève fait donc une grande confiance à ses mesures bien que son dessin ne soit pas exact. Cette supposition paraît d'autant plus vraisemblable que sa démonstration est fausse.

Sur les cinq restants, différents cas se présentent :

- Un élève a affirmé qu'il s'agit d'un rectangle. Il s'est donc servi du dessin pour formuler son hypothèse de réponse. Il a donné comme argument : "les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires", outre que ces propriétés ne permettent pas de démontrer sa réponse, elles ne sont surtout pas vérifiables sur son dessin. Je pense que cet élève ne se sert du dessin que pour émettre son hypothèse de réponse.

- Deux autres, au contraire, ont formulé leur démonstration uniquement grâce au dessin : "les diagonales sont de même longueur donc le quadrilatère est un rectangle". Ils n'ont donc pas de recul par rapport à leur dessin.

- Enfin, pour deux élèves, la forme prototypique est plus forte qu'une démonstration rigoureuse et correcte : après avoir montré qu'il s'agissait d'un parallélogramme, ils ont ajouté : "les côtés sont perpendiculaires, on a donc un rectangle". Il me semble que ces élèves suivent les règles d'une démonstration en prenant les données du texte et lorsqu'ils arrivent à une contradiction avec le dessin, ils choisissent, tout d'un coup, une donnée sur le dessin.

2. Le carré

Ce quadrilatère apparaît dans les exercices n°2 et 3 comme figure prototypique, qui suivent la modalité 2 ; je les analyse en même temps.

A part un élève, sur les quinze qui avaient un carré à construire, tous ont tenté de démontrer qu'il s'agit de cette forme prototypique. Pour cela tous ont utilisé des données prises dans le dessin. Cette affirmation apparaît certaine ; en effet, les arguments utilisés sont tous insuffisants pour une démonstration correcte mais sont tous visibles sur le dessin. Ils sont du type : "les diagonales se coupent en leur milieu et sont orthogonales", "les côtés sont parallèles deux à deux et sont égaux", "les diagonales sont de même longueur et orthogonales".

Seul, une minorité a justifié par "les quatre côtés sont égaux et perpendiculaires". J'admet ici qu'il s'agit d'une définition connue et vérifiée sur le dessin.

Qu'il s'agisse du rectangle ou du carré prototypique, la forme joue un rôle capital dans l'hypothèse de réponse et dans la prise de donnée au cours de la démonstration.

Je vais, maintenant, vérifier, avec le losange, qu'une figure prototypique est plus "attractive" qu'un simple dessin particulier.

3. Le losange

a. comme dessin particulier non prototypique.

J'obtiens les mêmes résultats pour les modalités 2 et 3. A part une exception sur 27 travaux, tous les élèves ont dit que le quadrilatère est un losange. Pour démontrer ceci, ils prennent des données à la fois dans le texte et sur le dessin :

- "les diagonales sont orthogonales car H est l'orthocentre" (exercice n°1),
- démontre correctement que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme puis affirme "M, N, P, Q étant les milieux des segments on a quatre côtés égaux donc c'est un losange" (exercice n°2),
- "comme la symétrie conserve les longueurs, les angles, les quatre côtés sont égaux" (exercice n°3),

- "comme la symétrie conserve les longueurs on a un parallélogramme, (D'D) est perpendiculaire à (C'C) donc le quadrilatère DCD'C' est un losange" (exercice n°3).

Je m'aperçois donc, ici, que le dessin n'est pas totalement suffisant pour pouvoir affirmer que le quadrilatère est un losange.

b. comme figure prototypique.

A l'inverse, lorsque le losange est posé sur sa pointe, les élèves utilisent uniquement l'argument des diagonales perpendiculaires.

En ce qui concerne la modalité 2, cette donnée est directement lue sur le dessin sans argumentation. Pour la modalité 3, l'affirmation est souvent complétée de l'argument : "[BP] est la hauteur du côté [DA]".

La figure prototypique est donc plus convainquante qu'un simple dessin particulier.

