# AUTOUR DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE

*Troisième partie*

Alain MERCIER
Jacques TONNELLE
IREM d'Aix-Marseille

*Le lecteur trouvera ci-après la troisième partie d'un dossier élaboré à l'occasion et dans le cadre d'un stage de formation continue de quatre jours, réalisé, sous l'égide de la MAFPEN de l'Académie d'Aix-Marseille, et à l'intention de professeurs de Collège confrontés à la mise en oeuvre de nouveaux programmes, par une équipe de l'IREM d'Aix-Marseille constituée d'Yves Chevallard, Michel Jullien, Alain Mercier et Jacques Tonnelle.*

*Les textes précédents se composent de trois sections assez différentes d'allure.*

*La première, intitulée* ***A. La géométrie et son enseignement comme problèmes,***[1] *constitue une manière de « leçon inaugurale » qui tente d'esquisser un questionnement à notre avis fondamental.*

*La seconde,* ***B. La notion de construction géométrique comme problème,***[2] *est d'aspect plus technique, et se veut une illustration du phénomène, sur lequel on ne saurait, nous semble-t-il, trop insister, de l'intrication du didactique et du mathématique.*

*Dans la troisième,* ***C. Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace,***[3] *l'étude de l'activité géométrique que les programmes induisent et de la solution que les manuels proposent est engagée ; on y cherche une solution didactique compatible avec les contraintes mises en évidence dans la première section.*

*Le texte qui suit se compose donc de la quatrième section, intitulée* ***Premières études didactiques de questions d'enseignement.*** *On y poursuit l'étude de l'activité géométrique que les programmes induisent, à la recherche d'un texte d'enseignement. Un certain style de travail dans l'espace (pour l'étude des propriétés de l'espace et des objet qui s'y trouvent pris) a maintenant été défini.*

---

1 Chevallard Y. & Jullien M. (1990), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Première partie. *Petitx, 27*, 1990-1991.

2 id.

3 Mercier A. & Tonnelle J. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Deuxième partie. *Petit x, 29*, 1991-1992.

*D'autres termes du lexique des programmes doivent encore être étudiés. C'est ce que la deuxième partie de cette section propose : nous ne sommes pas au moment d'aller dans les classes pour y observer dans le suivi les effets d'une ingénierie didactique. A ce stade, un enseignement conforme aux spécifications que nous avons construites est seulement possible en principe.*

## D. PREMIERES ETUDES DIDACTIQUES DE QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

### 1. La géométrie dans les classes de mathématiques

Avant d'aborder l'étude des pratiques possibles pour l'enseignement de la géométrie, nous devons regarder si l'espace de liberté qu'ouvrent les programmes permet de traiter le type de questions que nous avons posées. **Il s'agit de déterminer un contenu de l'enseignement de la géométrie au Collège qui soit cohérent avec les options qui ont été proposées dans le travail présenté précédemment.** Il nous apparaît en particulier nécessaire de distinguer trois aspects bien distincts des constructions géométriques (preuve de constructibilité, algorithme de construction, procédé de tracé) et de tenir compte des diverses fonctions des objets graphiques (schéma, figure, épure) en géométrie, afin de mieux les articuler.

Car si, pour différentes raisons - au nombre desquelles la faiblesse des élèves et la trop grande hétérogénéité des classes seront sans nul doute évoquées - le primat est donné à la figure dans son seul aspect d'objet matériel, sans articulation avec d'autres problématiques - *si les seuls problèmes résolus par les élèves sont des problèmes de tracés* - on s'acheminera alors vers deux types de difficultés :

- d'une part la prépondérance du tracé aura un effet néfaste et fonctionnera en *obstacle épistémologique* dès lors que, plus tard (dans l'année ou dans le cursus), l'on voudra faire l'apprentissage du raisonnement déductif - même par « de courtes séquences déductives », comme le stipulent les commentaires des programmes de Sixième - et de la démonstration en géométrie ;

- d'autre part il est à craindre que cette façon de procéder n'engendre bien vite *l'ennui* chez la plupart des élèves y compris - et peut-être même surtout - chez ceux qui réussissent le moins.

C'est en effet auprès de ces élèves que la « géométrie du tracé » est impopulaire : l'étude réalisée ci-dessous le montre. La demande d'une grande précision des figures réalisées est pour eux une source renouvelée d'échecs car ils y voient l'effet d'un « tour de main » technique qu'ils ont échoué à acquérir et dont le manque les poursuit d'année en année. Nous ferons l'hypothèse que leurs difficultés en géométrie ne sont pas, pour eux, l'effet d'un manque de connaissances théoriques sur l'espace : ils sont les dupes du contrat didactique primitif de la géométrie du dessin. Ils ont pris au pied de la lettre le discours officiel sur l'exactitude la propreté et la précision des figures, et ils croient vraiment qu'il faut « bien regarder, pour conclure ».

### *1. 1. En géométrie, les élèves s'ennuient, le tracé est prépondérant*

Voici les réponses des 30 élèves d'une 4e du collège annexe d'un lycée de la banlieue marseillaise, à quatre questions sur la géométrie[4].

1) *Qu'est-ce que la géométrie pour vous ?*
2) *Avez-vous aimé la géométrie de Sixième-Cinquième ?*
3) *D'après vous, la géométrie de Quatrième sera-t-elle différente ?*
4) *A quoi pensez-vous que la géométrie serve ?*

Le questionnaire est posé, depuis plusieurs années, à diverses classes du Collège : la répartition des réponses observée cette année encore montre une grande stabilité, et par exemple, plus d'un cinquième des élèves répond encore que « la géométrie, c'est dessiner... » à l'entrée en Troisième. C'est pourquoi nous nous satisferons de l'étude de cette seule classe : nous gagnerons, avec un effectif plus restreint, la possibilité de suivre les élèves dans leurs différentes réponses. Pour conserver une identification possible des élèves, d'une question à l'autre, nous les avons désigné par leur numéro d'ordre dans la liste alphabétique de la classe. Les réponses observées aux quatre questions posées sont commentées ci-dessous.

**1) « Qu'est-ce que la géométrie pour vous ? »**

| | |
|---|---|
| Une **étude** des formes (simples). L'étude des figures (tracées), des surfaces, des angles. | 3; 5; 10; 11; 13; 15; 21; 22; 26 |

Pour ce premier groupe qui rassemble environ un tiers des élèves, la géométrie est définie par son objet et ses enjeux de savoir (ils sont nommés ci-dessus par leur numéro d'ordre dans la liste alphabétique des élèves de la classe). *Ces élèves identifient les enjeux de l'enseignement de la géométrie* au travers des activités quotidiennes - les travaux géométriques - dont d'autres ne vont pas arriver à se dégager. Ce sont par conséquent, en principe, les élèves qui réussissent le mieux[5].

C'est pour les suivre tout au long du questionnaire, lorsqu'ils ont donné d'autres réponses, que leurs numéros d'ordre sont, alors, en caractères gras. Les réponses qu'ils font comme celles qu'ils évitent sont en effet pour nous un bon indicateur de la signification des réponses des autres élèves, qui ont moins bien identifié les enjeux de l'enseignement de la géométrie.

| | |
|---|---|
| On **calcule** des aires, des volumes, etc. C'est des mesures. | 2; 7; 9; **10**; **11**; 18; **22** |
| On **dessine** des figures avec une règle, un compas, une équerre et un rapporteur. On fait des figures. C'est du dessin (très précis). | 4; 14 ;23 ;29 |

4 Aubagne, Collège Joliot-Curie, le 30 septembre 1991 (avant le début du cours de géométrie de l'année).

5 Charlot B., Bauthier E. & Rochex J.Y., 1993, *Savoir et Ecole dans les banlieues et ailleurs.*

Pour un quart des élèves interrogés, les activités quotidiennes de calcul de mesures et de dessin de figures définissent la géométrie. *Pour ceux de ces élèves qui ne répondent pas d'abord que «la géométrie, c'est l'étude des formes et des figures», les enjeux de savoir ne sont plus présents.* Pour pouvoir les suivre, nous citerons leurs numéros d'ordre en italiques. On peut remarquer en particulier que le dessin n'est pas une des activités nommées par les élèves du premier groupe - ceux qui ont su donner les enjeux de la géométrie, à l'Ecole et au Collège.

| | |
|---|---|
| Théorèmes, définitions, hypothèses. Les parallèles, les symétries. | *14*; **21** |
| Un ensemble de figures. C'est des ronds des carrés et des angles. | 8; 9; 16; *23* |

Pour un cinquième des élèves de la classe, ce ne sont pas les activités qui permettent de définir la géométrie : ce sont les objets sur lesquels porte l'activité, qu'ils soient des objets mathématiques, ou des objets de l'espace. Mais on remarque ici encore comment l'étude des carrés, ce n'est pas les carrés eux-mêmes.

| | |
|---|---|
| C'est des mathématiques. | 1; 2; 6; 7; **13**; 17; 27; 30 |
| C'est dur, j'y comprends rien, c'est une source de problèmes, c'est compliqué, c'est un charabia. | 8; 20; 24; 27; 30 |
| Ca sert à rien, c'est lassant. | 8; 19 |
| Il faut bien savoir la leçon. Ca entraîne l'esprit logique, l'esprit pratique. | 1; 12 |
| C'est important pour moi, ça peut servir plus tard (à être architecte). | 6; **10** |
| J'aime bien. | *14* |
| J'aime pas ça. | 8; 20 |
| Non réponse. | 25; 28 |

Mais pour les quatre cinquièmes des élèves de la classe, la géométrie n'est pas étudiée pour elle même. L'élève 10, qui en a bien identifié les enjeux, l'étudie « parce que c'est important pour moi, ça peut servir plus tard », et l'élève 13 précise que « c'est des mathématiques ». Mais les autres renforcent leur absence de réponse sur les enjeux cognitifs de la géométrie en tenant discours sur leur rapport affectif à la matière, sur leurs difficultés à entrer en rapport avec ses contenus, ou en donnant un discours moral sur l'importance de son enseignement.

Cette position des élèves ne tient pas seulement à leurs propriétés personnelles, car la géométrie enseignée porte sa part de responsabilité, comme les réponses aux questions suivantes le montrent.

