MODIFICATIONS DE MENUS DANS CABRI-GEOMETRE : DES SYMETRIES COMME OUTILS DE CONSTRUCTION

Bernard CAPPONI
Collège Le Vergeron, Moirans
DidaTech, Université Joseph Fourier
Grenoble

Introduction

Plusieurs outils logiciels ont été mis à la disposition des enseignants pour créer des situations de classe en géométrie. De nombreuses différences peuvent exister entre la pratique d'une géométrie réalisée dans ces environnements et la géométrie que nous appellerons "papier-crayon". Les caractéristiques des situations, utilisant des logiciels de ce type ont commencé à être étudiées et font l'objet de diverses publications dans les revues pour les enseignants : citons en particulier Artigue (1987), Bellemain-Capponi (1992), Sträßer (1991) et Bergue (1992).

Cet article, après une brève présentation de Cabri-géomètre, décrit une utilisation particulière de ce logiciel avec des menus réduits (c'est-à-dire un sous-ensemble des menus existants sur Cabri-géomètre) : la résolution par des élèves de quatrième de collège de problèmes concernant la symétrie orthogonale, la symétrie centrale ou de la bissectrice et la mise en oeuvre de leurs propriétés.

I. Cabri-géomètre : un outil pour la géométrie

Cabri géomètre est un outil pour l'enseignement de la géométrie en classe. Il peut être utilisé pour construire des situations de classe dans des conditions plus élaborées que dans un environnement classique de type papier-crayon, notamment parce que l'environnement informatique peut être adapté à une gestion des variables didactiques.

Quelques mots de présentation d'abord sur Cabri-géomètre[1].

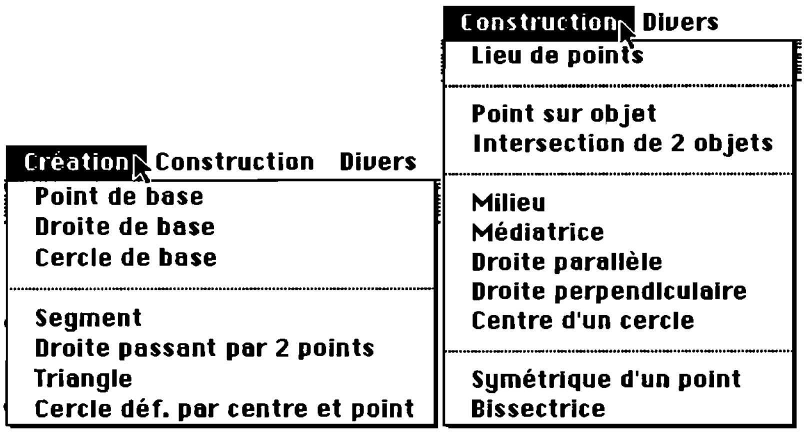
---

[1]Cabri-géomètre est développé par le Laboratoire de Structures discrètes et de Didactique (LSD2-IMAG) de l'Université Joseph Fourier à Grenoble. Il existe en version pour Macintosh et Compatibles PC. La version pour compatibles s'appelait à ses débuts "Le Géomètre". Commercialisé en France par Nathan-Logiciels. Il existe dans de nombreuses langues étrangères.

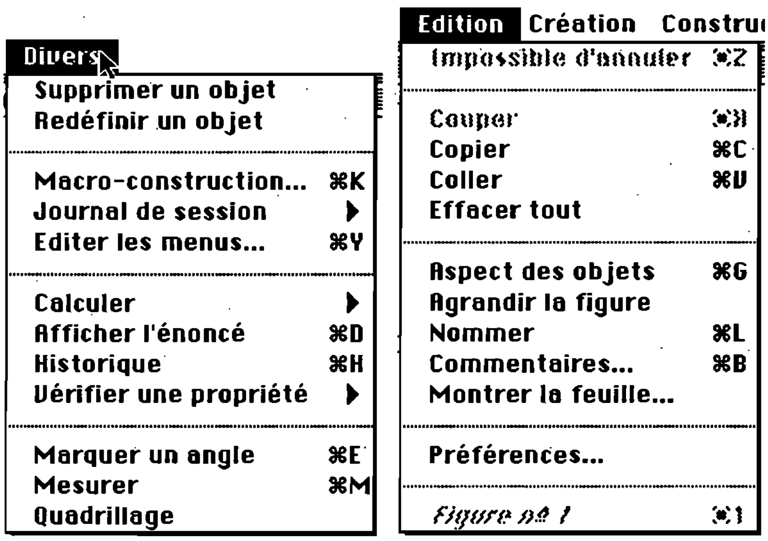
«petit x» n° 33 pp. 37 à 68, 1992-1993

Cabri-géomètre est un logiciel qui a déjà été présenté dans Petit x par un de ses auteurs (Bellemain 1988). Il a donné lieu à d'autres articles dans Petit x (Bergue 1992 ; Bellemain-Gérente 1991).

Il s'agit d'un logiciel qui permet de réaliser des constructions géométriques à partir d'objets de base comme des points, des droites et des cercles (menu **Création** d'une figure qui est numérotée figure 1) et d'un ensemble de constructions (menu **Construction** de la figure 1).



D'autres outils d'édition ou de calcul sont à la disposition de l'utilisateur pour l'exploration des figures de la géométrie (menus **Divers** et **Edition**).



Les objets de base peuvent être déplacés mais les propriétés décrites dans la construction de la figure sont conservées. Cette caractéristique permet d'observer tous les "cas de figure" possibles pour un même ensemble de propriétés.

Ainsi, par exemple, on peut déplacer le sommet d'un angle sur un cercle (Figure 2) et observer, de manière continue, la conservation de l'angle ou non suivant l'arc de cercle sur lequel on place le sommet.

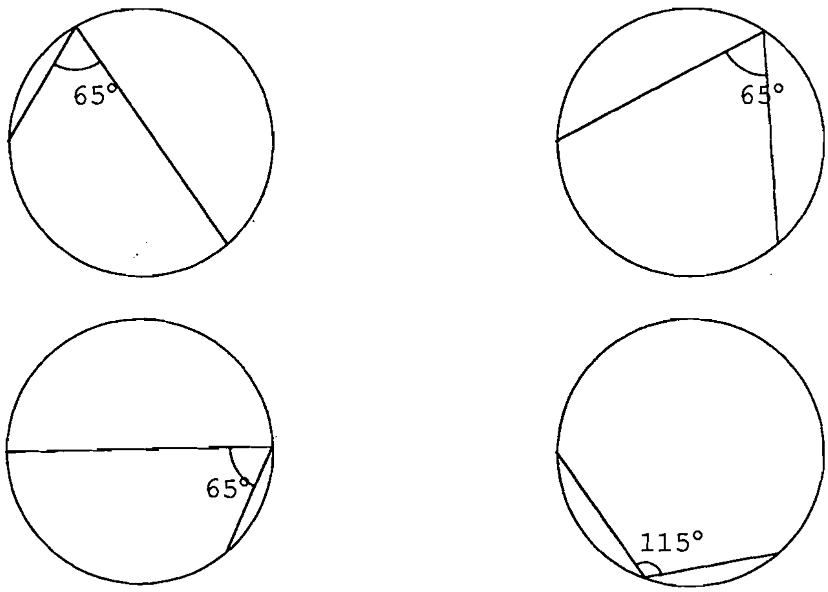


figure 2

I.1 Figure versus dessin

La distinction entre figure et dessin a déjà été mise en évidence par Arsac (1989), Parzysz (1988), Sträßer (1991) ou Laborde (1992). Cette distinction est prolongée dans l'environnement de Cabri-géomètre dans le mesure où la production de dessins sur l'écran de l'ordinateur conduit à communiquer une description de la figure au dispositif informatique. Ainsi, dans l'environnement de Cabri-géomètre, la tâche de construction est modifiée par rapport à une construction papier crayon : elle devient la production de cette description. Les élèves sont conduits à élaborer une description de la figure (en termes de constructions élémentaires) parce que le but visé est d'*obtenir une figure qui soit conservée par déplacement des points de base*.

Dans une construction Papier-crayon, le travail achevé fournit un simple dessin, avec d'éventuelles traces de constructions. Les moyens d'évaluation de l'enseignant sont pauvres. Ce dernier n'a pas les moyens de contrôler les procédures mises en œuvre par les élèves. Il est souvent conduit à demander aux élèves une description sous la forme d'un texte ; ce sont alors d'autres types de difficultés qui apparaissent pour les élèves.

Au contraire, une construction dans Cabri-géomètre nécessite la donnée des procédures utilisées. Par exemple, construire un carré de côté donné [AB] nécessite la donnée des relations entre les éléments du carré comme l'égalité des longueurs et l'existence d'angles droits.

La figure 3 (page suivante) décrit les étapes principales d'une procédure de construction d'un carré qui utilise **droite perpendiculaire** pour créer les angles droits et **cercle déf par centre et pt** pour reporter la longueur de [AB sur la perpendiculaire.

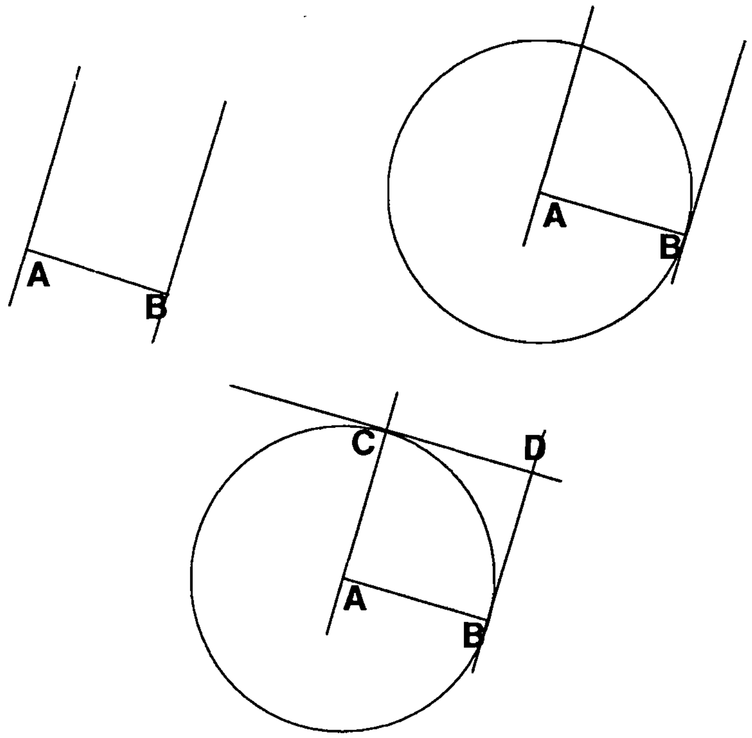


figure 3

I.2 Explicitation des outils

Une construction dans Cabri-géomètre nécessite de désigner explicitement les objets et les relations qui les lient. Par exemple pour construire une perpendiculaire à un segment [AB] passant par A il faut montrer le point A par où passe la droite et la direction à laquelle elle est perpendiculaire (donnée par le segment [AB]) (figure 4).

