LE PUZZLE DE LEWIS CARROLL

Modèle local, modèle régional

Gérard NIN
IREM d'Aix-Marseille

I. Modélisation locale

Les analyses qui suivent sont issues d'une étude présentée dans le cadre d'un stage MAFPEN, où l'examen des problèmes posés par le puzzle de Lewis Carroll constituait un exemple parmi d'autres de ce que peut être un travail de modélisation. Le but visé dans cet article est évidemment d'approfondir la notion de modélisation, plus que de prétendre ajouter quelque chose d'essentiel à la connaissance de ce puzzle.

Rappelons brièvement les données du problème. Un carré (fig.1a) est découpé en 4 parties - 2 triangles et 2 trapèzes rectangles - qui peuvent être disposées de façon à obtenir un polygone qui *paraît* être un rectangle (fig.1b). Le paradoxe qu'il s'agit d'étudier est lié aux aires des deux surfaces : comme le lecteur pourra le vérifier aisément, l'aire du carré se trouve être *inférieure d'une unité* à celle du "rectangle" formé par les mêmes parties.

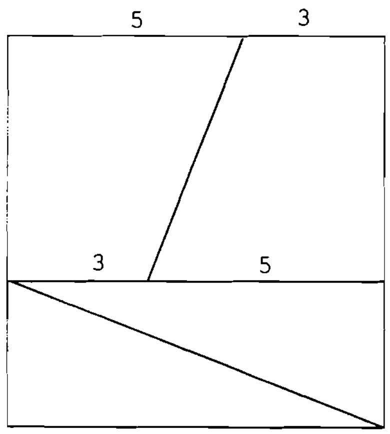

fig.1a

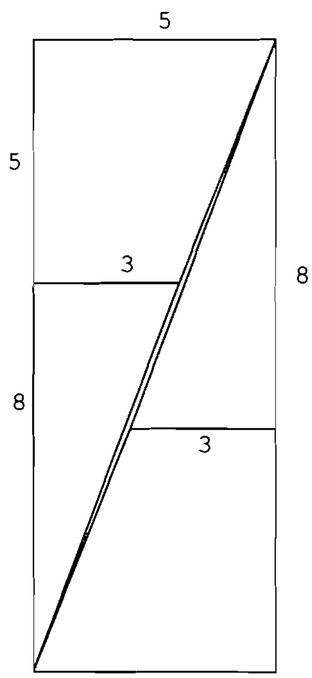

fig.1b

«petit x» n°32, pp.67 à 76, 1992-1993

Le travail proposé aux stagiaires conduisait à distinguer différentes étapes dans l'étude :

1. Mise en évidence du paradoxe à partir du système physique constitué par des morceaux de contre-plaqué ;

2. Elucidation graphique du paradoxe consistant à faire apparaître, dans le rectangle, le parallélogramme caché (et manquant !) ;

3. Détermination de l'expression algébrique de la différence des aires, où x et y désignent les paramètres définissant le découpage du carré (sur la figure 1a, x = 5 et y = 3) : cette différence vaut $f(x,y) = x^2-xy-y^2$;

4.Constat de l'impossibilité de résoudre f(x,y) = 0 dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$;

5. Recherche du minimum de f dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: plus précisément on construit une infinité de couples d'entiers solutions de l'équation f(x,y) = 1, à partir d'une solution "évidente" (les dimensions du système physique présenté) ;

6. Allusion au fait que les couples solutions sont constitués de termes successifs d'une suite de Fibonacci.

En utilisant la terminologie introduite par Y. Chevallard [1], je dirai que l'activité proposée lors du stage constitue le premier temps du travail de modélisation, soit le travail de construction d'un modèle *local,* ou plutôt d'une succession de modèles locaux (graphiques puis algébriques). Mais la notion de modèle *régional* n'y est pas présente. A aucun moment, en effet, les problèmes mathématiques rencontrés ne sont explicitement situés au sein d'une théorie mathématique établie. Il en résulte un certain manque de transparence, et le problème posé, une fois "résolu", conserve une grande partie de son mystère. La modélisation effectuée élucide le paradoxe du puzzle grâce à un certain travail algébrique, mais celui-ci revêt un caractère singulier qui n'éclaire pas de manière satisfaisante le phénomène mathématique sous-jacent.