**2) « Avez-vous aimé la géométrie de 6e-5e ? »**

| | |
|---|---|
| Oui, car c'était simple (facile). Oui car on reprenait ce qu'on avait fait en primaire. Oui car ça se répète. | 12; *14; 23* |
| Oui, car c'est une nouvelle matière. C'est intéressant. Car on apprend les triangles, les carrés... | **11**; **22**; 17; 18 |
| Oui, car je comprenais. (...en 6e). (...en 5e). | 17; 1; 2; 25 |
| Non, car je ne comprends rien. (...en 6e). (...en 5e). | 16; 20; 9; 25; 30; 2 |

Pour la moitié des élèves, l'intérêt pour la matière vient de la qualité de la progression qu'ils peuvent réaliser. Ainsi, la « compréhension » permet que l'enseignement « apporte un progrès ». Pour les élèves qui sont satisfaits de la répétition, c'est parce qu'ils trouvent là une occasion de réussir enfin. Pour ceux qui sont heureux de la nouveauté, c'est parce qu'ils comprennent : les élèves 18 et 22 considèrent par exemple qu'en géométrie, en cinquième, « on calcule, c'est des mesures » : là est la nouveauté qui fait l'intérêt. L'intérêt pour le nouveau est une disposition générale des élèves par rapport aux objets enseignés, et n'est pas caractéristique de la géométrie ; mais encore faut-il savoir trouver du nouveau, lorsqu'il en existe. Le plus souvent il n'y a rien qui mérite, pour eux, d'être signalé. Il est fréquent que les particularités de la matière enseignée n'interviennent pas dans l'intérêt ou l'inintérêt que ces élèves lui portent. C'est aussi le cas en géométrie, dont l'intérêt vient par exemple de la simplicité, de l'aspect nouveau, du fait de comprendre, ou inversement de la complexité, de la répétition et du fait de ne pas comprendre. Mais lorsque les motifs de l'intérêt ou du désintérêt sont rapportés aux propriétés des travaux géométriques que réalisent les élèves, leurs réponses sont révélatrices.

| | |
|---|---|
| Oui, parce que j'adore dessiner. Oui, les constructions de figures. | *4*; 10; 18; **26** |
| Non, car ça enlève trop de points dans les contrôles. Je suis mauvais(e). Pour un millimètre on a faux. | 8; **15**; 3 |
| Oui, j'aime les parallèles, les angles alterne-interne, etc. Oui, reconnaître les figures. | **13**; *29* |
| Non, car c'est lassant, fatiguant. Ce n'est pas intéressant. Je n'aime pas les triangles. | 19; 24 |

Pour deux cinquièmes des élèves, l'intérêt (ou l'ennui) de la matière est lié au *dessin* : leur rapport à la géométrie au Collège est semblable au rapport déjà mis en place à l'école primaire, il n'a pas évolué. Ainsi, nous retrouvons ici certains des élèves pour qui la géométrie était de l'ordre du dessin, ce qui a pour eux l'avantage d'être facile. Nous tenons l'explication de leur intérêt pour la matière, et la clé de leurs déceptions à venir. En outre, comme cela se voit ci-dessous, seuls quelques élèves (un cinquième) considèrent les « explications » ou les démonstrations comme des objets déterminants en géométrie. Ceux-là, même s'ils connaissent l'objet de la géométrie qui leur est enseignée, « n'aiment pas trop expliquer » : c'est un travail bien plus difficile que ce qui leur a été demandé jusqu'à présent.

| | |
|---|---|
| Oui, mais je n'aime pas trop expliquer. Mais je n'y arrivais pas tout le temps. | 1; 6; **10** |
| Non, surtout les démonstrations, les théorèmes. Trop de théorèmes à apprendre. Il y a trop à retenir. | **3**; 20; **26** |

| | |
|---|---|
| Oui, je préfère à l'algèbre. Non, je préfère le calcul. | **22**; *23*; 7 |
| Oui. | 5; **21**; 28 |
| Non. | 24; 27; 28; 30 |
| Non, car c'est inutile. | 19 |
| Non, car c'est des maths. | 16 |

Les élèves restant n'avouent aucun motif à leurs préférences ou à leurs aversions.

**3) « D'après vous, la géométrie de 4e sera-t-elle différente ? »**

| | |
|---|---|
| On aura quand même plus de difficulté. Beaucoup de réflexion. On aura plus d'effort à faire. Ce sera plus dur. Plus complexe. | 1; *4; 14; 23*; **26**; 27; 28; 30 |
| C'est toujours les mêmes bases mais on ajoute chaque fois quelque chose de plus dur, on poursuit le programme. | **10**; 12; 17; *23*; 24; 27; *29* |
| Non, s'il y avait autre chose, on le saurait | **3** |
| Oui, des choses différentes et intéressantes. Plus élaborées. Sûrement, sinon, à quoi ça sert de passer ? | *4*; 6; **5** |
| Non | **15**; 16 |

On peut lire ici une sorte de désillusion. Ce sera sans doute plus difficile, mais toujours pareil, pensent trois cinquièmes des élèves. Un tiers, parmi cette majorité d'élèves qui n'attendent pas de changement, a de bonnes raisons de penser qu'il n'y aura pas un bouleversement de la matière. Ce sont les élèves qui ont bien repéré les enjeux essentiels, au delà du type d'activité que l'on pourra leur demander « la géométrie, c'est l'étude... » disent-ils. Pour ces élèves, ce sera sans aucun doute « plus difficile », et peut-être « différent et intéressant, sinon, à quoi ça sert de passer ? » s'écrie l'un d'eux.

Ceux qui ne voient dans la géométrie qu'une question de dessin pensent unanimement que la difficulté augmentera sans que le style du travail ne change en profondeur. Ils ont entièrement confiance dans ce que leur a montré leur expérience scolaire : en géométrie, les élèves dessinent. Même si « on aura quand même plus d'effort à faire, plus de réflexion », comme le dit l'un d'eux. Pour presque la moitié de la classe, le cas est donc grave : lorsque l'on connaît l'attrait du nouveau sur les élèves, on peut mesurer à quel point la géométrie leur apparaît comme un type de savoir pour lequel le rapport établi est pérenne. Dans un questionnaire précédent, un élève avait répondu : « Ce sera toujours des traits, encore des traits ! ». Même ceux qui aiment la géométrie parce que c'est du dessin et que c'est facile semblent espérer un changement : « On fera des choses différentes et intéressantes » dit l'un d'eux.

Il est temps que « ça change », mais seuls quelques élèves savent ce qui va changer : peut être parce que ça a déjà changé, pour eux, dès la Cinquième. Pour les autres, cela changera parce qu'ils cesseront de mesurer pour calculer et démontrer eux-mêmes, avec des théorèmes. Le Théorème de Pythagore peut alors servir d'emblème à la pratique nouvelle. Ces quelques élèves savent par avance ce que sera le nouveau contrat didactique.

| | |
|---|---|
| Oui | 2 |
| Oui, il faudra plus calculer et démontrer que mesurer | 18; **21** |
| Oui, on devra nous mêmes expliquer, faire des phrases, démontrer des phénomènes, prouver avec des théorèmes | **11**; **13**; **22** |
| Non, car on a fait beaucoup de géométrie en 5e : démonstrations, théorèmes. | 20 |
| Oui, le théorème de Pythagore | 6; 8; **22** |

Quelques élèves enfin restent sans opinion sur le changement, ils le font éventuellement tout en affirmant un avis tranché sur l'intérêt actuel de la matière, pour eux !

| | |
|---|---|
| Non, ça restera chiant même si c'est différent | 19 |
| J'espère que ce ne sera pas trop difficile | 9 |
| Je ne sais pas | 7; 9; **13**; 25 |

**4) « A quoi pensez-vous que la géométrie serve ? »**

| | |
|---|---|
| Savoir le volume, les surfaces, le périmètre. A mesurer | **10; 11** |
| Faire connaissance des calculs, des figures | 9; 18 |

Seuls de rares élèves résistent à l'utilitarisme auquel la question les convie. On sait que les grands objectifs, trop lointains, n'aident pas à l'apprentissage « ici et maintenant », parce que les moyens de les atteindre sont trop différents de ce qui fait l'attrait imaginaire des pratiques visées. La géométrie sert à être géomètre, dit l'un ; elle sert à tracer ...des objets de la vie quotidienne qui comportent des tracés : des cartes, des plans, des dessins techniques. Restent les métiers mythiques du bâtiment. Mais toutes ces pratiques ne sont pas nécessairement connotées positivement, et la déclaration « La géométrie sert à faire des cartes » peut prendre le sens « La géométrie ne me sera certainement d'aucun usage ».

| | |
|---|---|
| Plus tard, beaucoup de choses, un métier | 1; 2; 7; **10**; 13; *14*; 24 |
| Architecte, construire une maison, maçon | 1; 6; **10**; **11**; *14*; 20; **21**; **22**; 30 |
| Géomètre | 14; 20; *23* |
| Etre ingénieur | **22**; 30 |
| Etre professeur de mathématiques | 7 |
| Tracer des cartes. Faire des plans. Au dessin technique. | *4*; **21** |
| Faire des programmes sur ordinateur | *4* |
| Savoir dessiner avec des traits. Tracer des champs ou des maisons sur une feuille | 2; **3**; 17 |

C'est sans doute pour cela que de nombreux élèves répondent que la géométrie ne sert à rien « qu'à avoir de mauvaises notes », comme le remarque pertinemment un élève, qui a sans doute remarqué comment *les professeurs se servent* - en interrogation écrite - *de la géométrie comme d'une variable de commande des notes « à la baisse »*. En effet, le poids du travail numérique, dans une interrogation, donne approximativement la note moyenne de la classe ; il suffit donc d'augmenter ou de diminuer la part de la géométrie, pour commander cette moyenne, ce qui est parfois indispensable pour assurer la relance de l'intérêt didactique. Si trop d'élèves réussissent, alors les élèves de la classe travaillent moins ; si trop peu d'élèves réussissent, alors, le temps didactique[6] ne passe plus convenablement : rappelons que le *temps didactique* est rythmé par la succession des objets de savoir enseignés officiellement par le professeur. Les élèves doivent « suivre », c'est-à-dire, apprendre au rythme donné par l'enseignement. Si le rythme n'est pas suffisamment soutenu, les élèves s'ennuient. Mais si certains élèves ne parviennent pas à le suivre, la progression s'arrête, pour eux. Si trop d'élèves sont dans le cas d'un arrêt de la progression quand le temps continue d'avancer, la convivialité de la classe ne peut plus être assurée.

| | |
|---|---|
| A nous faire travailler. A rien (on n'invente pas). A avoir des mauvaises notes | 8; 16; 19; 20; 25; **26**; 27; 28; 29; 30 |
| Mais il faut en apprendre quand même. Demande beaucoup d'attention | 1; 9; 30 |
| Aucune idée. Non réponse | 5; 12; **15** |

Pour se convaincre de cette utilisation de la géométrie, on peut simplement observer ce partage des points dans toute classe où l'enseignant, suivant les

6 Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition 1991, augmentée d'une postface).

prescriptions de l'Inspection, mène de front les deux enseignements de l'algèbre et de la géométrie[7].

### *1.2. Les devoirs de contrôle et la géométrie, au Collège*

Comme les instructions orales de l'Inspection les y engagent et comme il est de tradition, les enseignants de mathématiques du Collège posent, en devoir surveillé ou en interrogation écrite, à la fois des questions portant sur « les activités numériques » et des questions portant sur « les activités géométriques ». Nous avons régulièrement demandé à des enseignants de Collège de nous montrer les énoncés des questions posées lors de ces contrôles écrits. *Les contrôles proposés comportent presque toujours une question de géométrie.*

L'observation que nous avons faite est alors la suivante : les questions de géométrie sont placées en fin de contrôle, elles valent pour moins de la moitié de la note globale, sauf dans les périodes où des questions « d'application numérique directe du cours » peuvent être posées, ou lorsque la réalisation d'une figure standard est demandée en préalable au problème lui-même. Ce qui fait qu'un élève qui ne répond correctement à aucune question de géométrie peut, tout au long de sa scolarité au Collège, conserver une évaluation moyenne régulièrement supérieure à 10/20, et qu'en fait la géométrie n'intervient que pour les élèves qui tentent de dépasser 12/20 : ceux qui se veulent « les bons élèves en mathématiques », ceux qui font le choix des mathématiques comme emblème de leurs qualités scolaires.

Il s'agit d'un phénomène dont la stabilité est étonnante aux différents niveaux de l'enseignement du Collège, et qui se garantit de l'ordre contractuel des questions d'une interrogation écrite, dont les questions sont graduées, des plus faciles aux plus difficiles. La position systématique de la géométrie en fin de contrôle renforce alors l'idée qu'il s'agit d'une partie particulièrement difficile des mathématiques, c'est une observation que chacun peut reproduire à l'envi avec succès, en obtenant de quelques enseignants de Collège leurs énoncés de contrôle. C'est pourquoi les quatre textes d'interrogation écrite présentés succintement ci-après se suffisent à eux-mêmes. Les Quatrième sont particulièrement favorables à l'apparition de ce phénomène, mais les Cinquième ou les Troisième le subissent souvent elles aussi.

**Quatrième, Aix-en Provence, 1989**

Deux questions sur six sont des questions de géométrie. C'est la proportion standard.

Plus précisément (mais comme toutes les questions posées dans une même interrogation se ressemblent fortement, du point de vue qui est le nôtre, seuls les commencements des questions sont donnés :

7 Mercier A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Thèse. Université Bordeaux I. (Annexe : 'La construction didactique de l'élève, comme problème didactique', Les devoirs de contrôle et la géométrie, au Collège, pp. 690-700)

**Troisième, Aix en Provence, 1989**

I) $a = 0{,}9$ $b = 0{,}7$ ; Calculer 1* $2 + a \times b + 5$ ...