Je vais donc maintenant vérifier la question 3 : "Après un tracé, si l'élève obtient un quadrilatère qui correspond à une forme prototypique ; il est tenté de démontrer la réponse que lui fournit le dessin plutôt que de remettre en question le dessin en cours de démonstration".

	Modalité 1	Modalité 2	Modalité 3
parallélogramme	**33/42**	*16/61*	**0/11**
losange	**7**	**25**	**11**
rectangle	**1**	**19**	
carré	**1**	**11**	

Tableau 4

"nombres en gras" : les élèves ont montré le dessin prototypique obtenu ;
"nombres en italique" : les élèves ont montré la bonne réponse ;
"case vide" : situation non proposée.

Le tableau 4 représente ce que les élèves ont voulu démontrer en fonction des différentes figures prototypiques qu'ils ont obtenues suivant différentes modalités.

Je note dès à présent, que la première case "33/42" n'est pas ici significative étant donné que la figure prototypique obtenu correspond exactement à la figure du problème.

Pour les modalités 1 et 3, les élèves tentent toujours de démontrer la réponse que leur fournit le dessin. A l'inverse pour la modalité 2, certains élèves ont démontré le bon résultat.

Je pense que dans la modalité 1, les élèves ne se sont pas aperçus qu'ils créaient des dessins prototypiques ; ils n'ont donc jamais ressenti le besoin de les contester.

Dans la modalité 3, le dessin est imposé, les élèves l'ont pris comme forcément juste et comme donnée. Ceci induit alors "une recherche graphique" de la solution. Les élèves sont alors trompés car le champ de variation des éléments n'est pas donné par le dessin : le dessin ne montre pas que les angles, la mesure des côtés n'ont pas d'importance. De plus, l'observation d'un dessin entièrement donné induit une vision globale et non pas une observation des caractéristiques remarquables de ce dernier. Je suppose que ces élèves n'ont pas analysé le dessin par morceau alors que cette étape est nécessaire pour en saisir sa vérité.

Contrairement à la modalité 2, l'élève est obligé de travailler sur le dessin. Il a donc la possibilité de vérifier que la situation proposée correspond bien aux hypothèses de l'énoncé.

Dans cette deuxième modalité, pour les élèves qui ont montré autre chose que le dessin obtenu trois cas se présentent :

- Certains ont terminé le dessin correctement, ont fait une démonstration correcte (vers le parallélogramme) mais n'ont pas fait de lien entre eux. Je ne peux donc pas savoir s'ils ont remis le dessin en cause, s'ils ne s'en s'ont pas servis pour la démonstration, ou s'ils n'ont même pas vus le caractère prototypique du dessin.
- Un élève a réussi au cours de sa démonstration à remettre en cause le dessin prototypique et à aller jusqu'au bout de celle-ci pour montrer qu'il s'agit d'un parallélogramme (Annexe 6).
- Il y a enfin le cas d'élèves qui font la bonne démonstration du parallélogramme et qui finissent par :
- "c'est certainement un losange" ;
- "c'est sûrement un carré mais je n'arrive pas à le montrer" (Annexe 7). Ces élèves ont compris ce qu'était une démonstration puisqu'ils n'utilisent que les données de l'énoncé pour la faire, mais n'arrive pas à dépasser le cap du dessin prototypique.

Je pense que ces élèves non pas très bien compris le rôle du dessin pour une démonstration et l'utilisent, comme on leur a appris au début du collège, pour constater des propriétés (ici leur hypothèse de réponse : "losange" ou "carré"). Ils n'arrivent pas à savoir si ces propriétés sont dues aux particularités du dessin ou si elles sont des conséquences des données du texte.

IV. Conclusion

Au départ de l'expérimentation, j'avais trois interrogations :

- Quelle est la capacité d'un élève à déceler le caractère particulier d'un dessin ?
- Où un élève prend-il ses données ?
- Dans quel cas (dessin donné ou dessin à faire) l'appréhension du dessin est-elle plus perceptive ?