Avant de passer au second temps de la modélisation, je voudrais analyser sommairement deux occurrences du problème du puzzle de Lewis Carroll dans la littérature mathématique.

Dans l'ouvrage célèbre de Graham, Knuth et Patashnik, *Concrete Mathematics* [2], le problème n'est mentionné que pour servir d'exemple à l'une des nombreuses propriétés des nombres de Fibonacci, l'identité de Cassini :

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Dans notre langage, le puzzle est un modèle physique de l'identité de Cassini et, inversement, l'identité de Cassini modélise algébriquement la propriété paradoxale du puzzle. Comme le notent les auteurs : « Cassini's identity is the basis of a geometrical paradox... » [2, p.279]. Si laconique que soit cette allusion, elle n'en traduit pas moins - suivant les outils théoriques auxquels je me réfère - l'*intention* d'opérer un plongement du modèle local dans un modèle régional - les propriétés des nombres de Fibonacci.

Un article du numéro 17 de la revue *Tangente* [3] présente lui aussi le problème du puzzle. Les auteurs confient à la magie évocatrice des nombres le soin de conduire leurs lecteurs à... l'identité de Cassini. Après trois dessins et trois calculs *arithmétiques,* ils écrivent : « le lecteur averti aura déjà reconnu... la suite de

Fibonacci » [3, p.9]. A partir de là, grâce aux propriétés de cette suite, la modélisation algébrique (locale) conduit à l'équation $y^2-xy-x^2 = 0$, soit, avec des notations déjà utilisées, $f(y,x) = 0$. Les auteurs font apparaître ensuite le nombre d'or comme solution d'une équation associée à "l'épaisseur" du parallélogramme dissimulé dans le rectangle, et ils concluent : « [Nous avons été conduits à découvrir les liens cachés entre un casse-tête anodin, la suite de Fibonacci et le légendaire nombre d'or » [3, p.10].

Ainsi, comme dans les deux cas rencontrés le travail de modélisation présenté dépasse à peine le niveau local. Nous allons maintenant essayer de montrer ce que pourrait être un travail de modélisation régionale.

II. Vers une modélisation régionale

II.1 Les mots pour le dire

Reprenons l'étude au moment où apparaît la fonction f définie par $f(x,y) = x^2-xy-y^2$, où x et y sont entiers. Il s'agit de résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation $f(x,y) = 0$ ou $f(x,y) = 1$, soit ce que l'on nomme classiquement une *équation diophantienne*.

Dans aucun des travaux cités cette remarque n'apparaît. Notre premier travail en vue d'une modélisation régionale consiste donc tout simplement *à nommer de telles équations !* Ce sont des équations polynomiales à variables et coefficients entiers, qui ont fait l'objet de travaux systématiques à partir des années... 250 de notre ère [4]. Plus précisément, nous avons affaire à des équations diophantiennes à 2 variables, du second degré, de type hyperbolique (puisque $f(x,y)=0$, x et y réels, est l'équation d'une hyperbole).

Notons dès maintenant comment le savoir acquis dans ce domaine pourrait intervenir dans notre travail de modélisation. Si l'équation était de type elliptique, résoudre une équation du type $f(x,y) = k$ où x, y et k sont entiers, reviendrait à chercher les points à coordonnées entières d'une ellipse. Ce problème, qui ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions (bornées), peut être résolu par un nombre fini d'essais. Donc, si un "problème de puzzle" conduit à une équation elliptique, il sera trivialement résolu.