II) $x = 8$ $y = 6$ ; Calculer 1* $2 \times x + 5 \times y$ ...

III) Qu'appelle-t-on cercle circonscrit ...
IV) Dessiner un triangle ABC tel que ...
V) Dessiner un triangle ABC tel que ...Marquer le point D, sur la droite (BC), tel que ...
VI) ABC, DBC, EBC sont trois triangles isocèles de base [BC]. Sur quelle droite les points A, D, E se trouvent-ils ? (réponse à justifier)

Barème : I : 4 points ; II : 4 points ; III : 2 points ; IV : 4 points ;
V : 2 points ; VI : 4 points.

L'effet est encore plus net pour les épreuves communes. Il serait fastidieux de donner d'autres exemples, mais voici les barèmes d'épreuves de ce type :

**Classes de Cinquième, Aix en Provence, novembre 1989, sur 30**

Présentation : 2 pts
I) Activités numériques
1* 3 pts ; 2* 2 pts ; 3* 3 pts ; 4* 6 pts ; 5* 2 pts ; 6* 2 pts
II) Activités géométriques
7* 5 pts ; 8* 5 pts

**Contrôle en Quatrième, Marseille, 1991 épreuve sur 20**

1) Calculer ...6 pts ; 2) Ecrire sous la forme ...6 pts ; 3) Donner l'écriture ...2 pts

4) ABCD est un carré ...4 pts ; 5) Soit un point ...2 pts ; 6) Soit un point ... Non Noté

Il semble donc bien que la géométrie, qui consiste pour de nombreux élèves en une activité de tracé dans les classes de Sixième et de Cinquième, et qui n'est pas souvent repérée par ces élèves comme *un domaine porteur d'une problématique propre*, se trouve reléguée à tous les niveaux du Collège dans le rôle peu enviable de « variable de commande des notes d'interrogation écrite », un des élèves interrogés s'en plaint. Ce phénomène en effet se produit aussi bien en Quatrième et en Troisième, alors que la géométrie commence à apparaître à certains élèves comme un savoir fort, structuré par l'exigence de la démonstration de résultats. Au moment donc où des élèves qui s'ennuyaient de devoir toujours « tracer » pourraient trouver un intérêt renouvelé à la pratique de la géométrie. Certains enseignants cherchent sans doute à obtenir que tous leurs élèves traitent les questions correspondant à des travaux géométriques : il leur faut pour cela montrer que les travaux géométriques ne sont pas plus difficiles que les travaux numériques. La négociation à la baisse qui s'ensuit amène bien souvent l'enseignant à demander encore « du dessin », dans l'espoir de donner un énoncé plus facile - on peut le constater dans les interrogations présentées ci-dessus. Et, par un effet pervers, pour les élèves qui ne rentrent pas dans le nouveau contrat (aux termes duquel la géométrie est un lieu d'exercice de l'expression et de l'argumentation rationnelles), cette négociation fait de la géométrie le domaine immuable du dessin géométrique, un travail où « pour un millimètre, on a faux ! ». Les évaluations nationales à l'entrée en Seconde le montrent à l'envi, puisqu'une grande partie des questions de géométrie qui sont posées demande un tracé, corrigé « au calque ». La géométrie risque fort de n'être jamais pour certains élèves ni un outil d'étude de l'espace sensible, ni un objet de savoir apte à assurer l'entrée dans une culture mathématique de type savant, une propédeutique de la rationalité. Il semble pourtant possible de retrouver le chemin des dimensions perdues de l'activité géométrique.

## 2. Questions d'enseignement : exemples

Pour sortir l'enseignement de la situation que nous avons décrite, il est nécessaire que l'on offre aux élèves les moyens de penser les travaux géométriques qu'ils ont à réaliser comme des activités relevant explicitement d'une connaissance rationnelle de l'espace sensible.

C'est ce qui nous amène à poser la question étudiée maintenant : « **Est-il possible de rendre visibles les mathématiques à l'oeuvre dans le cours de géométrie du collège ?** ». C'est seulement à partir d'une réponse positive à la question, qu'il est possible d'envisager des enseignements qui ouvriraient une voie différente. On voit que le chemin qui mène à la classe est encore long, et que les contraintes dont nous nous sommes jusqu'ici libérés et auxquelles nous devrons satisfaire sont fortes et nombreuses. Il ne s'agit donc à ce stade que de « mathématiques pour l'enseignement » ou, parfois, de « mathématiques de l'enseignement », même si nous pouvons mesurer notre progression depuis l'étude des problèmes de construction et de constructibilité qui relevaient des « mathématiques pour l'enseignant ». Nous n'arriverons donc pas ici à la construction de séquences expérimentales d'enseignement, si ce n'est en quelques points particuliers, à titre d'exercice, car le travail présenté n'est qu'un préalable à une telle activité : pour proposer des éléments du texte du savoir enseigné, il devrait encore prendre en compte la création d'une progression, c'est-à-dire, entrer dans une logique de l'exposition - qui reste à construire.

Les programmes mettent en avant un vocabulaire de l'action géométrique qui offre l'intérêt de définir celle-ci à la jonction entre l'action dans l'espace sensible et la modélisation géométrique de cet espace. « Décrire », « reproduire », « construire » sont les trois termes associés aux activités géométriques, au Collège. Ils donnent le cadre de cette étude préalable, où nous étudierons dans chacun des cas un exemple. Bien que quelques élèves rencontrent certains des problèmes et problématiques de la géométrie[8] par le moyen de la solution empiriste (choisie « tout naturellement » par les manuels) nous avons en effet montré comment cette solution constituait, pour beaucoup d'autres élèves, un obstacle à l'apprentissage attendu.

Mais avant d'aller plus loin, nous voudrions que l'on comprenne bien les motifs des observations de manuels que nous proposons. Il ne s'agit pas de polémiquer avec leurs auteurs, car il semble que ce que nous avons appelé « l'option empiriste » dont ces ouvrages sont porteurs soit renforcée par une évolution - récente - du style des ouvrages d'enseignement, dont ces auteurs ne sont pas maîtres. La plupart des ouvrages d'ancienne manière proposaient un exposé du savoir, tel que l'enseignant aurait pu le faire, suivi des exercices qu'il aurait pu donner aux élèves. Et l'enseignant qui suivait un ouvrage exposait le savoir et donnait à faire les exercices, dont il dirigeait la correction. D'autres, plus près de la pratique de la classe, proposaient aux élèves un texte que l'on pourrait considérer comme le scénario de la leçon que l'enseignant allait interpréter. Mais l'évolution du style pédagogique dominant impose aujourd'hui d'autres stratégies d'enseignement, aux termes desquelles l'enseignant doit organiser l'activité des élèves. Le scénario n'est plus le même.

Cependant, les manuels doivent aujourd'hui encore proposer, avec l'objet de savoir enseigné, le scénario de la leçon. Ils montrent donc l'organisation de l'activité des élèves, telle que l'enseignant pourrait la faire. Mais pour satisfaire à cette nouvelle fonction, les manuels scolaires ne peuvent plus proposer ex cathedra l'exposé du savoir lui-même : on pourrait en déduire qu'ils proposent que l'enseignant « fasse un cours ». Tout juste s'ils se trouvent encore autorisés à proposer des exercices que les élèves devraient faire d'eux-mêmes : l'activité d'exécution des travaux (numériques ou géométriques, peu importe) doit être dirigée, pour qu'elle puisse se montrer. Mais, comment diriger, tout en étant personnellement absent, des travaux mathématiques ? Comment organiser à distance un travail expérimental sur l'espace sensible ? Une théorie didactique plus développée et universellement diffusée aurait pu servir d'outil de description des solutions retenues, mais faute d'un tel outil technique, les auteurs de manuels en sont réduits à tenter de réaliser eux-mêmes la gageure pour montrer à l'enseignant ce qu'il pourrait faire s'il réalisait l'enseignement : pour diriger pas à pas les actions de l'élève, ils évoquent les actions de l'enseignant. Ils évoquent l'enseignement, ils évoquent l'apprentissage. Le principal intérêt des manuels scolaires serait alors, pour les enseignants, d'être une description de leur travail, mais faute des outils théoriques pertinents, celle-ci ne peut se faire que dans le cadre de l'épistémologie didactique spontanée qu'est l'empirisme.

Une des conséquences paradoxales de cette remarque, est qu'un manuel bien fait ne devrait surtout pas être mis dans les mains des élèves. Alors que, justement, les manuels sont distribués gratuitement à tous les élèves ! Nous trouvons ici un « caprice », une situation paradoxale caractéristique de la distance qu'il peut y avoir entre les intentions des acteurs d'une institution et les effets de leur action, parce que la situation est commandée par des contraintes telles, que les effets de l'action réfléchie des acteurs semblent des perversions absolues de leurs intentions premières.

---

8 Noirfalise R. (1992), *Contribution à l'étude didactique de la démonstration*. Bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand (prépublication).

## 2.1. Décrire

### *2.1.1. Décrire le parallélépipède rectangle*

Soit le chapitre *Parallélépipèdes* d'un ouvrage standard pour la Sixième[9], nous y trouvons tout d'abord un paragraphe « Approches » où l'on voit un patron de parallélépipède réalisé à partir de l'emballage d'une boîte d'allumettes, puis où l'on voit tracer des droites, comparer des murs parallèles et perpendiculaires. Le paragraphe suivant intitulé « Bases » présente dans sa première partie une « description » et plusieurs « représentations du parallélogramme » sous la forme - entre autres - du dessin d'un livre de poche, soulevé par une souris. Les élèves sont invités à *constater* sur ces représentations que « les parallélépipèdes sont constitués chacun de six faces, qui sont des rectangles, d'où leur nom de parallélépipèdes rectangles. Ces rectangles, qui sont des quadrilatères dont les quatre angles sont droits, sont des surfaces planes : ainsi, les faces d'un parallélépipède rectangle sont planes. » L'examen empirique de l'objet - évoqué seulement, nous sommes dans une situation semblable aux enseignements de sciences expérimentales où l'on décrit des expériences que l'on ne fait jamais - continue : « on y compte douze arètes et huit sommets ».

Sans nous demander même si ces observations sont bien pertinentes - si par exemple elles caractérisent l'objet décrit -, tentons de reprendre le problème auquel cette présentation répond : la présentation d'un objet et sa description. Peut-on donner une description caractéristique du parallélépipède qui montre le nombre des faces, des arêtes, des sommets, puis les droites et plans parallèles ou perpendiculaires, et qui nous aide à nommer ces différents éléments du parallélépipède ? L'ouvrage présenté fait ce travail, tout au long du chapitre, en développant les styles d'observation et de description que les premières présentations nous ont permis d'observer.

### *2.1.2. Décrire pour nommer et compter*

Suivons l'ouvrage scolaire en partant des six *faces* . Soient A, B, C, D, E, F ; une arète est alors au contact de deux faces, ce qui donne un grand nombre d'arètes a priori possibles : AB, AC, AD, AE, AF, cinq arètes avec la face A ; BC, BD, BE, BF, quatre arètes avec B, puisque BA est déjà comptée ; CD, CE, CF, trois arètes avec C, AC et BC étant déjà comptées ; DE, DF, deux arètes avec D, AD et BD et CD étant déjà comptées; EF, une arète avec E, les autres étant déjà comptées ; les cinq arètes en relation avec la face F sont toutes déjà comptées ; nous trouvons par conséquent $5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$ arètes possibles.

Le *parallélisme* de certaines faces doit alors intervenir, pour éliminer les arètes qui correspondraient à des faces parallèles : nous les avons comptées indûment. Soient A et B, C et D, E et F, les paires de faces parallèles, cela donne trois arètes à éliminer de notre compte, AB, CD, et EF, il y a donc 12 arètes sur le parallélépipède.