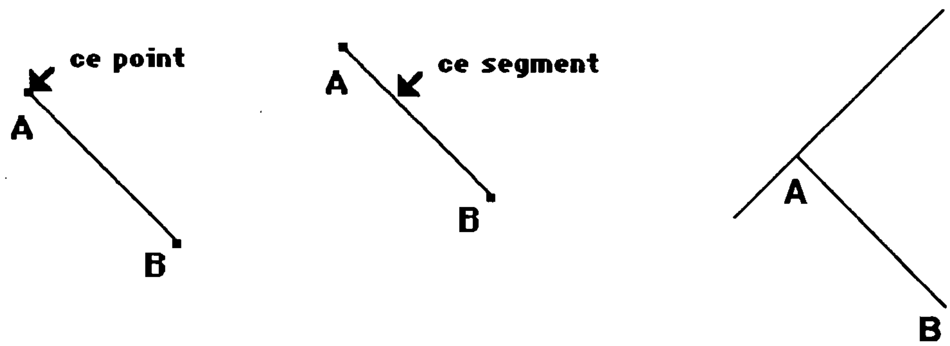


figure 4

Les élèves doivent fournir ces deux informations sinon la construction n'est pas conservée par déplacement et donc incorrecte au sens de Cabri. Par contre dans un environnement papier-crayon, cette construction peut être réalisée par un traitement global de la perpendiculaire sans prise en compte des éléments constitutifs de sa réalisation. Notre analyse des protocoles montre que cette perception analytique nécessaire dans Cabri-géomètre ne va pas de soi dans les débuts de l'apprentissage.

I.3 Outils spéciaux

Dans Cabri-géomètre des outils spéciaux sont disponibles pour construire et analyser les figures. Parmi ces outils on distingue :

- *des outils géométriques* : par exemple, on peut construire directement une médiatrice en montrant un segment ou une bissectrice en montrant un angle. Ces objets géométriques sont disponibles directement alors que dans un environnement papier-crayon leur construction conduit à de fastidieuses constructions intermédiaires. Ces outils géométriques sont disponibles dans le menu **"construction"** (Figure 1). Ils peuvent être complétés par des outils que l'utilisateur construit lui même en décrivant des figures réalisées qui sont mémorisées par Cabri-géomètre (**Macro-construction** du menu divers). Ainsi, la panoplie des outils disponibles n'est limitée que par l'imagination et les connaissances géométriques de l'utilisateur.

- *des outils numériques* comme la mesure des segments et des angles qui permettent d'analyser une figure. Ces options sont intéressantes surtout en raison de l'actualisation des mesures au cours des déplacements d'objets. On dispose ainsi d'un rapporteur et d'une règle graduée en "continu" pour explorer les figures. Sur la version Macintosh, on peut aussi disposer d'une fenêtre de calcul qui permet d'afficher des mesures d'aires, des coordonnées de points ou des pentes de droites.

- d'autres *outils d'exploration* comme **vérifier une propriété** qui permet d'obtenir des messages sur le parallélisme de droites ou l'alignement de points par exemple. Ainsi , dans l'exemple ci-dessous, on demande si les deux segments sont perpendiculaires : si cette propriété est vraie et reste vraie même si on déplace les points A et B, on obtient le message "cette propriété est vraie dans lme cas général".

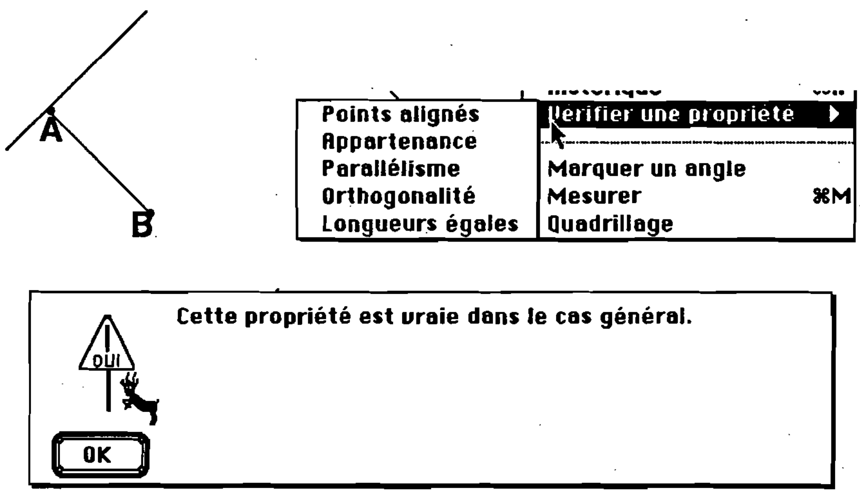


figure 5

I.4 Gestion des menus

Il est possible d'adapter les menus de Cabri-géomètre pour construire des situations de classe dont un exemple est l'objet de cet article. On peut ainsi enlever n'importe lequel des articles disponibles dans les menus.

Ceci constitue une caractéristique importante de Cabri-géomètre pour la construction de situations didactiques. Par exemple, l'étude de l'objet médiatrice au collège peut être menée sans donner l'article correspondant du menu construction, et on peut ensuite en disposer de nouveau comme un outil. Il en est de même de la bissectrice ou des symétries.

D'autre part, à l'aide d'un choix judicieux des articles des menus, on peut conduire les élèves à mobiliser des connaissances particulières en limitant les outils mis à leur disposition pour une construction donnée.

Dans cet article nous décrivons une utilisation de ce type dans une classe de quatrième. Notre recherche sur des situations de classe avec l'utilisation de Cabri-géomètre utilise souvent cette possibilité de contrôle des variables didactiques. Si on ajoute à cette possibilité de réduire les menus, celle de pouvoir réaliser des macro-constructions, on obtient une grande souplesse pour la gestion des menus mis à la disposition des élèves pour une construction donnée. Ceci permet par exemple de reproduire des situations du type de celle décrite par Alain Mercier dans ce même numéro : "constructions avec des pliages".

II. Une situation de classe avec des menus modifiés

Il s'agit, dans la situation étudiée ici, de *faire construire par des élèves de quatrième une perpendiculaire et une parallèle à une droite donnée passant par un point donné* en limitant les menus à leur disposition.

Au cours de cette tâche nous nous intéressons particulièrement à deux aspects du travail des élèves :

- le premier concerne la façon dont les élèves résoudront le problème mathématique de construction de la parallèle avec la suppression de certains des outils habituels de la géométrie et de quelle façon les outils "complexes" des symétries et de la bissectrice seront utilisés dans cette situation ;
- le deuxième touche à l'influence - sur la résolution de problème - du milieu particulier que constitue un logiciel comme Cabri-géomètre et du rôle des interactions de l'élève avec ce milieu dans la validation des constructions par les élèves eux-mêmes.

Nous avons travaillé dans deux classes de quatrième française (élèves de 14 ans). Les élèves sont regroupés par paires (binômes) et toutes leurs constructions sont enregistrées grâce à la fonctionnalité spécifique du logiciel, le *journal de session*. Nous avons pu observer 22 binômes d'élèves dans cette situation.

Les élèves doivent fournir des réponses écrites aux questions posées sur la fiche de travail. Le travail des élèves se déroule dans le cadre du cours de mathématiques avec leur professeur habituel. Ces élèves utilisent souvent Cabri-géomètre (ils ont environ 25 heures de pratique au moment de l'expérimentation décrite ici.

Les menus à la disposition des élèves ont été réduits de façon à faire fonctionner les connaissances des élèves relativement aux propriétés de la symétrie orthogonale, de la symétrie centrale et de la bissectrice. Pour cela on a enlevé des menus le cercle défini par son centre et un point, la parallèle, la perpendiculaire, le milieu et la médiatrice.

Les menus **création** et **construction** disponibles sont alors ceux-ci :

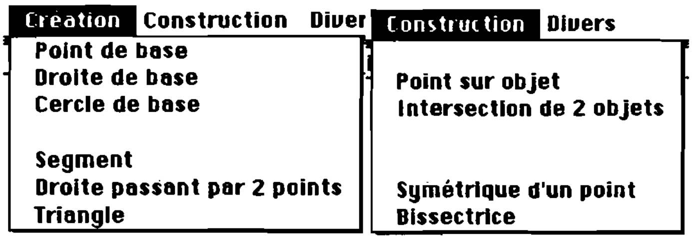


figure 6

II.1 La tâche

Voici dans ce cadre la consigne donnée aux élèves.

Le défi consiste à réaliser les constructions demandées en utilisant seulement ces outils.

Une droite perpendiculaire

Construisez un point P et une droite (D) ne passant pas par P.
Construisez la perpendiculaire à (D) passant par P.

Quand vous pensez avoir terminé :
Déplacez la droite (D) et le point P. La droite construite doit rester perpendiculaire à (D).

Justifiez votre construction en donnant les propriétés mathématiques qui vous assurent que la droite construite est perpendiculaire à (D).

Une droite parallèle

Construisez un point P et une droite de base (D) qui ne passe pas par P.
Construisez une droite parallèle à (D) qui passe par P.

Quand vous pensez avoir terminé :
Déplacez la droite (D) et le point P. La droite construite doit rester parallèle à (D).

Justifiez votre construction en donnant les propriétés mathématiques qui vous assurent que la droite construite est parallèle à (D).

La première construction, celle d'une perpendiculaire à une droite en un point, ne présente pas de difficultés particulières à ce niveau de la scolarité des élèves.

La tâche de construction d'une parallèle à une droite (D) passant par un point donné est plus complexe en raison des diverses procédures disponibles et des validations disponibles pour les élèves. Nous allons d'abord analyser les procédures, correctes ou non, à la disposition des élèves pour construire la droite parallèle demandée.

Nous regarderons ici les procédures d'un double point de vue :

- le *point de vue des connaissances mathématiques* mobilisées par les élèves dans leur construction et les justifications fournies de ce point de vue.

- le *point de vue du logiciel* qui apporte ses propres contraintes comme le type de cercle[2] disponible ou encore la nécessité de fournir une construction invariante par déplacement des points de base. On demande ici à l'élève la construction d'une figure et pas seulement un dessin perceptivement correct. La validation finale s'obtiendra par déplacement des objets de base de la figure et sera complétée par une justification au niveau des propriétés mathématiques en jeu dans la construction.

II.2 Analyse a priori des procédures

• Construction de la perpendiculaire

La construction de la perpendiculaire se fait sans difficulté en utilisant l'outil symétrie.

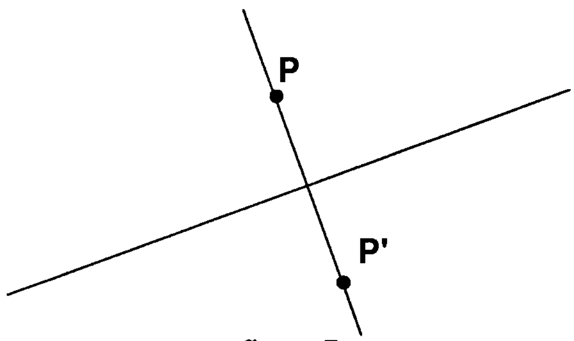


figure 7

Il est raisonnable de penser que tous obtiendront une perpendiculaire en construisant le symétrique de P par rapport à la droite (D). Les justifications des élèves peuvent cependant apporter des indications intéressantes sur la capacité des élèves à formuler correctement la propriété utilisée.

• Construction de la parallèle

Pour la construction de la parallèle nous avons identifié a priori un ensemble relativement important de procédures (correctes ou erronées) :

---

[2]Le centre et un point du **cercle de base**, disponible dans les menus, ne peuvent pas être choisis parmi les points déjà construits sur la figure. On ne peut donc pas l'utiliser pour un report de longueur.