Mais nous venons de rencontrer une nouvelle question : pour quel type de fonction f, à coefficients entiers, peut-on espérer résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ (ou 1, ou k entier) ? La situation rencontrée dans la modélisation de notre paradoxe est-elle exceptionnelle ? La présence du nombre d'or et de la suite de Fibonacci tend à le faire penser. Mais en est-il véritablement ainsi ? Le second temps de la modélisation apparaît alors comme le temps de *questions nouvelles* qui ne peuvent guère naître d'une simple modélisation locale.

Nommer les objets qui apparaissent, en respectant la terminologie en usage, est un bon moyen pour "régionaliser" le travail de modélisation. Mais revenons à notre problème. Les équations diophantiennes hyperboliques les mieux connues sont les équations de Pell-Fermat. Leur résolution est intimement liée aux approximations diophantiennes et, par là, à la théorie des fractions continues. Un coup d'oeil, même rapide, sur la littérature consacrée au sujet permet de se convaincre que c'est dans ce domaine mathématique qu'il va falloir enquêter pour arriver à mieux cerner les singularités de notre problème, en identifiant du même coup ses propriétés générales.

II.2 Ce qu'il faut éclaircir

Notre but est de diminuer le *degré d'opacité* qui s'attache au système étudié. Nous considérerons avoir réussi, au moins partiellement, dans cette entreprise si nous sommes capables d'exhiber des systèmes analogues au système de départ et si nous savons résoudre, pour eux, les mêmes problèmes que ceux qui se posent à propos du puzzle de Lewis Carroll. De la même façon, le degré d'opacité lié à la résolution d'une équation du deuxième degré ne diminue pas sensiblement lorsque l'on sait résoudre *une* équation de ce type, mais bien lorsqu'on sait en résoudre de *plusieurs* types et que, grâce à cela, on sait repérer ce que chacune possède de particulier.

Pour fixer des limites à notre travail, nous admettrons ici que l'opacité du système étudié tient principalement à trois problèmes :

1. l'idée à la base du découpage et du remodelage ;
2. le choix des "bonnes" valeurs des paramètres, et son lien avec la résolution de l'équation diophantienne associée ;
3. l'existence de fonctions autres que la différence des aires qui soient optimisées par les valeurs des paramètres choisies.

Nous analyserons successivement ces trois points.

III. Quelques analyses mathématiques

III.1 A propos du découpage-remodelage

Comment interpréter le découpage initial ? Pourquoi 4 morceaux ? Pourquoi ces formes ? Plaçons-nous dans une perspective ludique : il s'agit de cacher un "vide" dans un rectangle. Il est naturel de chercher à le faire en répartissant ce vide suivant la plus grande dimension du rectangle, c'est-à-dire suivant une de ses diagonales. Considérons aussi comme naturel de dissimuler dans un polygone un autre polygone (il aura moins l'allure d'un intrus). Un rectangle ayant un centre de symétrie, le vide aura le même centre de symétrie.

En résumé il nous faut placer dans un rectangle un polygone qui admette les extrémités d'une diagonale pour sommets et le centre du rectangle pour centre de symétrie. Les triangles n'admettant pas de centre de symétrie, il faut penser à un quadrilatère convexe (ce sont les plus simples) à centre de symétrie, c'est-à-dire un parallélogramme. Mais alors le "trou" que l'on cherche à dissimuler devra être aussi un parallélogramme, "étiré" sur une diagonale et symétrique par rapport au milieu de cette diagonale. Ainsi le découpage étudié apparaît comme un découpage assez naturel associé à un trou parallélépipédique. Assez naturel mais pas complètement déterminé. Il est en effet possible de chercher à découper-remodeler un parallélogramme qui ne soit pas un rectangle (ni a fortiori un carré). Mais si l'on procède ainsi, d'une part on perd le phénomène de changement de forme (un carré étant tenu, à un niveau élémentaire, pour un quadrilatère d'un type différent d'un rectangle), et d'autre part, comme on va le montrer, le degré de liberté supplémentaire que l'on introduit ainsi ("l'angle" du parallélogramme) permet de rendre *aussi petite que l'on veut* la différence des aires et, ce faisant, réduit le côté paradoxal de l'opération. Explicitons cela à partir de la figure 2.