A l'issue de l'analyse de l'expérimentation mise en place, je pense proposer les hypothèses suivantes :

Lorsqu'un élève décèle un caractère particulier dans son dessin, généralement il l'a construit lui-même et s'aperçoit de cette particularité au cours de la phase : lecture d'un énoncé.

Lorsqu'il s'agit d'une figure prototypique les élèves sont incapables, à une exception près, de faire abstraction de la particularité. Le dessin est alors plus fort que toute démonstration même correcte.

Cependant, comme je l'ai fait remarquer dans l'analyse, il y a des cas pour lesquels je ne peux conclure. Il aurait, peut être fallu, proposer un travail de groupe ou pouvoir interroger oralement les élèves au fur et à mesure de leur production.

De façon générale, le dessin fourni (modalité 3) est pris comme ensemble de données. L'élève y prend des informations pour démontrer ce qu'il voit.

Lorsque le dessin fourni est incomplet (modalité 2), si après le tracé, on aboutit à une forme prototypique, les informations sont prises dans le dessin ; si on aboutit à un cas particulier (non prototypique), la démonstration résulte d'un mélange d'informations tirées du texte et du dessin.

Lorsque l'élève produit lui-même son dessin, il est rare qu'il soit particulier, les informations sont généralement prises dans le texte.

La grande majorité des élèves (35/50) utilise des propriétés géométriques quand ils produisent eux mêmes leur dessin ; quand le dessin (complet ou incomplet) particulier est donné, elle utilise à la fois des propriétés géométriques et des propriétés perceptives.

Une minorité d'élèves (10/50) utilise quel que soit la modalité, des propriétés perceptives et une autre (5/50) des propriétés géométriques.

Il est souvent apparu que les élèves formulaient leur hypothèse de réponse à partir du dessin proposé. Or dans tous les exercices, il est demandé la nature d'un quadrilatère sans préciser que le problème doit être résolu quel que soit le triangle ABD (pour l'exercice n°1), le quadrilatère ABCD (pour l'exercice n°2), le parallélogramme ABCD (pour l'exercice n°3). La question générale n'est pas posée, on la sous entend seulement. Certains élèves sont peut-être alors tenté de lire la réponse sur le dessin, sans se demander si celui-ci correspond réellement aux données du texte, et aller vers la solution particulière.

Le fait que ces énoncés, donc ces dessins soient proposés par le professeur a son importance ; il est toujours difficile de remettre en cause un énoncé donné par l'enseignant. J'ai, par exemple, pu remarquer le cas d'un élève qui a su remettre en cause sa production personnelle mais pas celle du professeur.

Je retire de cette expérimentation, l'importance qu'il y a à sensibiliser les élèves sur l'utilisation du dessin (contrôler que celui-ci correspond bien à l'énoncé et savoir prendre des informations utiles pour formuler une hypothèse de réponse).

Pour finir, il me semble que la relation entre le dessin et la démonstration est une notion que l'on devrait aborder au collège. Pour se faire, il serait peut être utile de provoquer des débats entre les élèves dès la quatrième sur le rôle, l'utilisation et la pertinence de différents dessins face à un problème donné.

V. Références

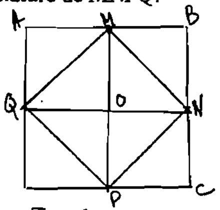
ARSAC G., 1987, l'origine de la démonstration, essai d'épistémologie didactique, *Recherche en didactique des mathématiques, vol 8.*

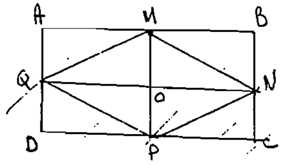
DUVAL R., 1988, Approche cognitive des problèmes de géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 1*

EXERCICE N°2   8H15 – 8H35

Soit un quadrilatère ABCD; M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

Quelle est la nature de MNPQ?





car un quadrilatère a 4 cotés égausc

- M milieu de [AB] ; N milieu de [BC] ; P milieu de [CD] ; Q milieu de [DA].
- J'utilise le théorème direct de Pythagore dans MBN ; PCN ; ~~PQD~~ ;

On sait que dans un parallélogramme, les cotés opposés sont parallèles et de même longueur, donc PN = QM et MN = QP, donc QMNP est un quadrilatère.