P1 : perpendiculaire commune PerCom (correcte)

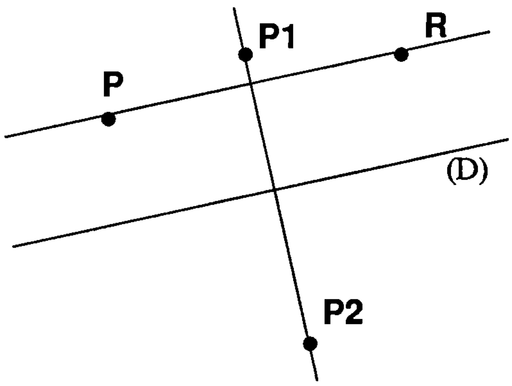


figure 8

A partir d'un point P1 quelconque et de son symétrique autour de d, on construit la droite P_1P_2 perpendiculaire à d. Le symétrique de P par rapport à P_1P_2 est R. La droite (PR) est la parallèle cherchée.

P2 : procédure milieux Mil (correcte)

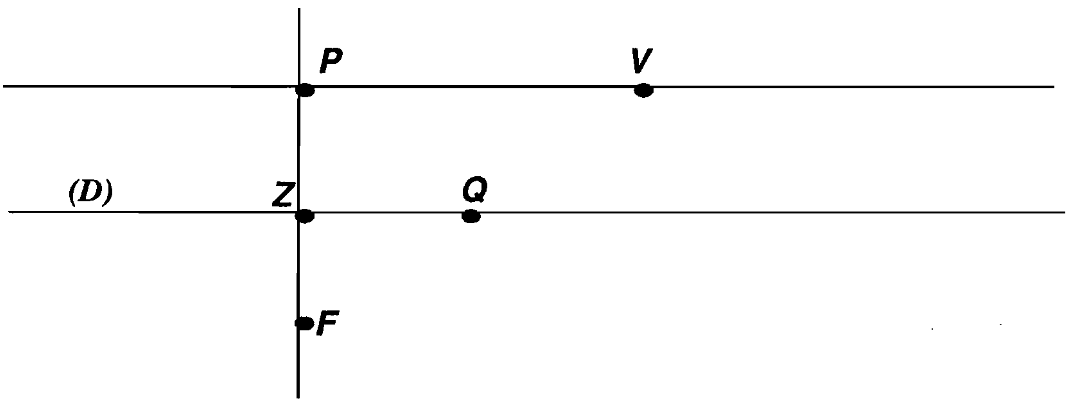
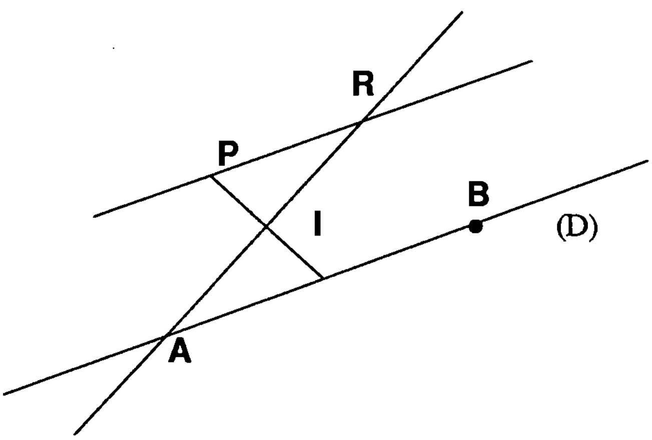


figure 9

Cette procédure consiste à construire le point Q sur la droite (D) et le symétrique f de p par rapport à (D). Le symétrique de F par rapport Q est le point V. La droite (PV) est parallèle à (D).

P3 : parallélogramme-Bissectrice ParBiss (correcte)



Cette procédure s'appuie sur la construction d'un parallélogramme en utilisant la bissectrice de l'angle $\widehat{PAB}$ et le symétrique de P par rapport à cette bissectrice. I est le centre du parallélogramme. Et on obtient R comme symétrique de A par rapport à I.

figure 10

L'existence du parallélogramme assure la parallélisme de PR et de (D).

P4 : Carré-Bissectrice CarBiss (correcte)

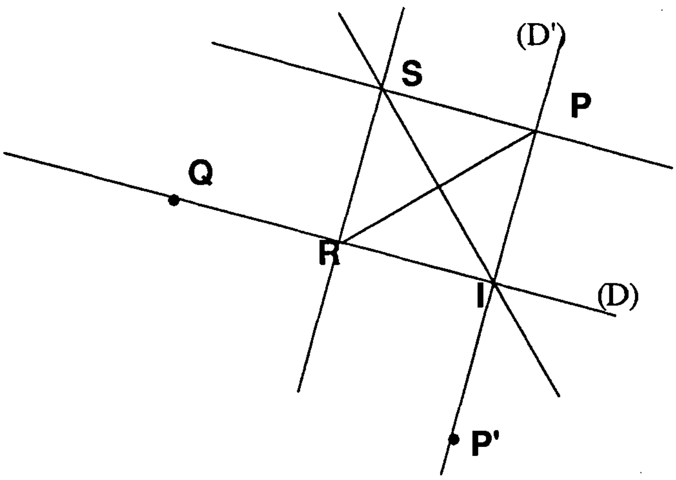


figure 11

Cette procédure, très voisine de la précédente n'utilise pas un point quelconque de (D) mais le point I obtenu comme intersection de (D) et de PP'. Elle s'appuie sur la construction d'un carré en utilisant la bissectrice de l'angle $\widehat{PIR}$ et le symétrique de P par rapport à cette bissectrice. (RP) coupe la bissectrice au milieu du carré.

Par cette procédure, on obtient S comme symétrique de I par rapport à ce dernier point. L'existence du carré assure la parallélisme de (SP) et de (D).

P5 : procédure Bissectrice BISS (correcte)

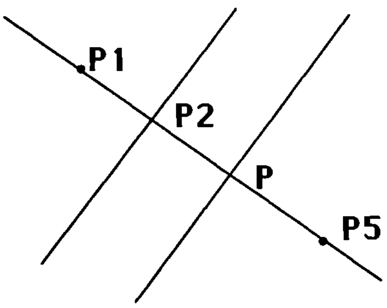


figure 12

On construit P_1 symétrique de P par rapport à la droite (D) . la droite (PP1) coupe (D) en P_2. P5 est le symétrique de P_2 autour de P.
On construit la parallèle à (D) passant par P comme la bissectrice de $\widehat{P2PP5}$.

P6 : procédure point de base ptbase (erronée)

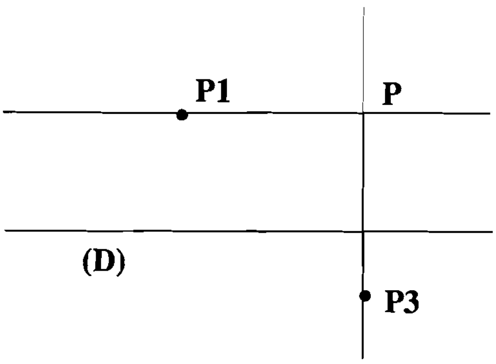


figure 13

Le point P_1 est un point de base (construit ou non pendant la construction d'une droite définie par deux points). La droite (PP1) est la parallèle.

Cette construction *ne résiste pas au déplacement de P*, de P_1 ou de la droite (D).

P7 : procédure droite de base drbase (erronée)

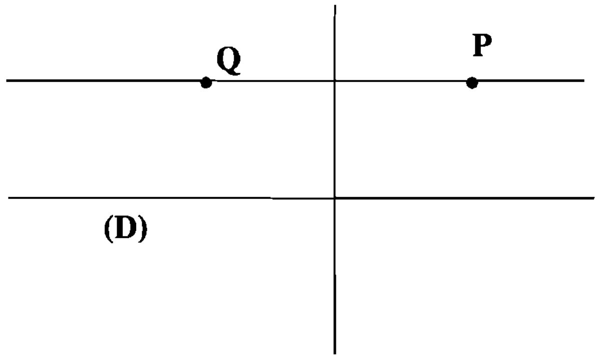


figure 14

Les élèves peuvent construire une droite de base perceptivement parallèle à (D) et la déplacent pour qu'elle passe par P[3].

Une variante consiste à créer une droite perpendiculaire à (D) (toujours avec droite de base) et à prendre le symétrique de P par rapport à cette droite pour obtenir la parallèle cherchée.

La validation par déplacement peut sembler être obtenue par déplacement de P, de (D) ou de la droite construite puisque les droites de base gardent la même direction dans un déplacement “standard”.

P8 : procédure Carré-cercle CarCer (erronée)

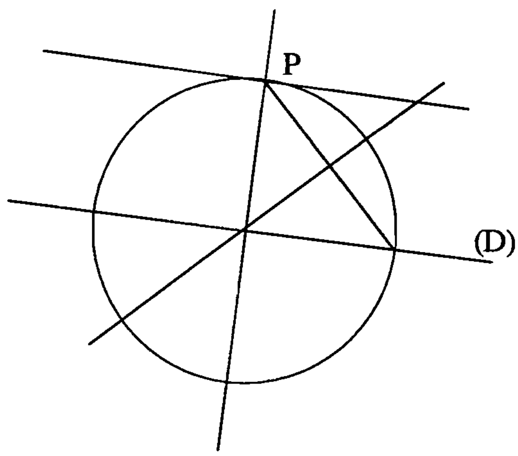


figure 15

Cette procédure utilise un cercle de base pour construire un carré à l'aide de la bissectrice. Elle ne résiste pas au déplacement puisque les élèves ne disposent pas de **cercle défini par centre et point.**

[3]La droite de base n'est pas liée à P. Elle se déplace parallèlement à elle même dans un déplacement “standard”, mais on peut la faire pivoter en appuyant sur la touche “Option” sur Macintosh ou “ALT” sur PC.

P9 : procédure mesures (MES)

Il s'agit ici de procédures utilisant des mesures. Or, *dans Cabri géomètre, le déplacement ne conserve pas les mesures ni l'égalité des mesures.*

Voici un exemple de procédure possible utilisant les mesures.

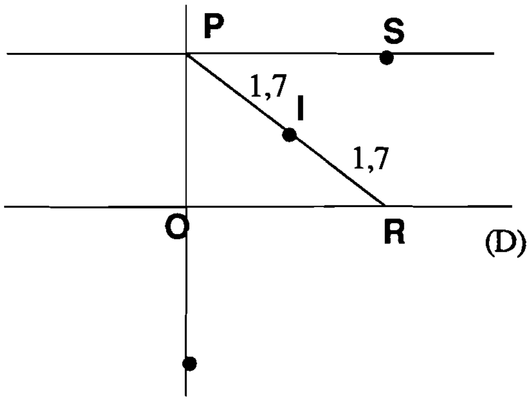


figure 16

Le point R est un point de la droite (D) et I un point sur objet placé au milieu de [PR] par ajustement des mesures de [PI] et [IR].
Cette construction ne résiste pas au déplacement de I. Par contre elle résiste au déplacement de P et de R parce que le point sur objet garde sa position sur le segment[4].

P10 : procédure Cercles Cer (erronée)

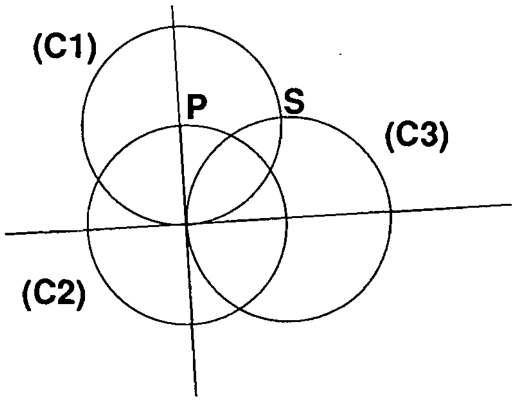


figure 17

Plusieurs procédures peuvent conduire les élèves à utiliser des cercles. Comme la précédente aucune ne peut aboutir en raison de la présence uniquement de cercles de base.