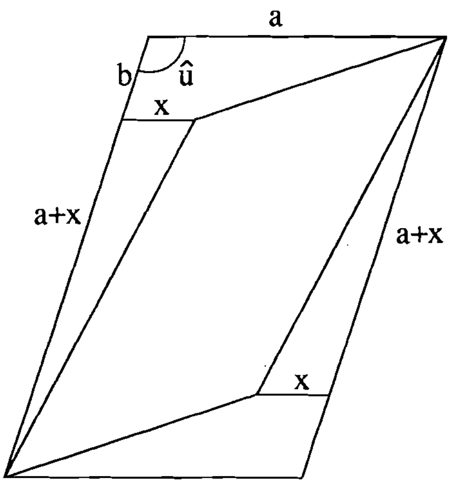

fig.2b

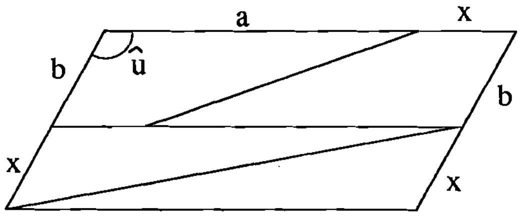

fig.2a

Avec les notations de la figure 3, la différence des aires s'écrit :

$$D = (a^2 - bx - x^2)\sin \hat{u}.$$

Quel que soit le résultat de la minimisation en nombres entiers de l'expression entre parenthèses, il est clair qu'un angle û suffisamment plat permettra de rendre D aussi voisin de 0 que l'on voudra. Ainsi le trou parallélépipédique dissimulé le long d'une très grande diagonale passera inaperçu ! Ce qui est tout à fait ennuyeux pour qui veut faire de son existence une source d'interrogation...

Limitons-nous désormais à un quadrilatère initial qui soit un rectangle, et remarquons que l'opération de découpage-remodelage avec trou parallélépipédique n'impose nullement que les morceaux du découpage, une fois assemblés, reconstituent un carré. Il est facile de voir, à partir de la figure 3, qu'une condition suffisante pour obtenir un rectangle s'écrit : a" = a+x.

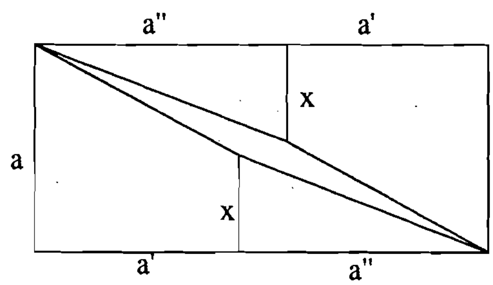

fig3a

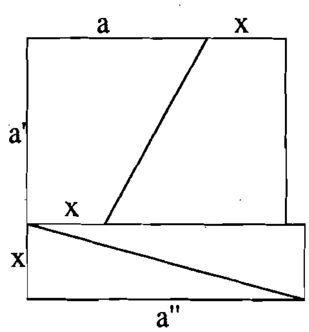

fig.3b

Dans ces conditions les aires des deux rectangles ont pour valeurs respectives : $(a'+x)(a+x)$ et $a(a+a'+x)$, de sorte que la fonction que l'on cherche à minimiser, qui dépend maintenant de trois variables, est égale à : $a^2-a'x-x^2$.

Si l'on veut que le rectangle sans trou soit un carré (parce qu'il est plus "amusant" de transformer un quadrilatère d'un certain type en un quadrilatère d'un autre type), alors $a = a'$ et, aux notations des variables près, on retrouve la fonction f et le modèle algébrique déjà mentionné.

Avant de plonger ce modèle local dans un modèle régional adapté, montrons que le problème du puzzle "généralisé", - dans lequel on transforme un rectangle non carré en un rectangle troué - possède une infinité de solutions.