---

9 Benoît A., Gutmacher F., Guy G., Hugon A. (1986), *Mathématiques 6e*. Paris, Editions Didier. chapitre 'parallélépipèdes', pp. 52-67. C'est un ouvrage dans lequel l'enseignement de la géométrie est soigné, et l'option empiriste n'en est que plus manifeste. Sa démarche est construite, et cohérente avec cette option : il est donc bien adapté aux observations que nous cherchons à faire.

Nous pouvons, maintenant que nous avons intégré à la description de l'objet le parallélisme de certaines paires de faces, demander ce qu'il en est de leur position respective : pourquoi le parallélépipède est-il *rectangle* ? La propriété accessible est celle-ci : deux arêtes coplanaires sont dans une même face, elles sont alors parallèles ou perpendiculaires selon qu'elles proviennent de deux couples de faces dont les seconde face sont parallèles ou non. Ainsi les arêtes AC et AD sont parallèles parce qu'elles appartiennent toutes deux à la face A et parce que C et D sont deux faces parallèles, tandis que les arêtes AC et AE sont perpendiculaires parce qu'elles appartiennent toutes deux à une même face, A encore, mais que C et E ne sont pas des faces parallèles. Nous pourrons en déduire que les faces du parallélépipède rectangle qui ne sont pas parallèles sont *orthogonales*, si nous voulons introduire des termes spécifiques à la géométrie dans l'espace, avec une définition de l'orthogonalité du genre : « deux plans M et N sont orthogonaux s'il existe deux droites coplanaires et perpendiculaires appartenant chacune à un de ces plans ». On pourra remarquer qu'alors, chacune de ces deux droites est perpendiculaire à l'intersection MN des plans orthogonaux.

Il reste à compter et nommer les sommets - on remarque au passage comment l'acte de compter suppose l'*individuation* des objets comptés, individuation qui passe par leur *nomination*, ce qui autorise leur *énumération* puis leur *dénombrement*. Un sommet est au contact de trois faces, nous pourrions d'abord en imaginer de nombreux : ABC, ABD, ABE, ABF, sur une arête AB - mais les faces A et B, parallèles, ne définissent pas une arête et ne sauraient avoir de point commun : les quatre sommets imaginés n'ont donc pas de réalité. ACB étant éliminé, ACD, ACE, ACF, sont des sommets possibles sur AC, dans les faces A et C. Mais C et D sont parallèles et ne sauraient avoir de point commun, ACD n'existe donc pas et il ne reste plus que deux sommets réels, ACE et ACF, sur l'arête AC. On peut voir qu'ils appartiennent aux deux faces parallèles E et F. ADE et ADF sont, dans ces mêmes faces, les sommets de l'arête AD ; AEF ne peut être un sommet puisque E et F sont deux faces parallèles, sans point commun. Nous avons donc trouvé quatre sommets dans la face A, à l'intersection de celle-ci avec deux faces non parallèles parmi C, D, E, F soit CE, CF, DE, ou DF.

On procède à l'identique avec la face B comme base de travail, et on dénombre quatre nouveaux sommets à l'intersection de B avec deux faces non parallèles parmi C, D, E, F, soit CE, CF, DE, ou DF. Le parallélépipède rectangle a donc huit sommets, et dans chaque face on peut décrire le rectangle composé des quatre sommets que le parallélépipède comporte[10].

### *2.1.3. Décrire, représenter, modéliser*

Notre description de l'objet est maintenant à peu près complète, puisque nous y trouvons : les deux faces parallèles A et B « à plat » - une en haut, une en bas -, les deux faces C et D « de front » - une devant, une derrière -, et les deux faces E et F « de bout » - une à droite, une à gauche ; mais aussi bien les quatre arêtes « à plat, de front » - en haut et devant, en haut et derrière, en bas et devant, en bas et derrière -, les quatre arêtes « à plat, de bout » - en haut et à droite, en haut et à gauche, en bas et à droite, en bas et à gauche -, les quatre arêtes « de front, de bout » - devant et à

---

10 Pour un commentaire historique clair sur ce type d'emploi des lettres en géométrie, on se reportera à Freudenthal H. (1968), Notation mathématique, les lettres. *Encyclopædia Universalis*. Paris.

droite, devant et à gauche, derrière et à droite, derrière et à gauche ; et enfin les sommets, nommés, maintenant que les termes descriptifs remplacent les lettres pour désigner les faces, « en haut, devant, à droite », « en haut, devant, à gauche », « en haut, derrière, à droite », « en haut, derrière, à gauche », « en bas, devant, à droite », « en bas, devant, à gauche », « en bas, derrière, à droite », « en bas, derrière, à gauche », soit en tout huit sommets. On le voit, cette dernière description, d'allure naïve, retrouve exactement la description technique précédente et au delà, la description par les faces.

En géométrie classique, on nomme plutôt les points par des lettres, les arètes par des paires de points, les plans ou faces par des triplets de points ou des couples de droites. C'est que l'on a gardé cette trace d'une conception scholastique de la géométrie, pour laquelle l'espace est engendré par le point. La droite ou le plan sont tout aussi bien des objets premiers de la géométrie, ils ne sont définis que par le système des relations qu'ils entretiennent entre eux et avec le point. Mais nous laissons au lecteur patient le soin de constater que si l'on nomme d'abord les huit sommets - A, B, C, D, E, F, G, H - il est tout à fait difficile de repérer les douze arètes et encore plus délicat de nommer les six faces : seules trois des sept arètes potentielles d'un sommet sont réalisées, et nous ne pouvons décider lesquelles en définissant le parallélisme ou l'orthogonalité, puisque orthogonalité comme parallélisme ne sont pas des propriétés des sommets - les seuls objets connus et nommés, en ce point du travail. C'est que *la description par les sommets ne constitue pas un modèle du parallélépipède rectangle* qui pourrait s'appuyer sur une connaissance culturelle de l'espace. Il n'existe pas, dans notre langue, de mot qui signifie à la fois « devant en haut et à droite » ou « derrière en haut et à gauche », sur lesquels appuyer une telle description. A moins que nous ne partions d'une description calquée sur notre connaissance préalable du modèle précédent, en nommant « plans parallèles » des quadruplets de points du parallélépipède sans éléments communs, et « plans perpendiculaires » des quadruplets de points ayant deux éléments communs : une arète... Mais nous n'obtiendrions jamais qu'une description locale, avec des définitions de parallélisme et d'orthogonalité valables seulement dans cette situation.

Nous sommes ici confrontés à un problème didactique essentiel[11] : est-ce que les travaux géométriques proposés aux élèves supposent l'espace sensible connu, ses propriétés explorées et nommées, ou au contraire est-ce que ces travaux ont pour objet l'étude de l'espace sensible par le moyen de modèles géométriques ?

L'option que nous avons prise montre comment les propriétés de l'espace sensible ne sont, en fait, pas explorées dans l'option empiriste, parce que l'idée que la connaissance viendrait de l'observation suppose en fait que le rapport de celle-ci à celle-là est « toujours déjà-là ». Il serait déjà constitué dans l'expérience préalable et pourrait naître tout armé dès que sollicité par la question « Observe, que remarques-tu ? ». L'option empiriste suppose que la connaissance première contient déjà « en acte » ce qui doit être appris, alors que notre travail montre comment c'est la modélisation qui construit les significations nécessaires à la connaissance ordinaire du parallélépipède rectangle. Cette connaissance peut paraître première parce que c'est un savoir socialement partagé, porté par un vocabulaire adéquat, c'est-à-dire, existant préalablement à l'effort par lequel un sujet de cet espace social

---

11 Berthelot R. & Salin M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse d'Etat. Université Bordeaux I.

peut entrer en rapport avec lui, mais chacun n'en doit pas moins la construire à nouveau, pour soi-même, et l'Ecole de l'enseignement obligatoire se doit de donner à tous l'occasion de cette construction. C'est une connaissance culturelle.

Toutes les descriptions ne se valent donc pas. Certaines ne sont pas fonctionnelles, elles ne permettent pas de travailler sur les formes qu'elles donnent, pour produire du sens, c'est-à-dire des questions sur la réalité.

Nous l'imaginons maintenant, il existe encore une description du parallélépipède qui s'appuie sur la nomination première des douze arètes ! Un sommet est alors la conjonction de trois arètes de directions distinctes, une face la conjonction de deux arètes... ce ne peut être qu'un objet de démonstration : nous ne le montrerons pas.

Nous avons un modèle du parallélépipède rectangle, avons-nous dit, mais ce modèle produit-il un travail des questions techniques que nous posons dans le cadre du programme de la classe ? Contrôle-t-il la production d'un patron, par exemple ? Voici un schéma des liaisons d'une face A avec ses quatre voisines - C, D, E, et F, puisque B est parallèle à A - où une liaison indique par exemple que les faces reliées doivent avoir une arète en commun, c'est à dire que les rectangles reliés ont un de leurs deux types de côté égal. Nous savons immédiatement que les quatre liaisons d'une face vont aller par paires de même type, et une rapide analyse nous fait découvrir qu'il ne peut y avoir que trois longueurs d'arète - une par orientation -, ce qui fournit un critère simple de tri des patrons entre ceux qui peuvent donner un parallélépipède rectangle et ceux qui ne le pourraient pas.

La figure 1 - nous la nommerons un « graphe » - indique les trois types de relations pour les cinq faces A, et C, D, E , F. Il faut la compléter du graphe en miroir des relations de B avec C, D, E, F, donné figure 2.

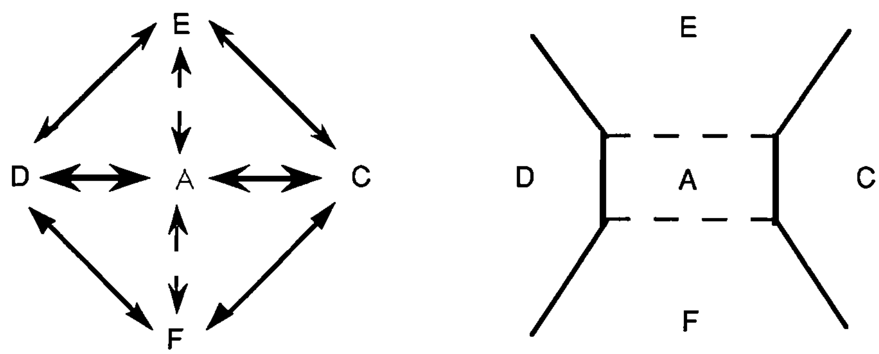



*figure 1*

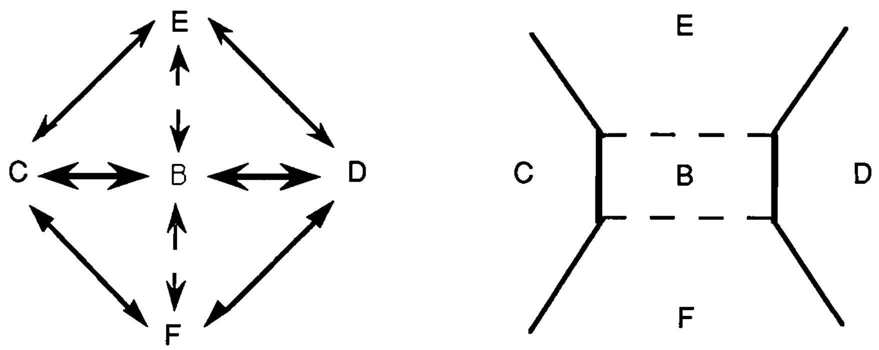



*figure 2*

Il faut encore imaginer une fusion des graphes qui respecte l'identité des rôles de A et B pour avoir une première idée de ce que pourrait être une représentation de parallélépipède rectangle indiquant toutes les relations entre faces par les arêtes de même dimension.