Dans celle fournie ici (figure 17) on utilise conjointement trois cercles C1, C2 et C3 pour obtenir le point S à l'intersection de C1 et C3. Une telle procédure ne résiste pas au déplacement des cercles qui sont des objets de base[5].

---

[4]Un point sur un segment garde sa position par rapports aux extrémités du segment quand on déplace l'une des extrémités. Cette caractéristique est un choix interne au logiciel qui peut faire penser qu'il y a conservation du milieu par déplacement dans certaines configurations.

[5]Par exemple le cercle C1 "semble" avoir pour centre P, alors que comme objet de base au sens du logiciel, son centre ne peut pas être un point fixé de la figure. Dans le déplacement ce cercle ne garde pas P comme centre.

II.3 Résultats généraux

Nous donnons dans un tableau la liste des procédures et les résultats obtenus par les 22 groupes d'élèves.

	ptbase	dr base	cer	carcer	percom	mil	carbiss	biss
Jul-Dan	•					• J		
Did-Jer*						• N		
Aud-Aur	•	•	•			• J		
Gae-Syl		•				• J		
Lyd-Rac						• J		
Cor-Cor*						• J		
Oti-Sop			•	•	• J			
Cel-Sid					• N			
Mar-Cla					• J			
Florent							• J	
Sev-Del					• Des			
Ama			•		• J			
Ger-San	•		•			• N		
Far-Oli*					• J			
Nicolas					• N			
Nic-Chr	• •							
Far-Fre			•		• J			
M-Jean*								• N
Nad-Sou						• N		
Cat-Lau		•	•		• Des			
Lau-aud			•				• N	
Bilan	6	3	8	1	10	8	2	1

figure 18

Sur la première ligne nous avons indiqué les noms des procédures que nous avons décrites dans l'analyse a priori.

La lettre **J** indique la présence d'une justification écrite cohérente avec la construction.

La lettre **N** indique l'absence de justification ou une justification qui ne correspond pas à la construction fournie.

Des indique que les élèves ont fourni une description écrite de leur construction mais pas de justification au niveau des propriétés mathématiques.

Pour les élèves marqués avec une étoile (*) nous ne disposons pas des étapes de leur travail mais uniquement de la figure finale (avec son historique).

Ce tableau montre tout d'abord que sur 22 groupes 21 fournissent une procédure correcte. Seul le binôme de Nicolas-Christophe n'a pas pu donner une construction correcte de la parallèle.

Les procédures (erronées) intermédiaires font presque une fois sur deux intervenir des cercles de base et un point ou une droite de base. Toutes ces constructions sont disqualifiées par le déplacement des points de base.

Les procédures majoritaires sont **percom** et **mil** qui sont justifiée une fois sur deux par un texte écrit.

La procédure de construction d'un carré par Florent et Laure-Audrey a été peu utilisée. Il faudrait étudier l'incidence qu'aurait l'introduction de **milieu** dans le menu construction pour produire plus facilement un tel carré ou un rectangle pour obtenir deux droites parallèles. On peut penser en particulier que le binôme Otilia-Sophie (OTI-SOP) aurait mis en œuvre une telle procédure s'il n'avait pas rencontré des difficultés à créer le carré compte tenu des menus disponibles. A ce sujet la procédure plus générale avec un parallélogramme (ParaBiss) n'est pas apparue parmi les procédures des élèves.

Enfin la procédure de construction à l'aide d'une bissectrice a été peu utilisée, seule une élève (Marie-Jeanne) l'a mise en œuvre.

Ces résultats indiquent que le choix des menus proposés aux élèves les conduisent effectivement à mobiliser des connaissances à propos de propriétés géométriques permettant la construction de la parallèle.

Ils obtiennent cette parallèle de plusieurs façons :

- soit en traçant deux perpendiculaires à une même droite (avec des symétries ou une bissectrice) ;
- soit en utilisant la propriété des milieux des côtés d'un triangle ;
- soit encore en construisant un carré (les côtés opposés sont parallèles) ;
- soit en traçant la bissectrice d'un angle plat pour obtenir une perpendiculaire. (un seul binôme)

Tous les groupes (sauf 1) construisent effectivement la parallèle demandée. 11 sur 20 fournissent une justification mathématique cohérente avec leur construction. Ceci garantit - pour ces binômes au moins - que ces constructions ne restent pas des constructions empiriques basées sur une combinatoire des items existant dans les menus.

Les procédures erronées sont bien disqualifiées par le déplacement proposé dans Cabri-géomètre sauf dans le cas de la procédure **droite de base** où le déplacement d'une droite de base se fait parallèlement à la direction dans laquelle elle a été créée, (sauf si l'on appuie en même temps sur la touche option), ceci conduit l'enseignant à intervenir pour inciter les élèves à faire "tourner" ces droites de base et à refuser cette procédure.

La suppression des items **droite de base** et **cercle de base** du menu création éviterait les procédures erronées **droite de base** et **cercles** dont l'origine tient davantage aux caractéristiques du logiciel qu'au contexte géométrique de la situation.

II.4 Evolution des procédures erronées vers les procédures correctes : analyse de protocoles

Après ces résultats généraux, nous analysons ici quelques protocoles de manière plus détaillée de façon à pouvoir dégager les évolutions des procédures erronées vers les procédures correctes et notamment le *rôle de l'environnement dans ces évolutions.*

II.4.1 Construction de la perpendiculaire

Pour la première tâche de construction de la perpendiculaire nous donnerons seulement quelques textes produits par les élèves pour la justification de leur construction. En effet, la construction d'une perpendiculaire est toujours réalisée rapidement en utilisant la symétrie comme l'indique la figure 19 :

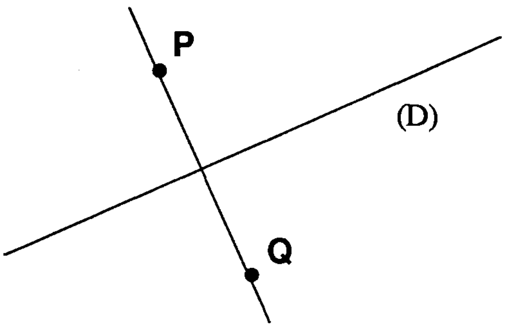


figure 19

Les élèves construisent le symétrique Q de P par rapport à (D). La droite (PQ) est la perpendiculaire cherchée.

Nous donnerons seulement quelques formulations écrites des élèves bien que tous en ait fourni une plus ou moins correctement rédigée.

Julien -Daniel

"Je suis sûr que la droite passant par le point P et la droite (D) est perpendiculaire à (D) car la symétrie d'un point par rapport à une droite est toujours perpendiculaire. Dans n'importe quelle position le point est perpendiculaire à la droite. Le symétrique est donc lui aussi perpendiculaire . En reliant ces deux points cela nous fait une droite perpendiculaire."

Cette formulation donne une place privilégiée aux points et, bien qu'incorrecte, indique le rôle important que jouent les points dans la représentation de la figure pour ces deux élèves. Par ailleurs la justification s'appuie bien sur les propriétés de la symétrie orthogonale.

Audrey-Aurélie

"Quand on trace le symétrie d'un point par apport à une droite , la symétrie est toujours perpendiculaire à la droite (même quand on bouge soit la droite, soit le point)."

Cette formulation se place au niveau de l'action de construction et fait aussi référence au déplacement et à la conservation de la perpendiculaire dans une symétrie. On voit apparaître ici la difficulté chez beaucoup d'élèves à maîtriser les termes "symétrique" et "symétrie". Cette formulation est aussi très proche comme la précédente d'une conception de type "point" et ne parle même pas de la droite (PQ).

Lydie et Rachel

"Quand on trace le symétrique d'un point par rapport à une droite, la droite passant par ce point et son symétrique est toujours perpendiculaire sinon les points ne sont pas symétriques."

Cette formulation plus correcte dans la maîtrise du vocabulaire et du statut des objets, points et droites, intervenant dans l'explication fait encore référence à l'action " si on trace ..." mais constitue une des meilleures productions parmi tous les binômes.

Une seule formulation fait explicitement référence à la médiatrice :

Mathieu-Jean-Philippe

"Deux points P et P' sont symétriques par rapport à une droite d lorsque d est la médiatrice du segment (PP'). "

On notera ici la distanciation par rapport à l'action.

Les quelques exemples fournis indique que, dans les tâches de construction, la place accordée par les élèves à la justification reste sommaire. Les documents qu'ils remplissent contiennent les rédactions du genre de celles que nous avons présentées ici. Cependant si la validation de la construction se situe chez ces élèves au niveau des propriétés mathématiques c'est en partie parce que la formulation de la tâche le demande explicitement. Nous avons pu observer que lorsqu'aucune demande de justification n'est faite, les élèves donnent souvent des formulations au sujet de la conservation des propriétés perceptives de la figure par déplacement sans s'appuyer sur les fondements mathématiques de la construction.

Ce rôle du logiciel dans la validation des constructions n'a pas donné lieu, ici, à des messages écrits des élèves bien que la plupart aient effectivement déplacé les éléments libres de la figure pour s'assurer que la construction résistait au déplacement.

II.4.2 Construction de la parallèle

Dans la construction de la parallèle à la droite D passant par le point P, les menus réduits et, en particulier, l'absence du menu "cercle défini par son centre et un point" ont conduit les élèves à des explorations parfois longues, mais finalement la presque totalité ont abouti à une solution correcte.

- **Utilisation d'objets de base**

Le tableau général des résultats fait apparaître que dix groupes d'élèves (soit à peu près un sur deux) ont utilisé des objets de base comme des points, des cercles ou des droites dans des procédures qui ne peuvent aboutir compte tenu du statut de ces objets dans le déplacement. Ceci correspond à des procédures déjà décrites dans l'analyse a priori sous le nom de **ptbase, drbase** ou encore avec des cercles **CarCer** et **Cer**. Nous donnons quelques exemples.

a. Points de base

Voici par exemple la première phase du travail de Julien et Daniel qui utilisent un point de base pour construire la parallèle cherchée.

Ils construisent P_0 symétrique de P autour de (D) puis la droite (PP_0).
P1 un point quelconque et P2 son symétrique autour de (PP0).
P3 un point quelconque et P4 son symétrique autour de (P1P2).
P8 un point quelconque et P9 son symétrique autour de (P3P4).
Et enfin la droite PP_{10} où **P_{10} est un point quelconque**.

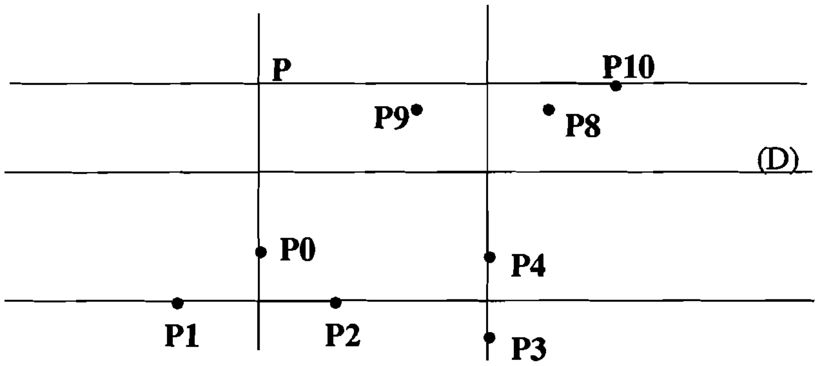


figure 20

Il est intéressant de noter que malgré la construction de nombreux symétriques Julien et Daniel construisent un point P_{10} quelconque.