Imaginons que l'on démarre avec un rectangle sans trou (tel le carré de Lewis Carroll). Ses côtés ont des longueurs entières que l'on note A (qui prend la place de a+x) et A' (au lieu de a'+x). Demandons nous s'il existe un entier x inférieur au min(A,A'), et tel que :

$$AA' = (A-x)(A+A'-x), \text{ soit encore : } x^2-(2A+A')x + A^2 = 0.$$

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que le discriminant de cette équation soit un carré parfait. Or ce discriminant vaut $A'^2+ 4AA'$, et le fait que cette quantité dépende de 2 variables permet de trouver facilement des valeurs de A et de A' convenables.

En effet, si on note D le discriminant de l'équation en x, on a :

$$D = (A'+2A)^2 - 4A^2.$$

Ainsi D est un carré parfait si et seulement si le triplet ($\sqrt{D}$, 2A, A'+2A) est pythagoricien. La détermination de tels triplets est un problème résolu. Il ne reste plus alors qu'à en tirer des solutions pour notre problème, c'est-à-dire des triplets pour lesquels les solutions x sont des entiers compris strictement entre 0 et min(A,A'). Explicitons quelques solutions :

1. le triplet (15,8,17) donne A=4, A'=9 et x=1, ce qui revient à dire que le rectangle (4,9) se transforme exactement en le rectangle (3,12) par l'opération de découpage-remodelage de type Lewis Carroll ;

2. le triplet (21,20,29) donne A=10, A'=9 et x=4 : le rectangle (9,10) se transforme en le rectangle (6,15) ;.

3. les triplets (35,12,37) et (65,72,97) donnent aussi des solutions acceptables.

Je laisse de côté les détails des calculs qui conduisent à ces solutions [4]. C'est là le bénéfice du plongement du modèle local de départ dans le modèle régional que constitue la théorie des équations diophantiennes.

Remarquons au passage que ce qui n'était qu'une condition nécessaire - D carré parfait - paraît être une condition suffisante de découpage-remodelage, puisque chaque triplet pythagoricien donne une solution à notre problème. Le modèle algébrique local peut-il en rendre compte ? Commençons par remarquer que les solutions de l'équation à résoudre s'écrivent :

$$\frac{(2A+A'\pm\sqrt{D})}{2} \quad \text{où } \sqrt{D} = \sqrt{A'^2+ 4\ AA'},$$

Les nombres A et A' étant strictement positifs, on en déduit facilement que $\frac{(2A+A'+\sqrt{D})}{2}$ est supérieur à la fois à A et A' et donc que x est égal à $\frac{(2A+A'-\sqrt{D})}{2}$ mais l'égalité :

$D + (2\ A)^2 = A'^2 + 4AA'$ montre que D et $A'^2 + 4\ AA'$ ont la même parité. Comme il en est évidemment de même de leur racine, on en déduit que $2A + A' - \sqrt{D}$ est un nombre pair, trivialement positif et inférieur à la fois à A et à A'. C'est donc une solution acceptable.

III.2 A propos du problème de minimisation

Repérons soigneusement la singularité du puzzle carré. Comme nous l'avons déjà souligné, si l'on part d'un carré avec a = a' ou, ce qui revient au même, A = A', la différence des aires vaut

$x^2-3Ax + A^2$. Elle ne peut donc s'annuler que s'il existe x entier solution de l'équation associée. Le discriminant D est égal à $5A^2$, où A est un entier, et D ne peut pas être un carré parfait puisque 5 n'en est pas un. Ainsi le mieux que l'on puisse faire est de chercher x entier tel que $x^2-3Ax +A^2 =1$.