On pourrait bien sûr faire un schéma « à plat », mais nous nous contenterons de ces deux schémas plus classiques, qu'il est possible de lire, éventuellement, comme représentant le volume du parallélépipède :

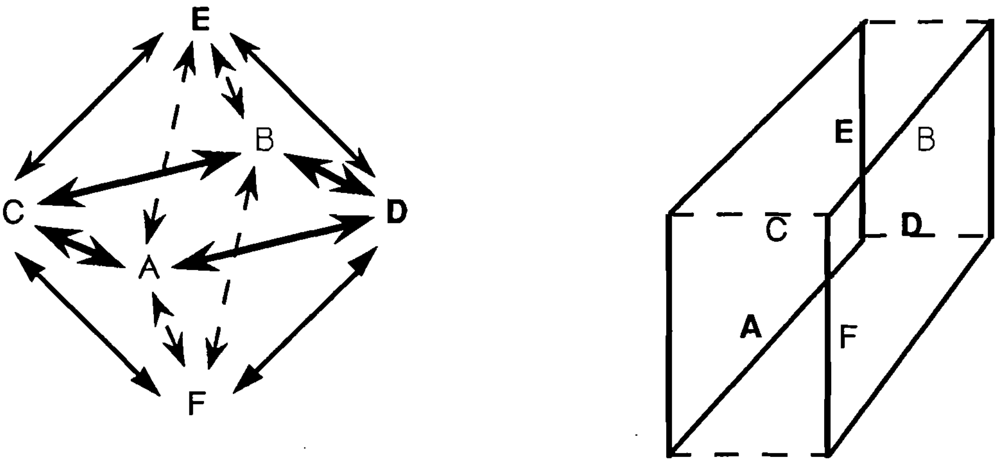
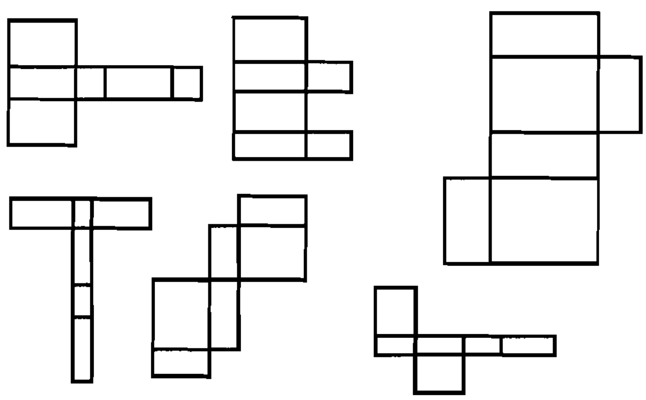



*figure 3*

Une représentation pertinente d'un objet de l'espace est un *modèle de cet objet,* elle décrit en même temps qu'elle les représente des éléments matériels et des relations entre éléments. C'est pour cela qu'elle peut modéliser l'objet si le système de signes utilisé possède suffisamment de souplesse pour se transformer en fonction des questions à traiter.

Pour comprendre comment les représentations proposées sont des modèles du parallélépipède rectangle, voici un exercice qui est le plus souvent laissé à la charge du « bon sens géométrique » des élèves et de leur enseignant[12], mais que la description proposée modélise. L'exercice ci-dessous devient alors de plein droit un exercice mathématique effectif.

Reconnaître parmi les dessins suivants ceux qui représentent un patron de parallélépipède rectangle :



12 Ce n'est pas le cas du manuel cité, à qui nos empruntons ce type d'exercice, et qui donne à découvrir les indices pertinents : par exemple, on y *montre* - bien sûr - que les patrons de parallélépipède sont tracés sur des réseaux de droites orthogonales.

*Décrire* et *représenter* s'opposent souvent par les domaines de pertinence des systèmes de signes que ces actes nécessitent, on les confond dès que l'on cesse de.mettre en question le bien fondé d'un choix de représentation culturellement dominant, mais il est parfois utile de retravailler celui-ci pour en sentir la force et les faiblesses. Alors que les peintres et les sculpteurs se sont depuis maintenant un siècle dégagés de la contrainte venue de la perspective, l'enseignement continue à prendre pour naturelles ces représentations qui ne permettent bien souvent ni le travail dans l'espace sensible, ni le travail technique, ni le travail géométrique proprement dit.

Nous tentons ici de rendre opérationnel le savoir géométrique construit - un savoir sur les objets qui sont dans l'espace. Nous arrivons ainsi à produire des objets pour l'enseignement - ce ne sont pas encore des objets d'enseignement. Au terme du travail de transposition que nous engageons ainsi, nous pourrions enfin définir ce qu'il pourrait en être pour un élève de sixième - la classe où doit figurer le parallélépipède, puisque nous étudions cet exemple.

Plus généralement, nous avons rencontré la question de *la nature des objets de l'espace sensible*. Les difficultés de leur saisie en font des objets sans grande parenté avec les objets plans - sauf à venir dans l'espace des signes de la géométrie en trois dimensions, espace constitué par l'extension de la géométrie plane. Nous devrions alors nous outiller préalablement d'une théorie de la géométrie plane qu'il s'agirait de chercher à « généraliser »... Une modélisation unifiée, globale, des questions de géométrie du plan et de l'espace à trois dimensions que l'on pourrait construire au Collège semble, au stade actuel, à peu près impossible à obtenir simplement.

## 2.2. Reproduire

### *2.2.1. Reproduction raisonnée du triangle quelconque*

La notion de la « reproduction de figures » est inscrite dans les programmes des Collèges dès la Sixième. Il s'agit ici de montrer que *l'idée de reproduction doit permettre de distinguer ce qui est reproduit et ce qui ne l'est pas.*

Par exemple, un triangle donné par un dessin sur une feuille de papier doit être « reproduit », sans autre indication. La question est alors : est-il bien reproduit ? Pour donner une réponse pertinente à cette question il faut savoir quels sont les moyens disponibles pour constater la bonne ou mauvaise qualité d'une reproduction.

Une première réponse peut être la suivante : le triangle est bien reproduit si les deux figures sont superposables et un moyen de le tester est alors d'utiliser le papier calque. Si l'on adopte cette réponse, on ne tiendra pas compte d'autres caractéristiques du triangle comme sa position dans la feuille de papier par exemple.

Un autre test peut être de comparer les longueurs de chacun de ses trois côtés à l'aide du compas et de déclarer que le triangle est bien reproduit si les longueurs des côtés sont les mêmes.

Le fait que les deux tests (calque, et conservation des distances entre points) sont équivalents est une propriété de l'espace (du plan) qui est à construire : elle ne va pas de soi ! Nous ne traiterons pas cette question. Elle nous conduirait tout droit au coeur même des problèmes mathématiques de l'enseignement de la géométrie au Collège aujourd'hui ; mais elle nous conduirait aussi à assumer dès à présent la construction d'une ingénierie didactique pour l'enseignement de la géométrie, ce qui n'est pas ici notre but.

Puisqu'il doit principalement être question, au Collège, en géométrie, des transformations des objets du plan, le problème de la reconnaissance d'un objet « transformé » ou « reproduit » par un procédé donné est un problème central de l'enseignement de la géométrie dans cette institution. La définition de tests efficaces pour la classification des diverses reproductions (ou transformations) des objets du plan est une des clés de la question, une telle classification n'étant pas identique à la classification mathématique, connue, des transformations ponctuelles de l'espace lui-même.

### *2.2.2. Description raisonnée d'une figure de Thalès pour la reproduire*

Nous avons évoqué ci-dessus un des problèmes posés par la reproduction d'une figure plane. Ce type de problème peut être porteur de questions pertinentes sur l'espace et les objets de l'espace (ici, le plan) dans lequel doit se faire la reproduction. Nous allons étudier plus précisément un problème où description et reproduction sont deux temps d'un même questionnement.

L'enjeu est maintenant de *décrire afin de reproduire*, mais l'objet qui doit être décrit et reproduit n'est plus un objet de l'espace, c'est un certain agencement de tels objets, un ensemble de relations entre les éléments d'un objet. Cet ensemble de relations va se trouver transporté, et reconnu, dans un autre objet. Le travail va amener à la formalisation écrite de ces relations, sous forme de *propriétés pertinentes,* reconnues par leurs conditions d'existence : des *axiomes* et des *théorèmes*, qui *s'appliquent* à des *sous-figures*. Nous allons donc rentrer dans une problématique plus voisine de la problématique usuelle en géométrie au collège.

A l'aide de la figure de référence (que nous nommerons $F_0$), il s'agit d'en interroger une autre, $F_1$. La règle du jeu est que toutes les propriétés de $F_0$ données par l'évidence perceptive implicite sont acceptées, mais qu'elles sont aussitôt mises à l'épreuve de devoir servir à décrire $F_1$. Ainsi on pourra dire que $F_0$ est tracée à main levée, ou que les points du triangle n'ont pas de nom, qu'il y a quatre droites, deux droites parallèles, un triangle et un trapèze, qu'une des droites parallèles coupe le triangle au milieu de deux côtés, etc. La figure est une sorte d'auberge espagnole où chacun voit ce qu'il veut, et à la question « Que remarques-tu ? » on ne peut que répondre « Tout ! », c'est à dire toutes les propriétés visuellement perceptibles signalées ci-dessus.

Pourtant, le contrat didactique relatif aux activités géométrique va jouer : toutes les réponses ne sont pas équivalentes.

La figure est un tout qui n'a de sens que global. Cependant, la liste de ses propriétés doit être établie, et le jeu proposé va être un jeu de reconnaissance. La provocation intellectuelle vient en effet de l'existence d'une autre figure. C'est le système constitué par l'ensemble des deux figures qui fait sens.

Nous allons analyser un exemple. Soit F0 et F1 les figures ci-après.

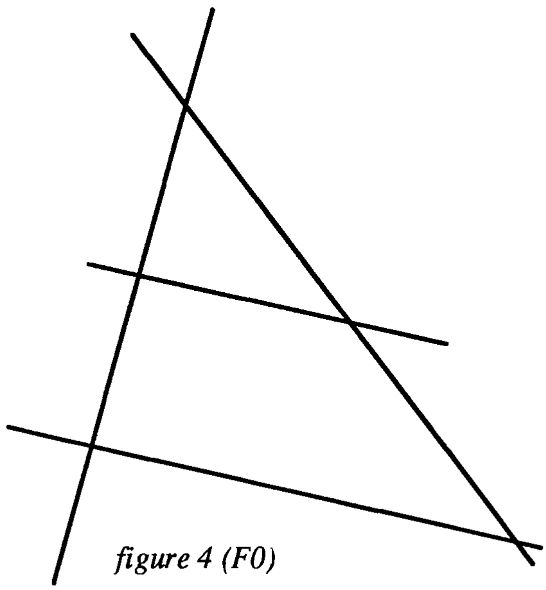


*figure 4 (F0)*

La question posée est la suivante :

**« Reconnaître dans la seconde figure ce qui est comme dans la première ».**

C'est-à-dire - mais c'est implicite - reconnaître la première figure comme *sous-figure* de la seconde : on retrouve $F_0$ dans $F_1$. Mais pour cela il faut décider de ce qui est pertinent pour reconnaître $F_0$ dans une partie de $F_1$. Il faut agir comme dans le problème de la reproduction du triangle. Il faut donc découper dans $F_1$ ce qui peut s'y donner à reconnaître comme « des relations déjà réalisées dans $F_0$ ».

Il faut donc accepter de ne retenir qu'une partie de ce qui peut se dire de la première figure, et n'en garder que ce qui, pour nous, la *caractérisera* dorénavant parce que c'est à cela que nous la reconnaîtrons dans une sur-figure.

Il faut donc renoncer à ce qui faisait la richesse sensible de l'objet matériel particulier, le dessin nommé $F_0$, pour ne regarder que *les propriétés*, qui peuvent se transporter d'un objet à l'autre. Il s'agit alors d'écrire explicitement les propriétés de $F_0$ reconnues dans la sous-figure de $F_1$. $F_0$ est, par exemple, montrée en gras dans la *figure 6*.