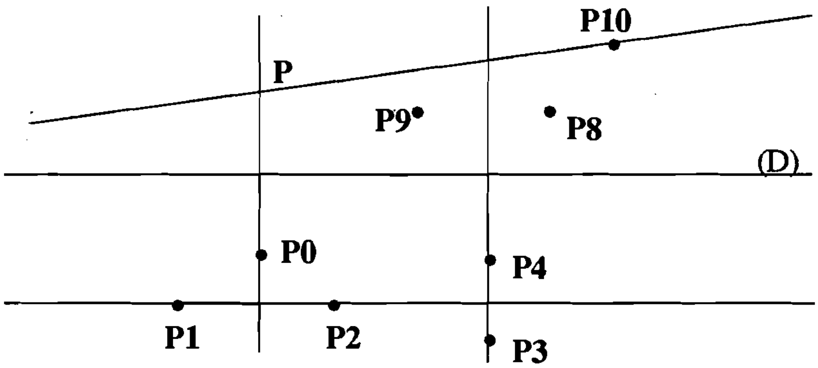


figure 21

La droite PP10 ne résiste pas au déplacement de P10. Les élèves disqualifient eux-mêmes leur construction. Nous verrons d'autres exemples où Cabri-géomètre permet ainsi aux élèves d'invalider leur construction.

La disqualification de cette construction se fait au niveau perceptif: la droite PP10 n'est pas parallèle à la droite (D). On peut penser que le déplacement va attirer l'attention des élèves sur le rôle de P10 et son statut de point de base.

Mais ce n'est pas ce qui se produit ici, Ils effacent tout et s'orientent vers une construction qui aboutira à la procédure milieux.

Un autre groupe d'élèves utilise les points de base pour ses constructions : Nicolas et Christophe.

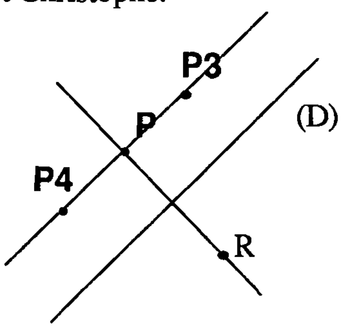


figure 22

Le point P3 est un point de base. Son symétrique autour de P est le point P4. Mais la droite P3P4 ne reste pas parallèle à (D) quand on déplace P3, P ou (D).

Puis Nicolas et Christophe déplacent la droite (D) et le résultat du déplacement disqualifie de manière évidente leur construction :

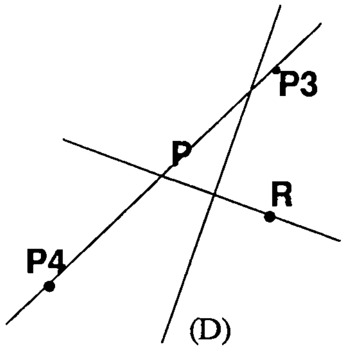


figure 23

Ces deux élèves, après une utilisation de cercles de base, construirons encore des points de base, avec le même rôle que P3 pour construire la parallèle. C'est le seul binôme qui n'obtiendra pas de construction correcte de la parallèle.

Pour terminer avec les procédures utilisant des points de base, voici une partie du début de la session de Sandrine et Géraldine[6] qui utilisent à la fois des points de base et des cercles de base pour la construction de la parallèle :

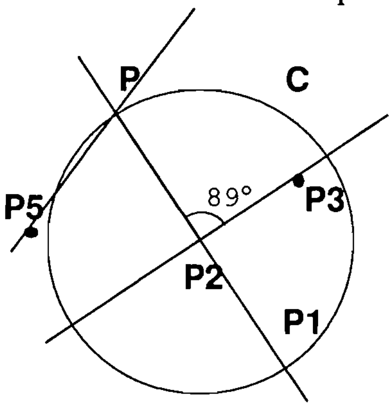


figure 24

après la construction du symétrique P1 de P par rapport à (D) et de P2 l'intersection avec la droite (D). Elles construisent un cercle de base apparemment centré en P2 et passant par P.
Le point P5 est un point de base. Après la construction de la droite (P5P) elles ajustent la position de P5 pour obtenir une parallèle comme tangente au cercle (Figure 25-a).
Mais c'est le déplacement de P qui, pour elles, met en évidence que la figure n'est pas conservée et la disqualifie (Figure 25-b).

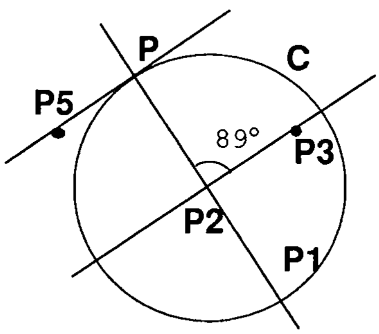


figure 25-a

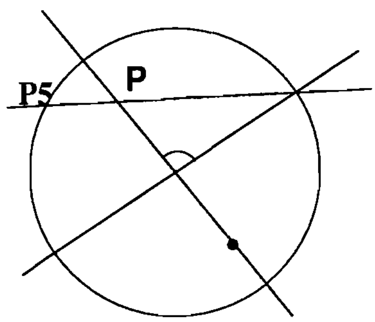


figure 25-b

La procédure utilisée par ces élèves met aussi en évidence le traitement perceptif des phénomènes de tangence mis en évidence dans les travaux de l'IREM de Rouen (Bergue 92).

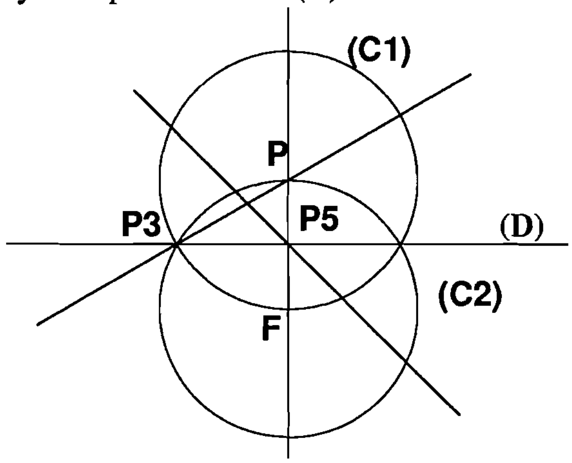
[6] Le lecteur intéréssé peut retrouver la chronologie des procédures utilisées par les élèves dans le tableau récapitulatif du paragraphe 2-3

b. Cercles de base

Les cercles de base ont été utilisés par 8 binômes sur les 22. Ces élèves ont, pour la plupart, une connaissance suffisante de Cabri-géomètre pour utiliser les cercles définis par leur centre et un point pour reporter des longueurs. L'absence de ce type de cercle les a beaucoup perturbés et ils ont tenté d'utiliser le cercle de base de la même façon avec toutes les difficultés qui en découlent pour la validation de la figure par déplacement.

L'exemple du travail de Géraldine et Sandrine (Figures 24 et 25) illustre une utilisation de la tangente à un cercle pour la construction de la parallèle. Nous détaillons ici quelques autres procédures utilisant des cercles que les élèves ont utilisées.

Audrey et Aurélie utilisent des cercles qu'elles ajustent pour les rendre symétriques autour de (D).



Dans cette figure, le point F est le symétrique de P par rapport à (D). Les deux cercles C1 et C2 sont des cercles de base puisque le menu ne permet pas de disposer d'un cercle défini par son centre et un point. Elles les ajustent comme deux cercles symétriques l'un de centre P passant par F, l'autre de centre F passant par P.

figure 26

Il est difficile ici de dégager l'intention des élèves dans cette construction. La construction de la bissectrice de l'angle $\widehat{PP5P3}$ et de la droite (PP3) permet d'envisager la mise en œuvre d'une procédure de type **CarBiss** mais qui n'aboutit pas.

Otilia et Sophie, elles, tentent la construction d'un carré en utilisant des tangentes à un cercle de base (Figure 27). Cette procédure Carcer correspond à celle que nous avons décrite dans l'analyse a priori. Elle est disqualifiée par les élèves elles-mêmes quand elles déplacent P (Figure 28).

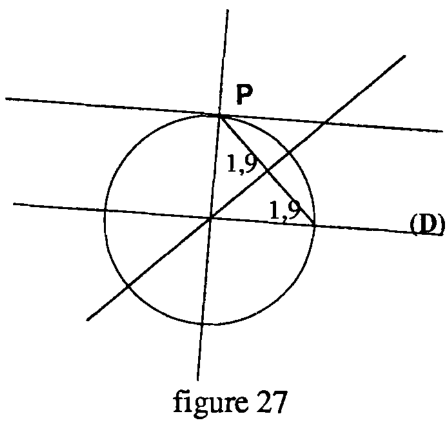


figure 27

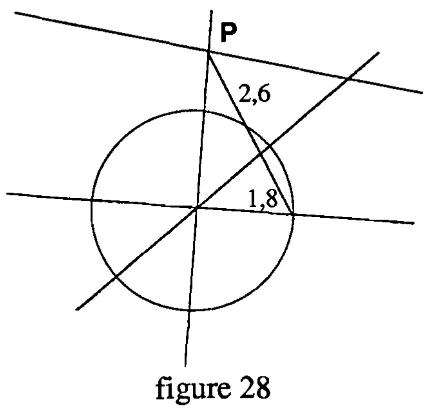


figure 28

Des utilisations de cercles comme celles de Frédéric et Farid sont difficiles à analyser et sont abandonnées, non pas parce qu'elles sont disqualifiées par le déplacement mais parce que les élèves ne voient pas comment les faire aboutir. Voici leur construction.

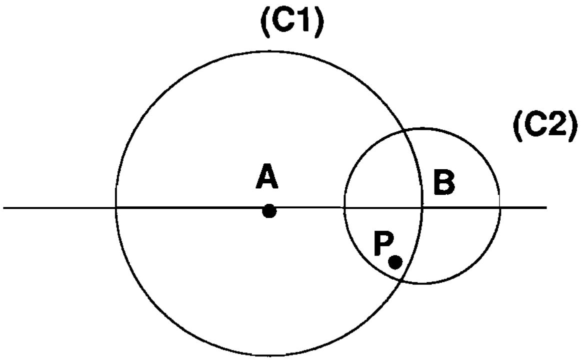


figure 29

Les points A et B sont des points sur la droite (D) et les cercles C1 et C2 sont des cercles de base construits de façon que (C1) ait pour centre A et passe par B et C2 pour centre B. Ils ont construit les intersections de C2 avec la droite D. Cette construction est abandonnée sans qu'il y ait eu déplacement des objets de base de la figure.

Chez Amandine il y a une tentative d'utiliser le cercle de base en définissant directement son rayon à l'aide d'un segment qu'elle construit au préalable. Ceci est illustré par trois étapes de sa figure (Figure 30-a-b-c).