En revenant aux notations de départ, l'équation s'écrit :

$$x^2-3(a+x)x + (a+x)^2 = 1 \text{ soit encore } x^2+ax-a^2 = 1 \quad (*)$$

Si l'on admet les puzzles pour lesquels le remodelage du carré recouvre le rectangle au lieu d'y laisser un vide, c'est l'équation

$$x^2+ax-a^2 = -1 \text{ ou encore } a^2-ax-x^2 = 1 \quad (**)$$

qu'il faut résoudre en nombres entiers. Autrement dit il s'agit de minimiser $|f(a,x)| = |a^2-ax-x^2|$, avec a et x dans $\mathbb{N}^*$.

Comme $|\ a^2-ax-x^2\ | = |(a-wx)(a-w'x)|$, où w et w' sont les solutions de l'équation $X^2-X-1=0$, soit le nombre d'or et l'opposé de son inverse, on est conduit à chercher des solutions à notre problème parmi les rationnels $\frac{a}{x}$ qui réalisent de "bonnes approximations" de w (ou de w'), c'est à dire parmi les réduites du développement en fractions continues de w, développement qui est égal à [1,1,1,...], soit encore avec la notation classique :

$$[a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

La réduite d'ordre 0, $r_0 = a_0 = 1$ donne a=1, x=1 et f(a,x) = -1. La réduite d'ordre 1, $r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$, est égale à 2, ce qui donne a=2, x=1 et f(a,x) = 1. Et ainsi de suite. Les réduites de w, dont on attendait seulement qu'elles donnent de "petites" valeurs de f, permettent donc d'obtenir son minimum absolu.

Si l'on utilise les relations de récurrence qui définissent les numérateurs et les dénominateurs des réduites, il devient clair que les valeurs de f sont alternativement égales à 1 et à -1. Précisons cela.

On a : $a_1=2$, $x=1$, $a_2=3$, $x_2=2$.
Comme $a_{n+1} = 1.a_{n1} + a_{n-1}$ et $x_{n+1}= 1.x_n+x_{n-1}$. On en déduit que $x_{n+1} = a_n$.
Mais alors l'équation (**) devient :

$$\begin{aligned} a_nx_{n+1} - a_nx_n - x_nx_n &= a_nx_{n+1} - x_n(a_n + a_{n-1}) \\ &= a_nx_{n+1} - x_na_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Ce dernier résultat est une propriété bien connue des réduites, propriété qui est à l'évidence la "mère" de l'identité de Cassini. Les réduites sont donc bien des solutions à notre problème de minimisation. Mais sont-elles les seules ?

Supposons qu'un rationnel positif, $\frac{a}{x}$, vérifie $|f(a,x)| = 1$. Alors soit $x=1$, soit $x>1$. Si $x=1$, $f(a,x)=1$ ou -1 entraîne que $a=2$ ou 1 et on retrouve les 2 premières réduites. Si $x>1$, on a $a^2-ax-x^2-s=0$ où $s=\pm1$, et $a = \frac{(x+(5x^2+4s)^{1/2})}{2}$.

Comme $x\geq2$, en écrivant $5x^2+4s= 4x^2+x^2+4s$, on en déduit que :

$$a\geq \frac{(x+2x)}{2}, \text{ i.e. } a \geq \frac{3}{2}x.$$

Mais $|f(a,x)| = |a-wx|.|a-w'x| = 1$ où $-w' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,62$.

Donc $|a-w'x| > 2x$, ce qui entraîne :

$$|a-wx| < \frac{1}{2x} \text{ soit } \left|\frac{a}{x}-w\right| < \frac{1}{2x^2}.$$

Ce résultat est caractéristique d'une réduite de w déterminée à un facteur commun près. Mais ici l'égalité $a^2-ax-x^2 = \pm 1$ rend nécessaire l'irréductibilité de $\frac{a}{x}$.

Conclusion : toutes les réduites de w sont des solutions, et ce sont les seules.

Insistons sur un point obscur du problème et de la structure de ses solutions, celui de la présence du nombre d'or. Celle-ci est due au fait que le développement en fraction continue de ce nombre n'est composé que de 1. Si nous avions raisonné à partir de l'équation (*), le nombre w aurait dû être remplacé par la solution positive de l'équation $X^2+X-1 = 0$, c'est à dire que le nombre d'or aurait laissé la place à son inverse $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et cela sans aucun changement sur les solutions de notre problème, car seule la première réduite serait alors à écarter (elle vaut 0).