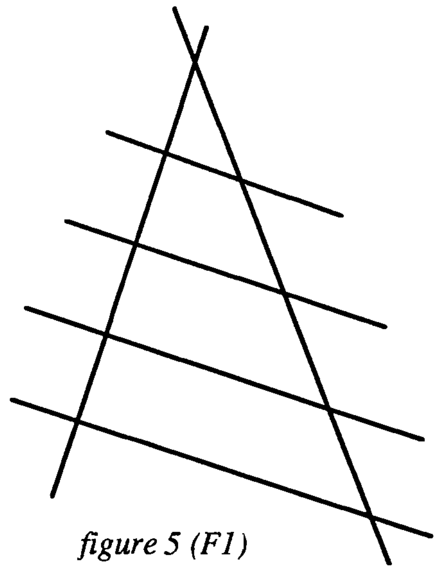


*figure 5 (F1)*

Le travail mathématique proprement dit commence à fonctionner. La logique du système des deux figures s'enclenche : on ne reconnaît $F_0$ qu'en acceptant d'indiquer des propriétés communes à $F_0$ et à la figure étudiée à sa lumière, $F_1$. Ou plutôt des propriétés communes à $F_0$ et à la sous-figure de $F_1$ que l'on identifie, de ce fait, à $F_0$ :

« Il y a deux droites parallèles ; l'une est un côté d'un triangle, l'autre est la droite qui joint les milieux des deux autres côtés ».

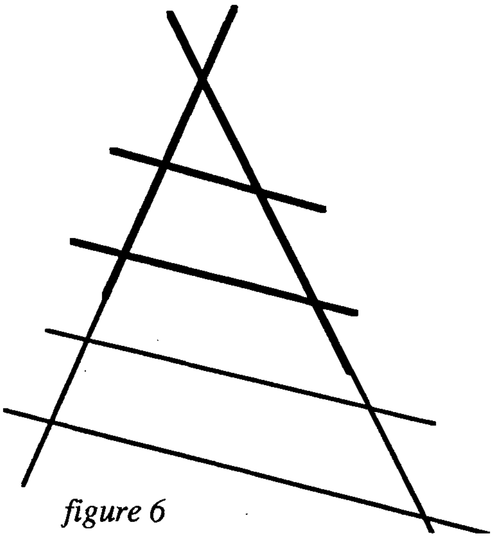


*figure 6*

Dès lors, la figure de référence $F_0$ *montre une propriété* : celle qui fonde le travail de « reconnaissance », et cette propriété fait l'intérêt de la figure qui la schématise.

Mais une deuxième occurrence de $F_0$ est visible dans $F_1$. L'explication de la reconnaissance va maintenant nécessiter un raisonnement - plus que le simple énoncé des propriétés qui s'appliquent - pour *justifier* une deuxième occasion de reconnaître $F_0$ dans $F_1$. Il faut en effet expliquer que certains points sont bien les milieux des côtés du triangle concerné (figure 7). Cela se voit, bien sûr, mais on ne peut plus se retrancher derrière l'évidence perceptive dès que l'on a commencé à expliquer l'évidence.

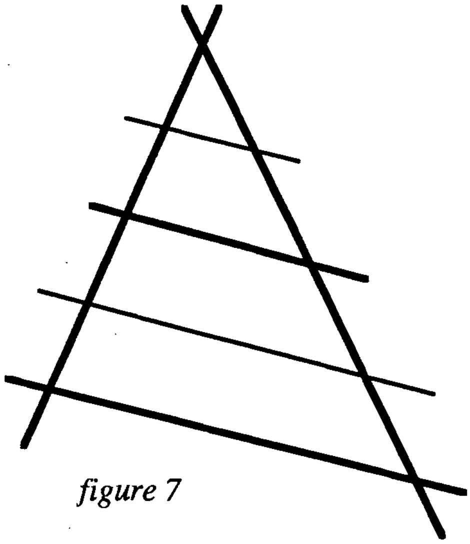


*figure 7*

Sur les côtés du triangle donc, on voit trois points régulièrement espacés, le second est au milieu du segment parce qu'il est à deux unités des extrémités - si l'on prend pour unité l'intervalle de deux points de division.

Voici la figure correspondante (fig.7)

Il est temps de faire, avec solennité, l'entrée dans une problématique mathématique : elle se marque par la constitution d'un axiome, et de deux théorèmes. Nous savons déjà déduire les théorèmes de l'énoncé de l'axiome, puisque nous savons écrire les critères de reconnaissance de $F_0$ dans $F_1$.

Voici l'axiome :

*« Dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté »*

Cette propriété s'énonçait ainsi : « $F_0$ est constituée de trois droites en triangle, et d'une droite qui coupe deux côtés du triangle en leur milieu, *c'est pourquoi elle est parallèle au troisième côté* ». Enoncée comme un axiome, elle devient une propriété mathématique que l'on peut reconnaître comme une propriété inscrite au programme de Quatrième, « le théorème des milieux ». C'est un objet de l'institution scolaire, un objet d'enseignement. Ce sera pourtant, ici, un axiome *local*, parce que nous le considérerons comme vrai sans chercher à le démontrer à partir de la géométrie précédemment connue et parce que nous travaillerons immédiatement à partir de cet axiome les problèmes qu'il nous permet de rencontrer. Il ne conserverait pas nécessairement sa forme d'axiome dans la suite de l'épisode présenté : il est en effet possible de démontrer, en Quatrième, cette propriété, mais notre but n'est pas de montrer comment mener un travail d'axiomatique ; nous préférons au contraire disposer d'axiomes puissants et peu nombreux. Ils donnent des démonstrations étonnantes, ils permettent d'établir des propriétés qui valaient l'effort de démonstration. Le jeu axiomatique ne peut être mené avec quelque intérêt qu'au moment où la maîtrise des techniques de démonstration est assurée et où elle peut permettre de s'essayer avec succès à la recherche du plus petit point de départ possible.

### *2.2.3. Démontrer une description*

Les deux premiers théorèmes de la théorie locale qui commence ici énoncent donc la reconnaissance première :

*« Dans un triangle dont deux côtés sont divisés en quatre segments égaux, la droite joignant deux points de division du second rang est parallèle au troisième côté »* et *« Dans un triangle dont deux côtés sont divisés en quatre segments égaux, la droite joignant les deux points de division du premier rang est parallèle à la droite joignant les deux points du second rang »*.

Pour démontrer le premier théorème en effet, on remarque que, dans le triangle entier, les points du second rang sont disposés selon $F_0$ puisque sur chaque côté le deuxième quart est le milieu entre les extrémités du côté.

Pour démontrer le deuxième théorème, on remarque que dans le triangle déterminé par le sommet commun aux segments divisés et les points du second rang, les points de division du premier rang sont disposés selon $F_0$ puisque le point de premier rang est au milieu entre le sommet et le point de second rang.

Jusqu'ici nous avons évité de nommer les points remarquables des figures étudiées, retardant le moment de le faire parce que ce moment marquera l'entrée en géométrie « classique-scolaire ». Nommer les points remarquables apporte pourtant une économie d'efforts appréciable, et le moment est venu de le faire car sans cette économie, il est pratiquement impossible de mettre au point une formulation satisfaisante des démonstrations que nous avons entrepris de rédiger.

Soit X le sommet de la figure $F_0$, Y et Z sont les deux autres sommets du triangle, I le milieu de [XY] et J le milieu de [XZ]. L'axiome s'énonce :

*« Dans le triangle XYZ, la droite (IJ) qui joint les milieux des côtés [XY] et [XZ] est parallèle à la droite (YZ) ».*

Nous l'appellerons « l'axiome des milieux ». Soit A le sommet de la figure $F_1$, B et C sont les deux autres sommets du triangle. Les points de division de [AB] et [AC] en trois segments égaux sont en partant de A : M, N, P, sur [AB] et Q, R, S, sur [AC]. Le premier théorème s'énonce : *« Dans le triangle ANR, la droite (MQ) est parallèle à (NR) »,* et le second théorème, qui a trait à la même figure générale, s'énonce : *« Dans le triangle ABC, la droite (NR) est parallèle à (BC). »* Les démonstrations sont maintenant aisées à formuler : « Dans $F_1$, considérons ANR, M et Q sont les milieux respectifs de [AN] et [AR], ce qui fait que l'axiome des milieux s'applique, donc (MQ) est parallèle à (NR) » ; « Dans $F_1$, considérons ABC, N et R sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], ce qui fait que l'axiome des milieux s'applique, donc (NR) est parallèle à (BC) ».

Une rhétorique, apte à garantir la reconnaissance de $F_0$ et à démontrer sa présence, se met en place. Une rhétorique propre aux démonstrations, en géométrie, dès lors que l'on dispose de théorèmes et d'axiomes bien identifiés. Elle sera un point d'appui du travail tout au long de l'exploration du problème qui est maintenant ouvert. La nouvelle formulation donne immédiatement un troisième théorème dû à la transitivité de la relation de parallélisme, une propriété indispensable à la progression de la construction théorique ébauchée[13] : *« Dans le triangle ABC, les droites (MQ) et (NR) sont parallèles au troisième côté du triangle, (BC) »,* ce qui se démontre ainsi : « Dans F1, (MQ) est parallèle à (NR) et (NR) est parallèle à (BC), ce qui fait que l'axiome de la transitivité s'applique, donc (MQ) est parallèle à (BC).

Qu'en est-il de la troisième droite, (PS) ? Il est bien sûr « évident » qu'elle est parallèle aux autres, mais elle n'est pas d'évidence prise dans une sous-figure, comme les deux premières *(figure 8).*

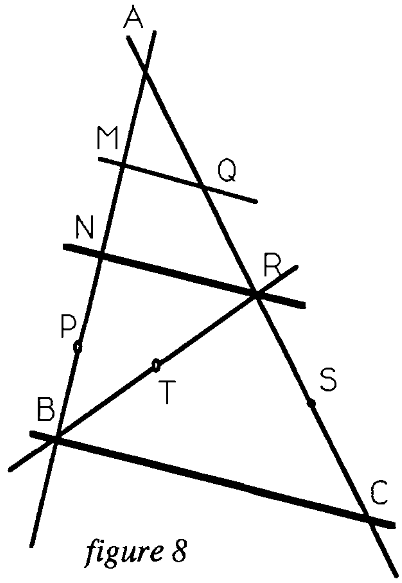


*figure 8*

La difficulté n'est plus de même nature, puisqu'il faut ici tracer une droite nouvelle - une sur-figure - pour pouvoir faire apparaître une sous-figure du type cherché : un triangle. Il faut encore placer un point - T, au milieu du segment [BR] - pour obtenir enfin deux configurations de type $F_0$, où l'axiome des milieux s'applique... BNR et RCB en sont les triangles de base.

Les deux sous-figures correspondantes relèvent de l'axiome, puisque ce sont des triangles où sont marqués les milieux de deux côtés - pour une meilleure compréhension, la droite (PS) n'est pas tracée.

---

13 La transitivité du parallélisme doit donc être prise explicitement ici comme un axiome non encore énoncé : elle constitue le second axiome de notre géométrie locale :

*« Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles. »*

Ainsi, le triangle BNR et les milieux P et T de [BN] et de [BR] font une figure pour laquelle l'axiome s'applique, donc (PT) est parallèle à (NR) ; il en est de même pour le triangle RCB et les milieux T et S de [RB] et [RC], ce qui permet d'affirmer que (TS) est parallèle à (BC).

Nous obtenons deux lemmes, mais pas encore le théorème que nous cherchons : voici les sous-figures correspondantes, le processus d'enculturation qui a commencé doit explicitement comporter la réalisation de ces sous-figures (figures 8' et 8'' ci-dessous), parce que leur pertinence ne va pas de soi et parce que la rhétorique de la démonstration mathématique en géométrie comporte le travail du système sémiotique qu'est la figure, de même que la rhétorique de la démonstration en algèbre comporte le travail du système sémiotique qu'est une expression algébrique.