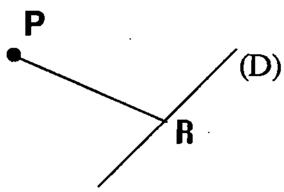


figure 30-a

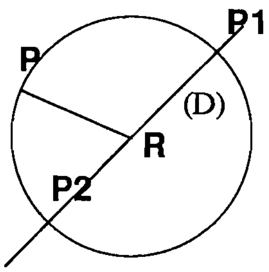


figure 30-b

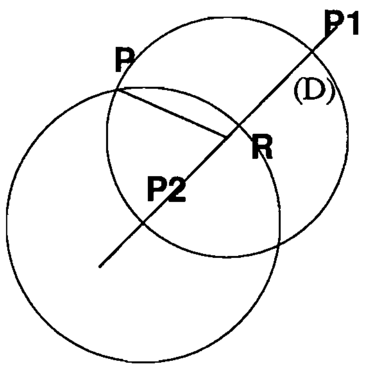


figure 30-c

c. Droite de base

Nous avons observé chez trois binômes une utilisation de la droite de base qui tient au comportement particulier de la droite de base relativement au déplacement et qui ne manque pas de poser des problèmes au niveau de la validation.

Voici le protocole de Audrey-Aurélie à ce propos.

Ces deux élèves construiront d'abord une droite de base à partir du point P et d'un point de base P3 qu'elle crée en même temps que la droite (Figure 31-a). Cette "parallèle" PP3 ne résiste pas au déplacement de P. Les élèves elles-mêmes font ce contrôle (Figure 31-b).

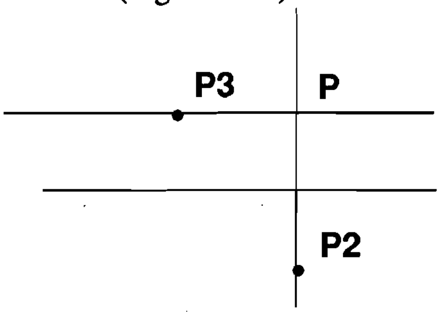


figure 31-a

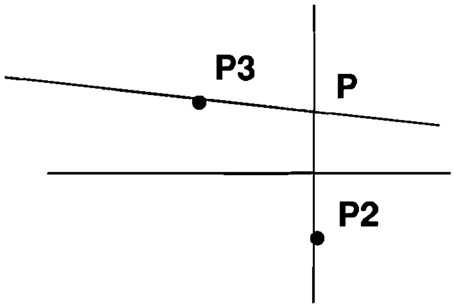


figure 31-b

Elles effacent la "parallèle" ainsi construite et construisent une droite de base (d3) qu'elles essayent de prendre perpendiculaire à (D) (Figure 32-a). Elles ajustent la direction de (d3) (figure 32-b). Cette modification de la direction atteste que ces élèves savent que la direction de cette droite de base n'est pas liée à autre chose que le choix qu'elles réalisent pour la direction. En particulier, il n'y pas de lien entre P, d et la droite (d3).

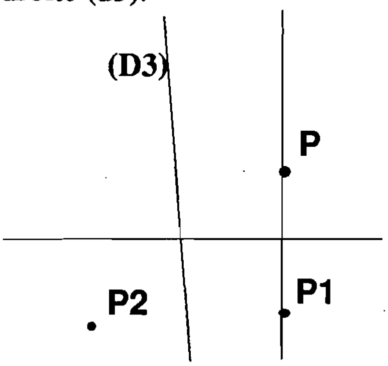
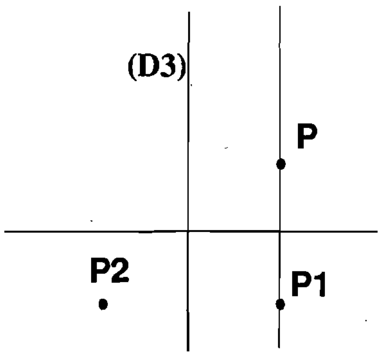


figure 32-a



fiigure 32-b

Elles construisent P1, symétrique de P par rapport à (D), P2 symétrique de P1 par rapport à (d3) et P3, symétrique de P2 par rapport à (D) ; puis la droite (D4) qui passe par P et P3 (Figure 33). Elles déplacent le point de base P, ce qui ne modifie pas le parallélisme compte tenu de la position de (D3). Elles déplacent aussi les droites (D) et (D3) sans modifier leur direction[7] .

Or ces élèves savent le faire, comme nous l'avons vu plus haut, mais tout se passe comme si les directions de (D3) et de (D) ne devaient plus être modifiées par

[7]Pour modifier la direction d'une droite de base, il faut appuyer sur une touche du clavier (Option sur Macintosh ou Alt sur PC) pendant que l'on fait glisser la souris.

déplacement pour la validation de la figure, alors que celle de (D3) l'a été pour la construction.

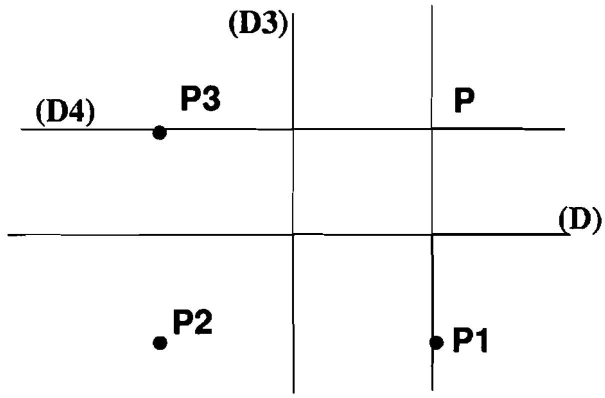
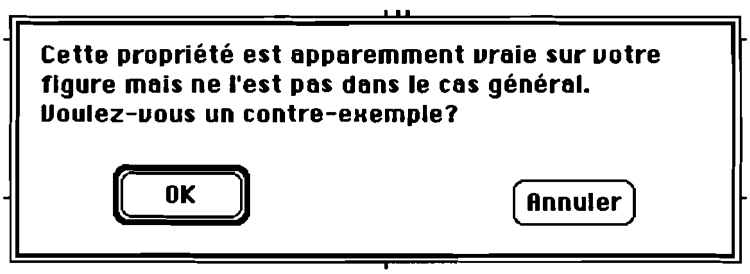


figure 33

On voit ici que la conservation par déplacement de la direction d'une droite de base a conduit ces élèves à valider une construction erronée. Il faudra une intervention de l'enseignant pour disqualifier la figure.

Le groupe de Gaëlle et Sylvie fait exactement la même construction. Elles savent aussi ajuster une direction d'une droite de base, ce qui se voit dans leur construction, mais elles ne modifient pas la direction de (D) ou de (D3) pour valider. Par contre elles utilisent l'article vérifier une propriété disponible sur la version Macintosh. En demandant si les droites (D) et (D4) sont parallèles (Figure 33), elles obtiennent le message :



Mais c'est le professeur qui changera la direction de la droite (D3) pour mettre en évidence que (D4) n'est pas parallèle à (D).

Le groupe de Catherine et Laurent est le dernier de ceux qui utilise une droite de base.

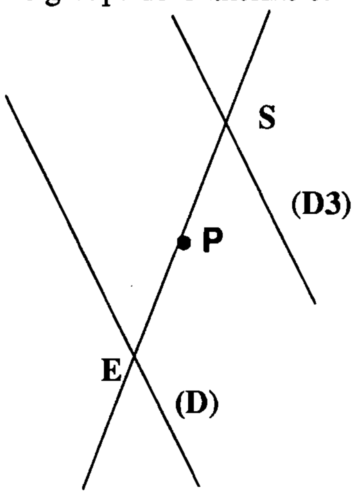


figure 34

Après avoir construit un point E sur la droite (D) et S est symétrique de E par rapport à P.
Ils construisent (D3) perceptivement parallèle à (D) et passant par le point S.
Ces élèves dans leur tentatives diverses ont perdu de vue la consigne qui veut que la parallèle à (D) qu'il faut construire passe par P.
Ils construisent bien une parallèle à (D) mais elle ne passent pas par P. C'est encore l'utilisation de vérifier une propriété qui les conduira à abandonner une procédure de ce type.

Pour conclure sur les droites de base et leur utilisation dans les constructions des élèves, on peut remarquer que seul 3 binômes sur 22 les ont utilisées. Il est probable que les autres ont réalisé rapidement que ce n'était pas l'outil adapté à la situation. On peut noter que parmi ces trois groupes d'élèves la conservation de la direction dans le déplacement d'une droite de base les a conduit à valider leur construction alors qu'elle était incorrecte ou encore à utiliser un autre type de validation : le vérificateur de propriétés intégré à la version Macintosh de Cabri.

• Perpendiculaire commune

Analysons maintenant les procédures correctes mises en œuvre par les élèves. La plus utilisée est celle qui fait appel à la symétrie pour construire des perpendiculaires. 10 binômes sur 22 l'ont utilisée et parmi ceux-ci, la moitié l'on réalisée directement sans recherches dans d'autres directions. Ce qui est remarquable dans les réalisations des élèves, c'est que tous construisent (Figure 35) le symétrique de P autour de la droite (D) alors que souvent ils ne l'utilisent pas et que la procédure la plus rapide n'utilise pas le symétrique de P autour de (D). Il semble que la difficulté vienne de la nécessité de créer un point de base P alors que la construction ne dépend pas de ce point. Reconnaître que la direction de P_1P_2 soit un invariant indépendant de la position de P1(Sauf s'il est sur (D) - ce qui n'est jamais envisagé par les élèves) ne va pas de soi pour les élèves.

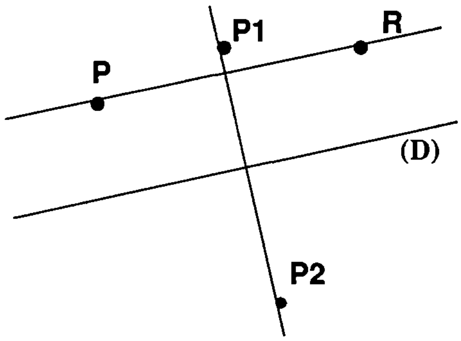


figure 35

Voici le seul exemple de protocoles que nous donnerons à propos de cette procédure : celle de Marylène et Claire.

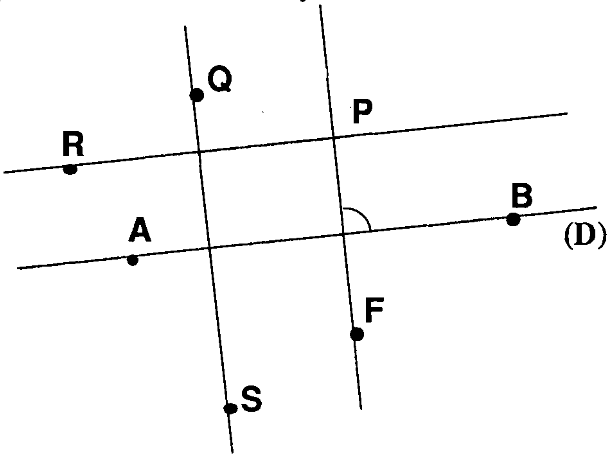


figure 36

Les points A et B définissent la droite (D).

Après la construction de F symétrique de P par rapport à (D), elles construisent Q point de base et son symétrique S autour de (D). puis le symétrique de P autour de la droite (QR).

Elles écrivent pour justification : "*Car quand deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles*".