Si MNPQ est un carré ses diagonales se coupent perpendiculairement et en leurs milieux. ou un losange

J'utilise le théorème direct de Pythagore dans MNO : $OM^2 + ON^2 = MN^2$ donc les diagonales se coupent perpendiculairement, donc QMNP est un losange

Si MNPQ est un carré, MO = OP : on le montre avec Pythagore

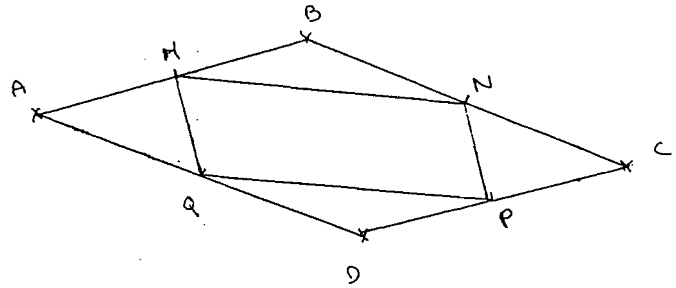
donc MNPQ est un carre.

ANNEXE 1

EXERCICE N°2

Soit un quadrilatère ABCD; M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

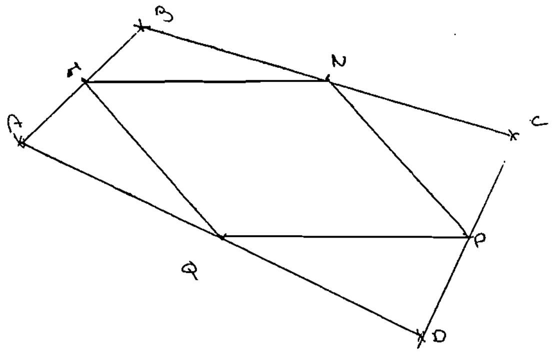
Quelle est la nature de MNPQ?



le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme

le quadrilatère ABCD n'est pas un parallélogramme.

Je refais une figure pour voir si j'ai le même résultat.



MNPQ est un parallélogramme

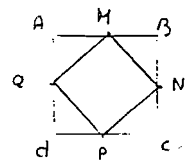
ANNEXE 2

EXERCICE N°2

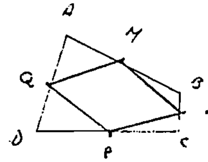
Soit un quadrilatère ABCD; M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

Quelle est la nature de MNPQ?

J'ai dessiné plusieurs cas pour voir si ce que je vais exprimer est vrai ds tous cas de quadrilatère :

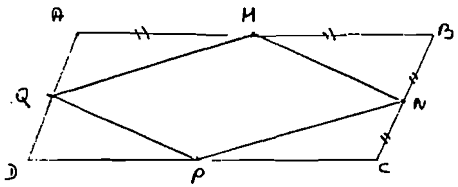


← carré



← quadrilatè quelconque.

parallélogramme



la nature de MNPQ :

[MN] et [QP] sont parallèle, ainsi que [QM] at [PN].

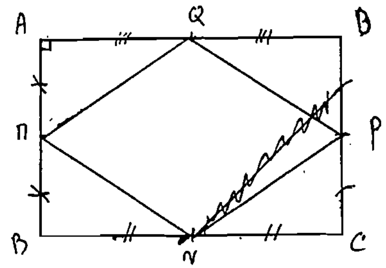
- si on prend le cas d'un parallélogramme comme figure de départ ABCD, c'est normal que MNPQ soit un parallélogramme car M est le milieu de [AB]
  P est le " de [DC]
  et [AB] = [DC]
  pareille pour [AD] et [BC]

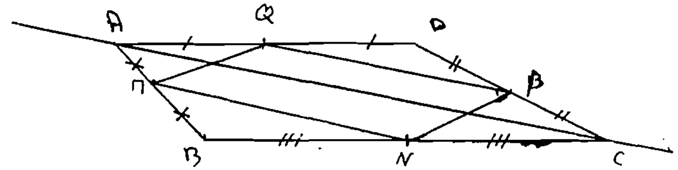
EXERCICE N°2

Soit un quadrilatère ABCD; M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

Quelle est la nature de MNPQ?