Dans l'opération, qu'est-il advenu de (PS) ? Nous l'avons « omise » dans la figure 8, et ne la trouvons pas plus dans l'éclatement des sous-figures. Nous rencontrons ici encore un phénomène fréquent en géométrie classique : il faut aller jusqu'au bout des conséquences de ce que l'on sait déjà avant d'espérer résoudre un problème qui résiste. C'est un savoir-vivre géométrique qui ne peut s'apprendre que « sur le tas », à la condition que les autres difficultés aient été tout d'abord surmontées.

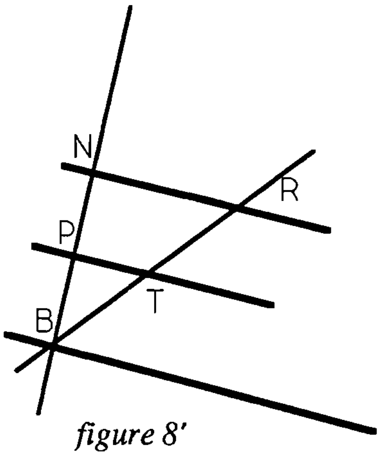



*figure 8'*

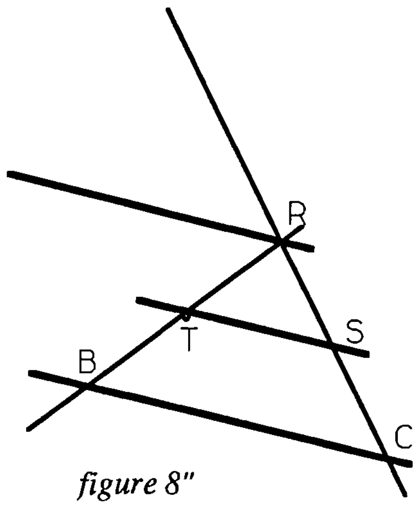



*figure 8''*

Appliquée cette fois à la figure complète obtenue par réunification des sous-figures 8' et 8'', la transitivité du parallélisme donne maintenant ceci, (PT) // (NR) // (BC) // (TS), soit en particulier (PT) parallèle à (TS).

Ainsi, (PT) et (TS) sont deux droites parallèles passant par un même point, T. Pour terminer la démonstration engagée, il faut disposer d'un troisième axiome qui sera ici notre deuxième axiome général.

C'est l'axiome d'Euclide, il sera donné ici sous une forme équivalente, plus traditionnelle en géométrie classique scolaire :

« *Par un point donné, il n'existe qu'une unique parallèle à une droite donnée* ».

Il permettrait de démontrer la transitivité du parallélisme, que nous utilisons comme notre deuxième axiome sans nous interroger autrement sur les propriétés redondantes de notre système de production de théorèmes. Mais la crise des fondements de notre théorie locale est pour plus tard. L'axiome d'Euclide nous permet de conclure : (PT) et (TS) sont deux noms d'une même droite que l'on peut tout aussi bien appeler (PS) puisque :

*« Une droite est bien définie par deux de ses points ».*

C'est le premier axiome d'Euclide, qui est notre quatrième axiome, sans lequel il serait difficile de travailler. Ainsi, (PS) = (PT) = (TS)[14]. La droite (PS), confondue avec (PT) et (TS), est donc parallèle à (BC), comme l'évidence perceptive nous en avait persuadés. Mais l'entrée en géométrie démontrée nous a maintenant fait passer dans un autre monde.

### *2.2.4. Une théorie locale*

En ce point, nous pouvons imaginer ce que serait cette question sans le travail préalable de démonstration du parallélisme de (NR) et (BC). Nous allons pour cela réaliser une *expérience graphique,* qui est le premier produit de notre théorie comme modèle de l'espace sensible : ici, l'espace graphique de la feuille de papier mais bientôt peut être, par extension du domaine d'application, l'espace plan du géomètre-arpenteur.

Supposons NRCB, un quadrilatère qui ne soit pas un trapèze, la diagonale (BR) du quadrilatère en question, T le milieu de [BR], P et S les milieux de [BN] et [CR]. On peut ici *vérifier* que dans ces conditions les droites (PS), (PT), et (TS) ne sont plus parallèles ni confondues et qu'elles forment un triangle graphiquement visible : (PT) est parallèle à (NR), tandis que (TS) est parallèle à (BC), ce qui fait que (PS) n'est plus parallèle à aucune droite de la figure !

De manière à voir correctement le *phénomène géométrique* cherché - expérience est visuelle - il faut une figure de dimensions raisonnables que nous ne pouvons qu'évoquer ci-dessous :

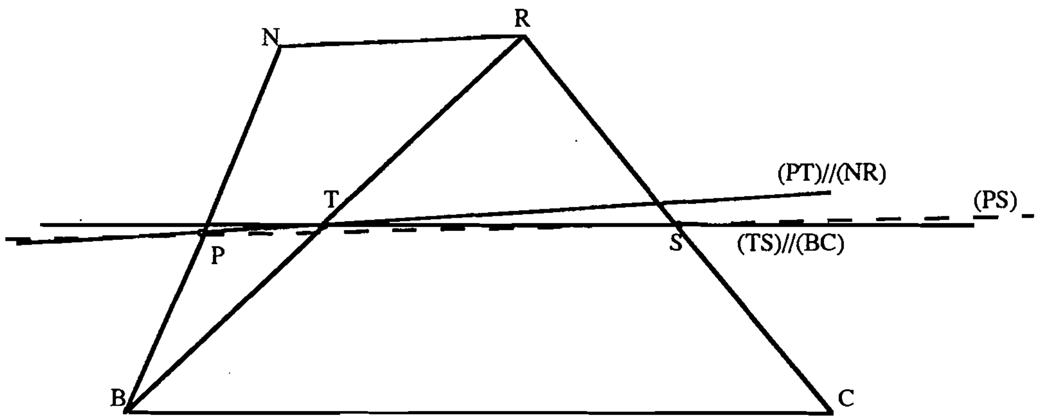



*figure 9*

14 Sur cet emploi du signe « = », on se reportera à Freudenthal H. (1968), Notation mathématique, le sens des formules algébriques *Encyclopædia Universalis.* Paris.

Ainsi, c'est bien le parallélisme préalable de (BC) et (NR) qui fait l'identité des trois droites étudiées et qui produit le théorème, puisqu'en rompant le parallélisme, nous détruisons la propriété étudiée : nous obtenons des droites disjointes. Nous appellerons ce théorème « le théorème des milieux du trapèze », comme le précédent devient le « théorème des milieux ...du triangle ».

Nous en sommes à une compréhension des phénomènes étudiés tout à fait remarquable, puisque nous avons maintenant *une relation de cause à effet* entre le fait qu'une droite passe par les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze et le fait qu'elle soit parallèle aux bases, relation qui reste vraie si la petite base du trapèze est réduite à un point - et le trapèze à un triangle. Enfin, et ce n'est pas le moins intéressant, cette relation *nécessite* le parallélisme des bases caractéristique du trapèze, ce qui montre qu'elle *caractérise le trapèze.*

Le « théorème des milieux du triangle », dont la validité était tout à fait locale, devient maintenant un cas particulier d'un théorème plus vaste pour le trapèze en même temps qu'il devient un théorème particulier d'une autre famille de théorèmes plus vastes portant sur les partages en segments égaux des côtés du triangle : l'ouverture vers le théorème de Thalès est faite, doublement.

***Le théorème de Thalès est le théorème général que l'on pourrait trouver au terme du travail de géométrisation locale dont nous venons de donner le moment initial.***

Mais le domaine qui s'ouvre est suffisamment riche pour que nous ne soyons pas pressés de le clore en nous précipitant à son terme ; voici quelques-uns des objets que nous pouvons y faire vivre immédiatement :

*Dans un trapèze ABCD de bases (AB) et (CD), la droite qui joint les milieux des diagonales est parallèle aux bases. Elle passe par les milieux des côtés non parallèles ".*

On pourrait démontrer le théorème réciproque de l'axiome initial : *Dans un triangle ABC, la droite parallèle à (BC) qui passe par le milieu I de [AB] passe aussi par le milieu J du troisième côté,* [AC] ".

Ou proposer en exercice un théorème qui n'est pas immédiat : *Dans tout triangle ABC, les droites qui joignent les points divisant deux côtés en trois segments égaux sont parallèles au troisième côté ".*

On pourrait encore proposer un nouvel axiome : *Dans un triangle ABC, le segment qui joint les milieux des côtés [AB] et [AC] est égal à la moitié du segment [BC].* etc.

Ces théorèmes s'appuient les uns sur les autres, en une construction que l'on peut voir grandir, jusqu'au point où l'on décide de passer en un autre lieu, pour y recommencer une modélisation locale de l'espace des figures planes et des objets plans en général.

## 2.3. Construire

### *2.3.1. Construction par pliage*

Nous allons cette fois partir d'un autre point, et prendre au pied de la lettre les injonctions du programme : travailler à partir de manipulations concrètes pour obtenir des savoirs géométriques comme savoirs de l'espace matériel sensible.

L'opération traditionnelle de pliage consiste à plier un papier de manière à marquer par le pli la droite qui passe par deux points donnés : c'est le pliage de première espèce. Les objets géométriques que l'on obtient par ce moyen sont les objets constructibles à la règle : les problèmes en sont connus, ils ont été évoqués en leur temps[15]. Mais, ici, l'opération est de peu d'intérêt parce qu'elle est imprécise.

En revanche, prenons le « pliage de deuxième espèce ». Par celui-ci, on trace la bissectrice d'un angle marqué sur une feuille de papier, par superposition (par transparence) des côtés de l'angle et marquage du pli ainsi formé en utilisant cette propriété du papier : il se déforme tout en étant inextensible ; ou la médiatrice d'un couple de points marqués sur une feuille de papier en superposant ces deux points, puis, tout en tenant fermement de deux doigts les points superposés, en marquant le pli qui se forme « naturellement » à égale distance des points superposés. Ce pliage est d'une précision remarquable, et il est d'un maniement aisé car il ne nécessite pas de poser le papier pour marquer le pli. Avec cet outil, nous allons réaliser des expériences géométriques dans l'espace matériel. Une difficulté peu banale fait l'intérêt du pliage de seconde espèce (ou du bissecteur) : deux points, s'ils définissent en principe une droite, ne nous donnent pas le pli correspondant, et les autres points de la droite nous sont a priori inaccessibles : plier une droite passant par deux points (c'est le pli de première espèce) sera par conséquent un problème insoluble de la géométrie que nous mettrons en place[16]. Nous travaillerons quelques problèmes relevant du seul pliage de deuxième espèce.

Imaginer et décrire des expériences que nous pensons possibles, avant de les réaliser, ce sera maintenant « résoudre des problèmes de construction ...au pliage de deuxième espèce ». Première expérience : vérifier que, trois points étant marqués sur une feuille de papier, les médiatrices du triangle qu'ils forment sont concourantes. Il n'est pas possible, si vous respectez la procédure de marquage des plis qui est indiquée, de corriger les plis pour trouver une intersection exacte, mais vous serez pourtant surpris de la réussite parfaite du concours des médiatrices - à moins que vous n'ayez pris un trop petit triangle de base.

### *2.3.2. Un problème de pliage*

Le premier problème proposé est le suivant : « Plier une perpendiculaire à une droite donnée » tracée sur la feuille.

Il suffit de déterminer deux points de la droite pour les rabattre l'un sur l'autre. Peu importe lesquels, leur médiatrice est bien perpendiculaire à la droite qui les contient. La construction est sans difficulté.

---

15 Carrega J-C. (1981), *Théorie des corps, le règle et le compas.* Paris. Hermann. Ou encore, Lebesgue H. (1940-1941), *Leçons sur les constructions géométriques.* (réédition 1987) Paris, Editions Jacques Gabay.