Les constructions sont toutes analogues par contre les textes produits comme justification par les élèves sont très divers. Ces textes devaient fournir les propriétés mathématiques qui assurent que la droite construite est parallèle à (D).

Citons celle de Farid et Olivier :

"*Lorsque deux droites sont parallèles elles sont toutes deux perpendiculaires à la même troisième*".

Par contre les justifications sont souvent beaucoup moins claires que celles fournies par ces deux élèves. Elles ne correspondent pas toujours à la construction et s'appuient davantage sur l'observation d'éléments mis en évidence par la figure.

Voici par exemple la justification de Farid et Frédéric :

"Dans un parallélogramme (rectangle) les côtés sont parallèles 2 à 2".
Leur justification s'appuie sur la perception de la figure où le rectangle est conservé par déplacement. Elle ne s'appuie pas sur la construction effectivement réalisée à partir de P3 et P4 et du symétrique de P5 par rapport à la droite (P3P4).

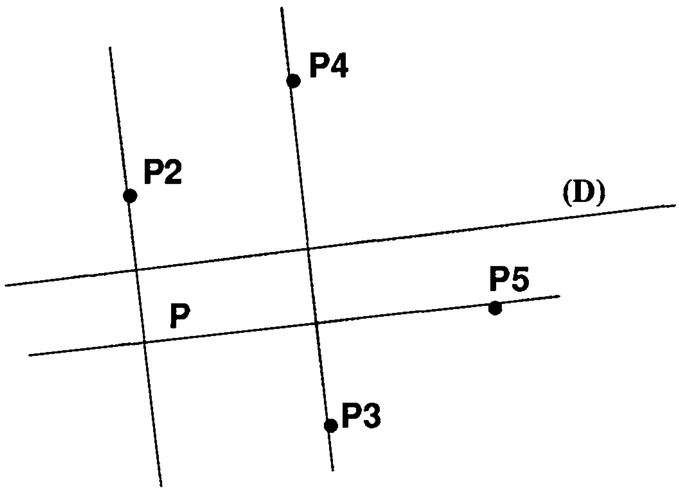


figure 37

D'autres justifications sont parfois des descriptions de la figure comme celle de Séverine et Delphine :

"*On a tracé la perpendiculaire de la droite D passant par P. On a mis un point au hasard. On a fait le symétrique de ce point par rapport à (D) . On a fait le symétrique de ce point par rapport à cette nouvelle droite*".

Le tableau d'ensemble des résultats montre que la moitié des binômes ayant utilisé cette procédure ont fourni une justification que l'on peut considérer comme correcte.

• Procédure milieux

Cette procédure correcte est utilisée par 8 binômes sur 22, c'est à dire par moins d'élèves que la précédente et 4 binômes la mettent en œuvre sans recourir à d'autres procédures préliminaires.

Voici des exemples de ces productions.

Lydie Rachel

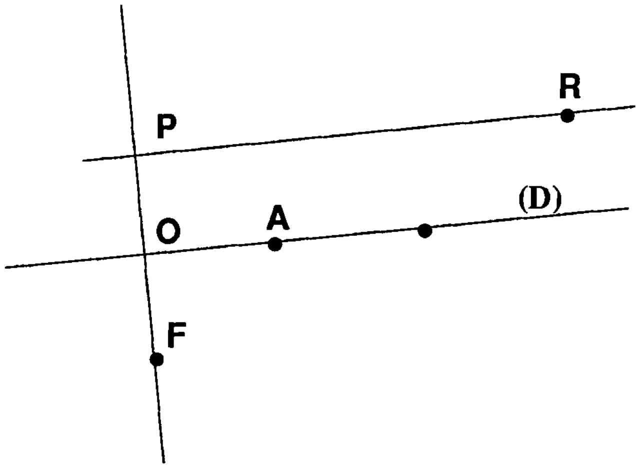


figure 38

Ces élèves construisent sans essais préliminaires le point F puis A sur la droite (D) et enfin le point le point R pour construire la droite PR.

Justification de ces élèves : *"La droite est parallèle grâce à la propriété des milieux: Comme PO = OF et FA = AR alors PR //(D)".*

La plupart des constructions utilisant la propriété des milieux sont très proches de celle de Lydie et Rachel. Seule la construction de Julien et Daniel est sensiblement différente.Julien et Daniel font une construction en deux temps :

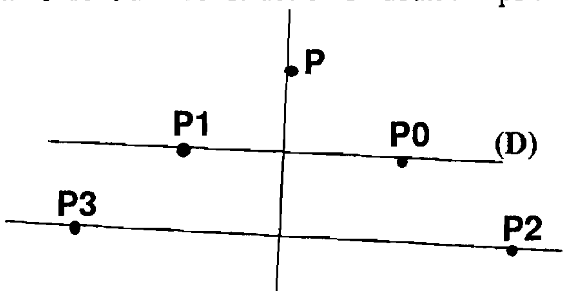


figure 39

A partir d'un point P0 sur la droite (D). Ils construisent successivement P1 symétrique P0, puis P2 et P3 symétriques de P (Figure 39). Cette construction ne débouche pas mais les conduit sans doute à une solution correcte puisqu'ils effacent tout et construisent le symétrique P1 de P autour de d puis un point quelconque P2 sur la droite (D), son symétrique P3 par rapport au point d'intersection de (D) et P1. (Figure 40 ci-dessous). Ils construisent ensuite P4 et P5. et la droite (P4P5).

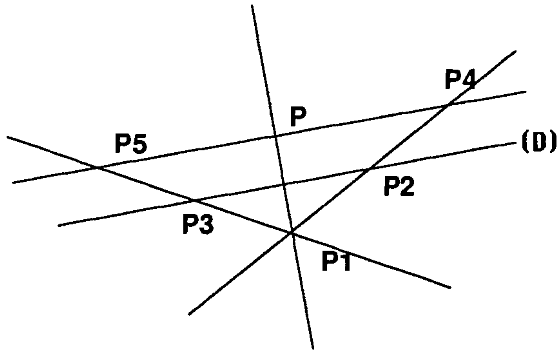


figure 40

Ils justifient leur construction de la façon suivante :
"Notre droite passant par P est parallèle à (D). Quand on fait une droite qui passe par le milieux des 2 côtés, la droite est parallèle au troisième et elle fait la moitié de la droite".

La construction en deux temps de Julien et Daniel montre bien comment ces élèves, après de nombreuses recherches (déjà exposés plus haut) en arrivent grâce au premier temps à concevoir une utilisation de la propriété des milieux pour construire une parallèle. La propriété des milieux devient pour eux un outil de construction.

Pour d'autres élèves la construction est correcte mais leur justification s'appuie sur une vision perceptive de la figure et la conservation des angles dans le déplacement. Ainsi pour Didier et Jérémie qui réalisent la même construction que Julien et Daniel (Figure 41).

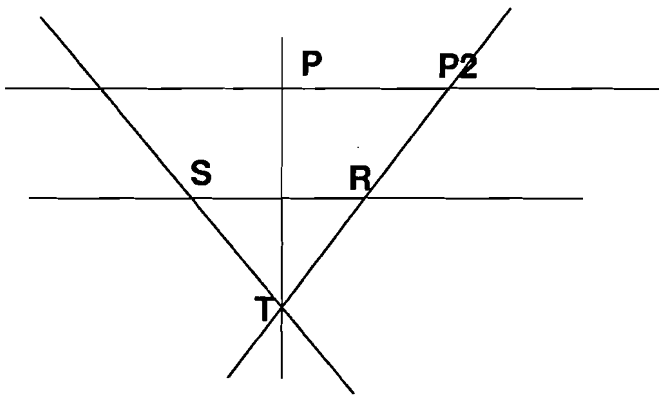


figure 41

Leur justification ne prend pas en compte la propriété des milieux ni le rôle joué par le symétrique de T par rapport au point R :

"On a mis le symétrique du point P par rapport à D, puis deux triangles rectangles et leur bissectrice. On fait le symétrique de l'angle droit par rapport à l'hypoténuse ce qui nous donne la parallèle. La droite est parallèle à cause des deux triangles rectangles qui rejoignent P et la droite D. On rejoint P aux deux symétriques des deux triangles rectangles."

Mais d'une manière générale, les justifications de cette procédure des milieux sont plus complètes et moins proches des descriptions que pour la procédure précédente (Droites perpendiculaires). Trois groupes seulement sur les 8 qui l'utilisent ne fournissent aucune justification à leur construction.

• Procédure carrés-bissectrices

Cette procédure, assez complexe, a été utilisée par deux binômes jusqu'à la fin et a presque abouti pour un troisième. Elle utilise les propriétés de la bissectrice comme axe de symétrie et les propriétés du carré (Diagonales et côtés).

Voici par exemple la construction de Laury et Audrey :

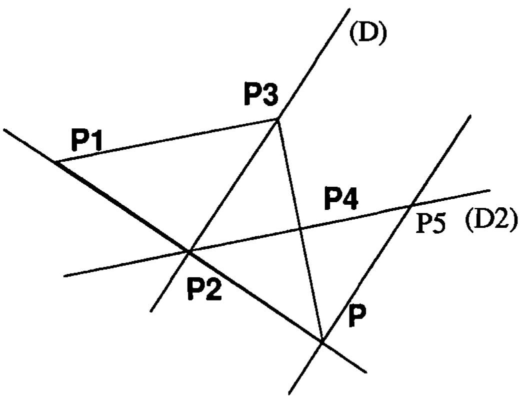


figure 42

Ces élèves construisent un point P3 sur (D) et le symétrique P1 de autour de (D). Elles construisent l'intersection P2 et la bissectrice de $\widehat{P3P2P}$.
Le symétrique de P2 autour de la droite PP3 donne le Point P5.
Malheureusement cette construction dépend de la position du point P3 sur (D). Sa position fait presque du quadrilatère PP2P3P5 un carré ce qui assurerait alors le parallélisme.

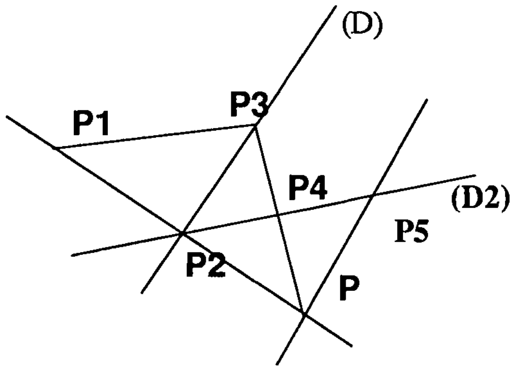


figure 43

Le déplacement de P3 par les élèves va disqualifier cette construction.

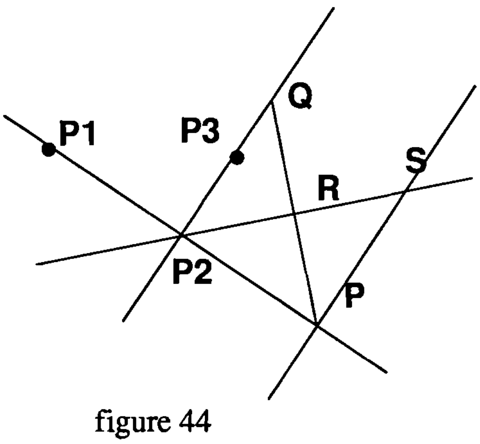


figure 44

Elles effacent puis reconstruisent un point P3 pour obtenir la bissectrice mais construisent ensuite le point Q comme symétrique de P autour de cette bissectrice. et achèvent alors correctement la même construction. Ce protocole montre comment le déplacement a non seulement disqualifié une figure mais permis à des élèves de comprendre ce qui empêchait leur construction de produire une parallèle : la position du point de la droite D qui soit un "bon sommet" pour le carré.