J'ai fait 2 figures parce que mon dessin est spécial: côtés égaux; angle droits. Ceci pouvait me tromper.





parallélogramme ?

Dans ADC : Q milieu de [DA] et P celui de [DC] donc d'après le théorème des milieux : [QP] // [AC] et de plus $QP = \frac{1}{2} AC$

Dans ABC : M milieu de [AB] et N celui de [BC] donc d'après le théorème des milieux : [MN] // [AC] et de plus $MN = \frac{1}{2} AC$

Nous avons donc : [QP] // [MN] et QP = MN donc MNPQ est un parallélogramme

EXERCICE N°1:

Soit un triangle ABD inscrit dans un cercle *C*. On appelle H son orthocentre; la perpendiculaire en D au côté [BD] recoupe *C* en P.

1) Démontrer que le segment [BP] est un diamètre de *C*.

2) Quelle est la nature du quadrilatère AHDP?

2) AHDP est un losange

les diagonales se coupent perpendiculairement car hauteur

HI // [PD]

PD] ⊥ (BD)

+(BD) ⊥ [AH]

, angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BDA}$

+ les m̂ car (BP) // (AD)

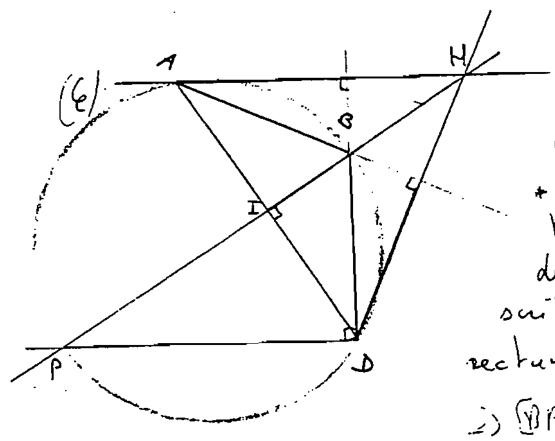
BP est un diamètre du cercle.

[HD] ⊥ (AB)

+(AB) ⊥ [AP]

=> [HD] // [AP]

c'est un losange (I milieu de [AD] et [PH])



1) Dans le triangle BDP:

B est un point quelconque de (C) et [BD] est perpendiculaire à [PD].

Les trois points étant sur le cercle, [BP] est un diamètre:

+ si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est un diamètre du cercle circonscrit, le sommet opposé est rectangle.

=> [BP] est un diamètre de (C.

EXERCICE N°3: 8h35 -> 8h41.

Soit un parallélogramme ABCD.

D' est le symétrique de D par rapport à A; C' est le symétrique de C par rapport à A.

Quelle est la nature du quadrilatère DCD'C'?

car AD ≠ AC

DCD'C' est un ~~rectangle~~ parallélogramme

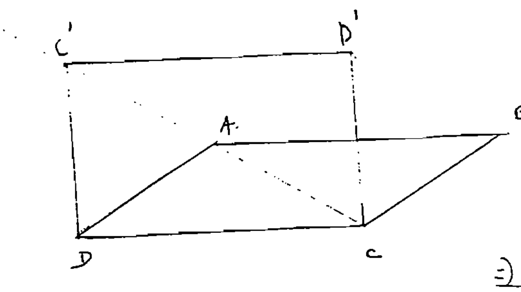
AC = AC' car symétrie

AD = AD' car symétrie

=> a milieu des diagonales et intersection de diagonales

et un symétrie conserve les longueurs [DC] = [C'D']