16 Pour un exposé sur les points constructibles par les pliages, on consultera Carrega J-C. op. cit. Le corps de nombres correspondant aux deux espèces de pliage à partir de deux points de base est le plus petit sous-corps pythagoricien de IR. Pour un exposé sur les pliages de papier, on se reporter à Sundara Row T. (1905) *Geometric exercises in paper folding.* New York, Dover publications, (réédition 1966). On y trouve par exemple le pliage de plusieurs polygones réguliers, et les divisions de l'angle droit en 2, 3, 5, 9, 10, 12, 15 et 17.

Le second problème relève du pliage de première espèce : « Plier une perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné », nous le laissons de côté car il est sans solution avec le pliage de deuxième espèce.

Le troisième : « Plier une parallèle à une droite donnée » est facilement réalisable à l'aide de deux perpendiculaires successives. Plier une parallèle passant par un point donné, cela fait problème, celui-ci serait réalisable si nous avions résolu le deuxième problème, qui n'a pas de solution.

Nous étudierons le problème suivant :

***« Plier un carré ».***

En pliant quatre perpendiculaires successives, on obtient aisément un rectangle, mais garantir l'égalité des longueurs est plus délicat : il nous faut une technique de comparaison, et nous n'avons pas de transporteur de distances, pas de compas.

Nous savons donc tracer les diagonales du carré que nous cherchons, et dès que nous avons trois droites perpendiculaires l'opération apparaît bien engagée. Comment plier le quatrième côté ? Si nous avons en effet dès ce moment obtenu les quatre sommets comme intersection des diagonales et d'un côté, le dernier côté n'est pas constructible de manière évidente. Il ne peut s'obtenir que comme bissectrice de l'angle de deux droites concourantes en un des sommets qu'il contient, ou comme médiatrice de deux points symétriques par rapport à lui.

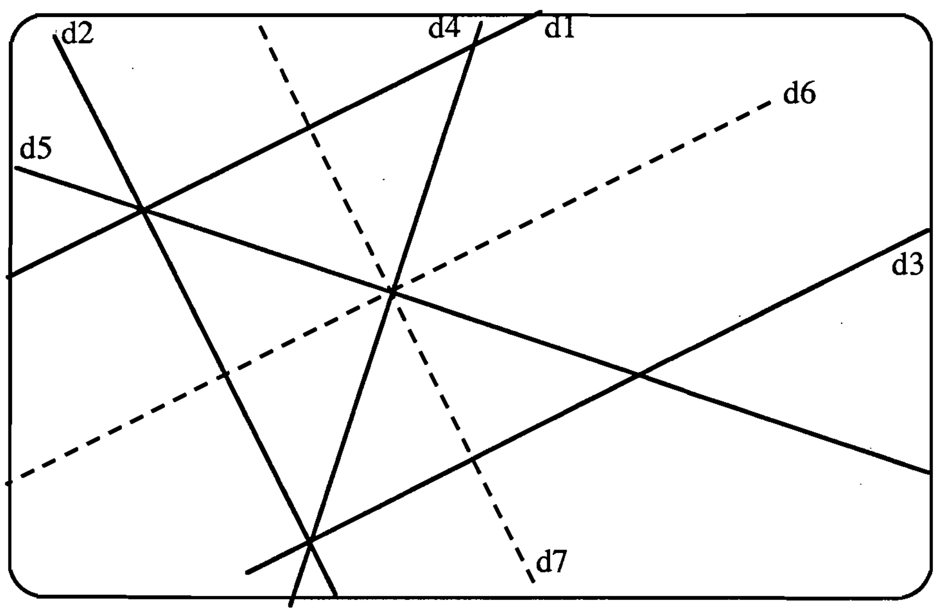



*figure 10*

Une solution s'obtient donc, comme on peut le voir figure 10, en pliant l'une sur l'autre les diagonales - selon les deux possibilités - et nous obtenons un carré, moitié plus petit que celui que nous attendions puisque son troisième sommet est le centre du carré que nous cherchions initialement ! Les bissectrices d'un angle sont perpendiculaires entre elles, cette propriété nous sert ici de clé. Un procédé de fabrication du carré est donc le suivant :

$d_1$ est un pli quelconque, $d_2$ est un pli quelconque de $d_1$ sur lui-même, $d_3$ est un pli quelconque de $d_2$ sur lui-même (nous avons la figure de base) ; $d_4$ est alors un pli de $d_1$ sur $d_2$, et $d_5$ le pli de $d_2$ sur $d_3$ non parallèle à $d_4$ (il est alors perpendiculaire à celui-ci) ; il reste à fabriquer $d_6$, le pli de $d_4$ sur $d_5$ qui n'est pas parallèle à $d_1$ (il lui est donc perpendiculaire) et $d_7$, le pli de $d_5$ sur $d_4$ qui n'est pas parallèle à $d_2$ (il lui est donc perpendiculaire). Le quadrilatère $d_1$ $d_2$ $d_6$ $d_7$ est un rectangle, sa diagonale $d_4$ est un de ses axes de symétrie, ce rectangle est donc un carré.

Une autre solution est possible, pour un carré dont l'aire est double de celui-ci. Sa découverte, et la démonstration correspondante, sont laissées en exercice au lecteur.

### *3.3. Vers une géométrie du pliage*

Nous n'irons pas plus loin : remarquons simplement que la démonstration de constructibilité du carré par pliages (de première ou de seconde espèce) suppose l'utilisation de propriétés du carré que l'on énonce souvent sans en rencontrer jamais l'utilité. Ces propriétés sont très exactement celles dont la visite est obligatoire, dans le programme de sixième. Les voici qui se sont mises à vivre pour nous, au cours d'une activité d'exploration des propriétés de l'espace matériel. Mieux, nous avons dû *démontrer* l'exactitude de notre fabrication, après avoir cherché - éventuellement - sa faisabilité. Nous aurions aussi bien pu *expérimenter* cette exactitude, il nous suffit d'*imaginer une expérience adéquate*, et démontrer d'abord que l'expérience imaginée sera concluante - comme quoi une expérience sans théorie est irréalisable, et comme quoi une démonstration est une expérience *dans le domaine propre de la théorie*.

L'expérience que nous pouvons imaginer est la suivante : si l'objet est un carré, son centre - le point d'intersection des diagonales - est centre de symétrie, et de plus, non seulement les diagonales elles-mêmes mais les bissectrices des diagonales sont axes de symétrie du carré : cela différentie le carré du losange. Il suffit donc de plier $d_6$ sur $d_2$ ou $d_7$ sur $d_1$ et de vérifier que le pli obtenu passe par le centre (l'intersection des diagonales) c'est-à-dire par l'intersection de $d_4$ avec le pli $d_{10}$, la bissectrice de $d_2$ et $d_7$ (qui est perpendiculaire à $d_4$).

Il existe dans la littérature à l'usage des enseignants de mathématiques, et suivant les types de pliage que l'on s'autorise, de nombreuses « constructions par pliage » qui s'autorisent toutes les techniques, et toutes les imprécisions du domaine théorique dont elles relèvent, parce qu'elles ne cherchent pas autre chose que la réalisation d'un objet matériel amusant, parce qu'il est possède une propriété géométrique surprenante. Ainsi, le procédé de fabrication du triangle équilatéral, que depuis bientôt un siècle on trouve cité comme exemple de pliage, suppose que l'on plie de manière à placer un point sur une droite en même temps que l'on s'assure que le pli passe par un second point. Un tel pli, matériellement réalisable, ne conviendrait absolument pas à la géométrie que nous avons commencé d'évoquer, où seuls sont donnés les plis qui correspondent au bissecteur de la théorie : il s'agit ici au contraire de montrer et d'étudier les limites d'un procédé de construction, afin de mieux comprendre ce dont il s'agit qu'en cherchent les constructions « à la règle seule, avec trois points de base », ou « au compas seul, avec deux points de base », etc.

## 3. En conclusion

Nous pourrions envisager maintenant de nous affronter à la question centrale que tout enseignement de la géométrie se doit de prendre en charge, celle de la géométrie comme *lieu d'exercice de la rationalité.* C'est ce que nous ferons dans un dernier volet, à venir. Mais il fallait retrouver pour cela le chemin de l'espace sensible, pour que la géométrie aide à construire cet objet culturel qui voudrait se donner pour universel et naturel, comme s'il faisait partie du milieu de toute action spatiale. Il fallait donc que la géométrie donne des outils de modélisation de l'espace. C'est seulement à ce prix que la géométrie pourra ne plus être, pour les élèves du Collège, l'occasion d'un travail purement matériel ou symétriquement l'occasion d'un travail purement formel. Le rapport de modélisation que nous cherchons à trouver permet en effet que le retour à l'espace sensible serve de moyen de validation des résultats du travail géométrique. Ces résultats deviennent en effet, dans l'espace sensible de l'action matérielle, des réponses vérifiables expérimentalement. Il devient de ce fait possible de penser à une expérimentation effective dans l'espace d'un modèle informatique de l'espace, comme *Le Géomètre*[17] en fournit un exemple attrayant dont l'accès est aisé.

Nous avons maintenant la possibilité d'imaginer, sur la base des éléments de synopsis que nous avons donnés, les scénarios d'enseignements qui tenteraient de répondre aux exigences qui nous sont apparues. Un tel travail, qui ne peut être que collectif, supposerait l'engagement d'une équipe de recherche et développement, sur une longue durée. Les réponses que l'on peut apporter immédiatement ne portent que sur des questions locales, et la présence massive des contraintes quotidiennes risque fort de noyer ces îlots de modélisation dans l'océan aléatoire des constats empiriques.

## Références

BERGER M. (1990), La géométrie de Riemann. Aperçu historique et résultats récents, Images des mathématiques, *Le courrier du CNRS*, supplément au n° 76.

BERTHELOT R. & Salin M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse d'Etat. Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1983), *Etude de questions d'enseignement un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble, IMAG, LSD.

CARREGA J-C. (1981), *Théorie des corps, le règle et le compas.* Paris. Hermann.

CHARLOT B., Bauthier E. & Rochex J.Y. (1993), *Savoir et Ecole dans les banlieues et ailleurs.*

---

17 Produit par l'IMAG sous le nom de CaBrI (Cahier de Brouillon Informatisé), ce logiciel est distribué par Nathan sous ce nom commercial.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition 1991, augmentée d'une postface).

CHEVALLARD Y. (1986), Les programmes et la transposition didactique, illusions, contraintes et possibles, *Bulletin de l'APMEP, 352*, (février).

CHEVALLARD Y. & JULLIEN M. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Première partie, A-La géométrie et son enseignement comme problèmes, B-La notion de construction géométrique comme problème. *Petit x 27.* pp. 41-76.

FREUDENTHAL H. (1968), Notation mathématique, les lettres. *Encyclopædia Universalis.* Paris.

GONSETH J.F. (1945), *La géométrie et le problème de l'espace*, Neuchâtel, Editions du Griffon.

GOYARD-FABRE S. (1968), Preuve (épistémologie), *Encyclopædia Universalis*, Paris.

LABORDE C. (1988), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 9-3.* pp. 337-364.

LEBESGUE H. (1950), *Leçons sur les constructions géométriques.* Gauthier-Villars. (réédition 1987, Paris, Jacques Gabay).

MERCIER A. & Tonnelle J. (1992), Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège, Deuxième partie, C-Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets de l'espace. *Petit x 29.* pp. 15-56.

MERCIER A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* (Etude annexe, La construction didactique de l'élève, comme problème didactique : étude d'un cas en géométrie, au Collège.) Thèse. Université Bordeaux I.

NOIRFALISE R. (1992), *Contribution à l'étude didactique de la démonstration.* Bulletin de l'IREM de Clermont-Ferrand (prépublication).

RUSSO F. (1968), Géométrie, *Encyclopædia Universalis*, Paris.

SUNDARA ROW T. (1905) *Geometric exercises in paper folding.* New York, Dover publications, (réédition 1966).