Les étapes de cette construction indiquent que ces élèves savent, à partir du déplacement du point P3, analyser ce qui fait que le fonctionnement de leur figure n'est pas celui qu'elles attendent. Le point P3 est nécessaire pour la construction de la bissectrice mais il ne peut pas être le sommet d'un carré. Mais elles ne fournissent pas de justification.

Florent, un autre élève, qui travaille seul, a conduit sa construction jusqu'au bout avec cette procédure.

Il construit PP' puis un point Q de la droite (D) et la bissectrice de $\widehat{QIP}$ (Figure 45). Le symétrique de P autour de cette bissectrice donne le point R. Le symétrique de I autour du milieu de PR donne le quatrième sommet d'un carré.

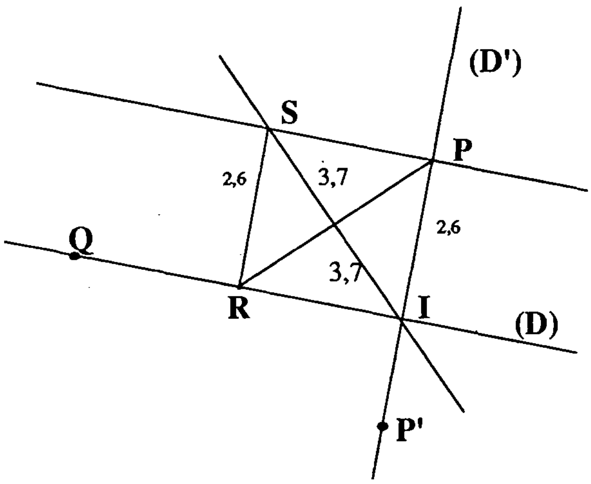
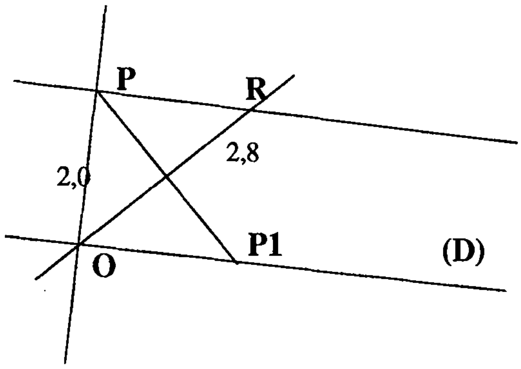


figure 45

Florent justifie :
"J'ai tracé un carré grâce à la symétrie et à la bissectrice : donc sachant que les côtés d'un carré sont parallèles 2 à 2 les 2 droites sont parallèles".

Enfin le groupe de Sophie et Otilia après avoir tenté une construction de ce type l' a abandonnée pour terminer avec des perpendiculaires communes (percomm).



Elles placent P1 sur (D) et l'ajustent en utilisant la mesure pour obtenir un triangle isocèle OP1P. la bissectrice de l'angle $\widehat{P1OP}$ coupe PP1 en son milieu et le symétrique de O est R.

figure 46

Ces élèves construisent un carré mais elles déplacent le point P en observant que leur figure n'est pas conservée par déplacement du point P (Figure 47).

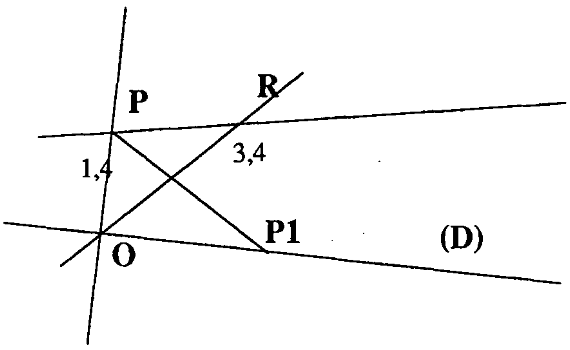


figure 47

Elles essayent la même construction avec un cercle de base : (procédure carrés-cercles). Puis cette construction est aussi disqualifiée par le déplacement de P (figure 49).

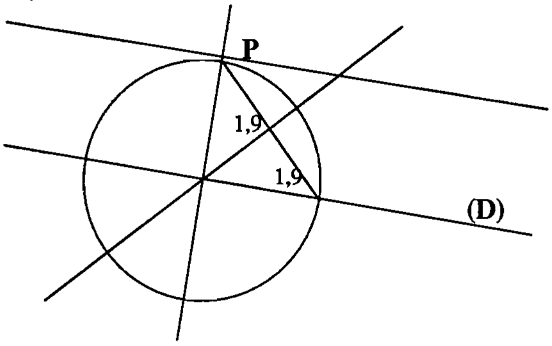


figure 48

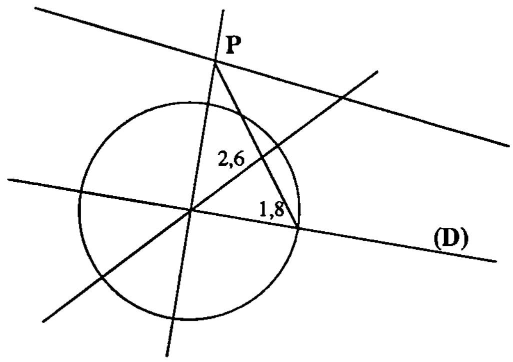


figure 49

Elles abandonnent alors la construction utilisant un carré. Le travail de ces élèves montre bien comment la déplacement leur permet d'invalider les figures qui ne correspondent pas à ce qu'elles doivent produire et résister au déplacement. Elles s'orienteront vers une construction avec des perpendiculaires.

• **Procédure Bissectrice**

La procédure bissectrice n'a été mise en œuvre que par une seule élève Marie-Jeanne. Elle a été décrite dans l'analyse a priori. Mais Marie-Jeanne ne fournit pas la justification que l'on pourrait attendre. Elle écrit un texte, incomplet d'ailleurs, qui fait référence à la propriété des perpendiculaires communes (sans doute recopié à la hâte sur un voisin à la fin de la séance).

III. Conclusion

L'expérimentation que nous avons conduite a montré que conformément à nos prévisions les élèves de 13-14 ans construisent tous facilement une perpendiculaire en utilisant les propriétés de la symétrie. La procédure utilisée est toujours la même : construction de la droite passant par un point et son symétrique.

La construction d'une parallèle a également été réussie par la quasi totalité des élèves dans les conditions imposées par la situation (invariance par déplacement des objets de base); les procédures utilisent majoritairement soit deux symétries orthogonales successives soit une symétrie centrale et la propriété des milieux dans le triangle. Des procédures plus complexes avec un carré ou une bissectrice apparaissent mais de manière très minoritaire.

Les constructions que les élèves réalisent à partir des menus réduits conduisent bien les élèves à faire fonctionner les connaissances relatives à la symétrie orthogonale ou centrale et plus de la moitié savent justifier leur construction à l'aide de propriétés mathématiques.

Nous nous sommes particulièrement attachés à observer les interactions du logiciel avec les procédures et la validation. De ce point de vue on peut noter une utilisation fréquente par les élèves eux-mêmes du *déplacement comme moyen de validation de la figure*. La non conservation du parallélisme par déplacement suffit à disqualifier les constructions dans tous les cas. Nous avons pu observer des cas où l'analyse par les élèves des déformations de la figure les conduit souvent à identifier les dysfonctionnements de leurs procédures et à les modifier. La validation est le plus souvent réalisée par les élèves eux-mêmes à l'aide du déplacement, et parfois à l'aide du vérificateur de propriétés du logiciel. Le seul cas où les élèves valident une figure incorrecte est celui où des droites de base conservent leur direction par déplacement.

Du point de vue mathématique, cette situation illustre l'utilisation performante qui peut être faite de la *symétrie orthogonale ou centrale comme outils de construction.* Les propriétés mathématiques comme "la propriété des milieux dans un triangle" deviennent ainsi des outils de construction.

Un tel travail ne peut pas être réalisé en dehors d'un environnement informatique qui met à la disposition des élèves des constructions complexes (Symétries ou bissectrice) en s'affranchissant des étapes de construction nécessaires dans l'environnement papier-crayon.

Les logiciels de constructions géométriques, et Cabri-géomètre en particulier, permettent ainsi de créer des situations où les outils mis à la disposition des élèves peuvent être à la fois plus réduits et en même temps plus sophistiqués. Le choix judicieux d'une situation de construction et d'un menu associé permettant de conduire les élèves à l'utilisation de propriétés mathématiques comme outils de construction.

Bibliographie

ARSAC G., (1989), La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. Proceedings of the thirteenth conference of the international group for psychology of Mathematics. pp. 85-92, *Editions GR didactique et acquisitions des connaissances scientifiques. 46 rue Saint Jacques, 75005 Paris.*

ARTIGUE M., (1987), Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide. *Publication de l'IREM de Paris VII.*

ARTIGUE M., (1991), Analyse de processus en environnement informatique *Petit x, IREM de Grenoble n° 26, (1991), pp. 5 à 27.*

BAULAC Y., BELLEMAIN F., LABORDE J.M., (1988-90) Cabri Géomètre ; Le cahier de brouillon inter actif pour l'apprentissage de la géométrie. *Logiciel et manuel de l'utilisateur. Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique IMAG BP 53 X, 38041 Grenoble - Cedex.*

BELLEMAIN F., (1992), Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre. *Thèse de l'Université Joseph Fourier, LSD-IMAG.*

BELLEMAIN F., CAPPONI B., (1992), Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *In Educational Studies 23 (1992), n° 1, pp. 59-97.*

BELLEMAIN-GERENTE, (1990), Géométrie et Informatique : vers la médiatrice. L'expérimentation : lieu d'interaction entre la problématique du chercheur et celle de l'enseignant *Petit x, n° 24, (1990), pp. 37-59.*

BERGUE D., (1992), Une utilisation du logiciel "Le géomètre" en 5ème, *Petit x n° 29 pp. 5-13.*

BERGUE D., (1990), "Le géomètre" en 5ème, *Petit x n° 29 pp. 5-13.*

CAPPONI B., LABORDE C., (1991). Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques 1991, Plestin les Grèves, pp. 220-22.*

CAPPONI B., STRÄßER R., (1992). Cabri-Géomètre in a college Classroom. Teaching and Learning the cosine function with Cabri-Géomètre. Zentralbalt für Didactik des Mathematik, 90/5, pp. 171-90.

LABORDE C., (1992), Solving Problems in computer based geometry environments : the influence of the features of the softwarz ; *Zentralbatt für Didactik des Mathematik. 92/4, pp. 128-35.*

LABORDE J.M., STRÄBER R., (1990), Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learling. *Zentralbalt für Didactik der Mathematik. 90/5, pp. 171-90.*

MERCIER A., (1993). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège , *Petit x n° 32* .

PARZYSZ B., (1988), Knowing vs Seeing, problems of the plane representation of space geometry figures. *In Educational Studies in Mathematics 19 (1988), n° 1, pp. 79-92.*

STRÅßER R., (1991). Dessin et figure, géométrie et dessin technique à l'aide d'un ordinateur. *Séminaire de didactique des mathématiques e de l'informatique. Grenoble, LSD-IMAG, Université Joseph Fourier, pp. 139-76.*