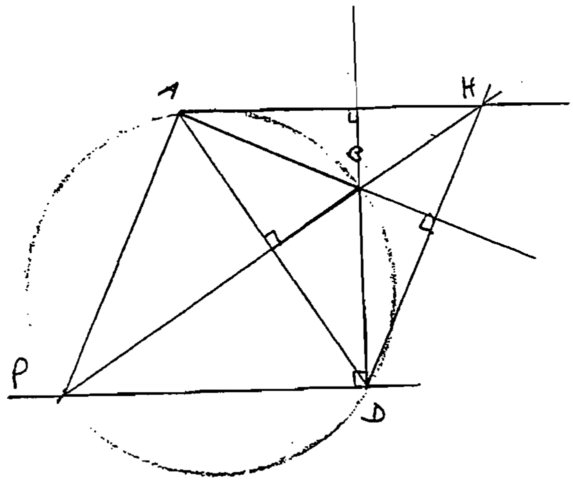
=> c'est un parallélogramme.



EXERCICE N°1:

Soit un triangle ABD inscrit dans un cercle *C*. On appelle H son orthocentre; la perpendiculaire en D au côté [BD] recoupe *C* en P.

1) Démontrer que le segment [BP] est un diamètre de *C*.
2) Quelle est la nature du quadrilatère AHDP?

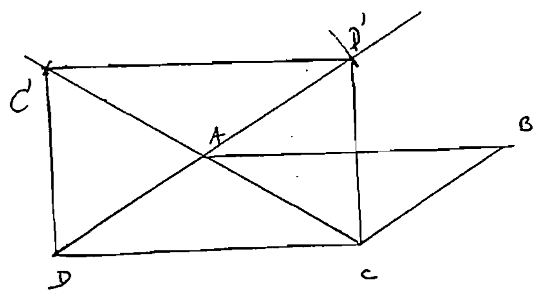


EXERCICE N°3:

Soit un parallélogramme ABCD.

D' est le symétrique de D par rapport à A; C' est le symétrique de C par rapport à A.

Quelle est la nature du quadrilatère DCD'C'?



ANNEXE 6

EXERCICE 1 : 8h08

1) Comme $(DP) \perp (BD)$, le triangle (BDP) est rectangle en D.

Si d'un point situé sur un cercle on voit un segment dont les extrémités appartiennent à ce même cercle sous un angle droit, ce segment est un diamètre du cercle.

D'où comme $P \in (\mathcal{C})$, $B \in (\mathcal{C})$ et $D \in (\mathcal{C})$ et $(DP) \perp (BD)$, on a $[BP]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$

~~2) Le quadrilatère (AHDP) est un losange car ses diagonales (AD) et (PH) sont perpendiculaires et se ~~ ~~hypothèse.~~ ~~En effet si on appelle I le point d'intersection de (AD) et de (PB), on a [IH] est une hauteur de (ABD) i.e. (AD) ⊥ (IH) Comme I ∈ (PB), (PB) ⊥ (AD).~~

Je me suis trompé car cette condition est nécessaire mais insuffisante

[Voir fin de l'exercice à la fin de la feuille

EXERCICE N° 2 : 8h22

Dans le triangle (ABD) comme M est milieu de $[AB]$ et Q milieu de $[AD]$, on a d'après la propriété de la droite des milieux : $(MQ) \parallel (BD)$ et $MQ = \frac{1}{2} BD$

De même, dans le triangle (BCD), comme N est milieu de $[BC]$ et P milieu de $[CD]$, on a d'après cette même propriété : $(NP) \parallel (BD)$ et $NP = \frac{1}{2} BD$

D'où l'on déduit que $MQ = NP$ et comme si une 1ère droite est parallèle à une seconde qui est elle-même parallèle à une 3ème, la 1ère et la 3ème sont parallèles entre elles ; on a $(MQ) \parallel (NP)$

Or, un quadrilatère qui a 2 côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

$(MNPQ)$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE N° 3 8h31

Si D' est le symétrique de D par rapport à A, on a A est le milieu de $[DD']$.

De même, A est le milieu de $[CC']$.

Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme

Comme les diagonales $[CC']$ et $[DD']$ de $(DCD'C')$ se coupent en leur milieu A, $(DCD'C')$ est un quadrilatère.

Suite ex 1 :

Par hypothèse, $(AH) \perp (BD)$ et $(BD) \perp (PD)$ d'où $(AH) \parallel (PD)$.

Un quadrilatère qui a ~~ses~~ 2 côtés opposés parallèles est un trapèze. D'où $(AHDP)$ est un trapèze.

Or un trapèze qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange.

Comme, par hypothèse, $(AD) \perp (PB)$, le trapèze $(AHDP)$ est un losange

Suite dans le prochain épisode

EXERCICE N°1:

Soit un triangle ABD inscrit dans un cercle *C*. On appelle H son orthocentre; la perpendiculaire en D au côté [BD] recoupe *C* en P.

1) Démontrer que le segment [BP] est un diamètre de *C*.

2) Quelle est la nature du quadrilatère AHDP?

' suite

HD) ⊥ (BA)

e tr BAP est rect en A car il est obtenu en joignant le point A du rcle aux extrémités du iamètre [BP]

⇓

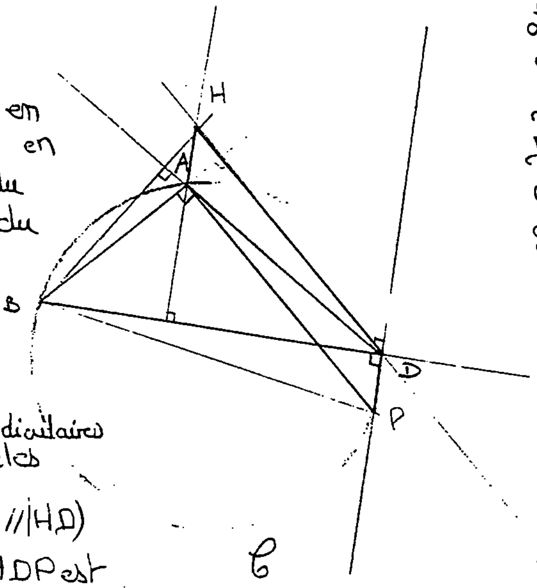
PA) ⊥ (BA)

onc les droites (HD) t (PA) toutes 2 perpendiculaires (BA) sont parallèles

⇓

(HA) // (DP) et (PA) // (HD)

Le quadrilatère AHDP est un parallélogramme



1/ (BD) ⊥ (DP)

Le triangle BDP est donc rectangle en D.

D appartient au cercle C.

Le tr BDP est donc obtenu en joignant le point D du cercle aux extrémités du diamètre [BP].

[BP] est un diamèt de C.

2/ les droites (HA) et (DP) sont toutes les 2 perpendiculaires à (BD) => elles sont donc parallèles

suite en Ha

EXERCICE N°3:

Soit un parallélogramme ABCD.

D' est le symétrique de D par rapport à A; C' est le symétrique de C par rapport à A.

Quelle est la nature du quadrilatère DCD'C'?

> C' symétrique de C par rapport à A

=> CA = AC'

⇓

A milieu de [CC']

> D' symétrique de D par rapport à A

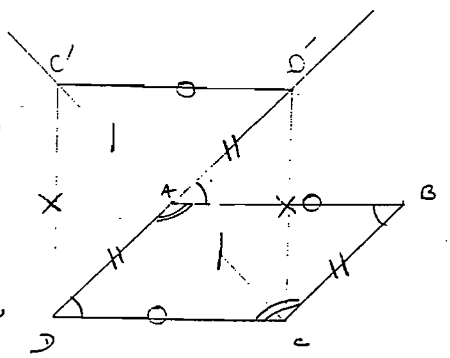
⇓

DA = AD'

⇓

A milieu de [DD']

Les diagonales du quadrilatère DCD'C' se coupent en leur milieu il est un parallélogramme.



C'est surement un carré mais je ne parviens pas à le démontrer.