III.3 Quelles fonctions les réduites minimisent-elles ?

On vient de voir que la variation absolue de l'aire est minimisée par les réduites de w. Qu'en est-il de la variation relative de l'aire lorsqu'on passe du rectangle au carré ? Elle s'écrit :

$$F(a,x) = \frac{a^2-ax-x^2}{(a+x)^2} = \frac{a^2-ax-x^2}{a^2+2ax+x^2}.$$

Comme, d'une part, pour chaque réduite la valeur absolue du numérateur vaut 1 et, d'autre part, il existe des réduites de numérateur et de dénominateur arbitrairement grands, il est clair que le problème de minimisation de F n'a de sens que si on le réduit à des valeurs de a et de x bornées par une constante entière que l'on notera Q dans ce qui suit.

Qualitativement la situation peut se résumer ainsi : si $\frac{a_0}{x_0}$ désigne la réduite qui est la plus proche de w, avec $0<a_0<Q$ et $0<x_0<Q$ (ce qui signifie que la réduite suivante : $\frac{a_0+x_0}{a_0}$ est telle que $a_0+x_0>Q$), le numérateur de F est alors "petit" (égal à 1 en valeur absolue). Mais pour une autre fraction, $\frac{a}{x}$, dans les limites considérées, l'augmentation de la valeur absolue du numérateur de F (il ne sera plus égal à 1 sinon $\frac{a}{x}$ serait une réduite) pourrait être compensée par l'accroissement du dénominateur de façon à donner un quotient inférieur à $F(a_0,x_0)$.

Il n'en est pourtant rien, comme on va le voir. La démonstration s'appuie sur une propriété remarquable des réduites d'un réel dont le développement en fractions continues n'est fait que de 1.

Pour un tel nombre, les approximations faibles, fortes et les réduites sont confondues [5]. Il en résulte que, pour tout Q entier non nul fixé, les fractions $\frac{p}{q}$ qui minimisent $\left|w-\frac{p}{q}\right|$ sont égales à la réduite de numérateur et de dénominateur inférieurs à Q la plus proche de w.

Illustrons sur un exemple le caractère particulier de cette propriété. Si l'on considère le nombre π au lieu du nombre w et si l'on fixe Q=19, la plus proche réduite de π (c'est la seule) vaut 3 et sa meilleure approximation faible vaut $\frac{19}{6}$. Si maintenant l'on fixe Q =311, la meilleure réduite vaut $\frac{22}{7}$ (la suivante "dépasse" Q et vaut $\frac{333}{106}$, tandis que la meilleure approximation faible est égale à $\frac{311}{99}$.

Revenons à la démonstration annoncée. Notons $\frac{a_0}{x_0}$ la meilleure réduite de w qui ne dépasse pas Q et soit $\frac{a}{x}$ une fraction respectant les contraintes données et qui ne soit pas une réduite de w. Nous allons montrer que $F(a_0,x_0) \leq F(a,x)$.

Comme $Q < a_0+x_0$ (sinon la meilleure réduite serait $\frac{a_0+x_0}{a_0}$), on en déduit d'abord que $a<a_0+x_0<2a_0$.

Si $x>2x_0$ alors $\frac{a}{x} < \frac{a_0}{x_0}$. La fonction F, quotient de deux fonctions homogènes de degré 2, est égale à $G(X) = \frac{X^2-X-1}{X^2+2X+1}$, où l'on a posé $X = \frac{a}{x}$. Cette dernière fonction est croissante sur R^+ et $F(a,x)<F(a_0,x_0)$. Comme $\frac{a}{x}$ n'est pas une réduite, elles n'est pas non plus une meilleure approximation de w. Elle ne peut donc pas être plus proche de w que $\frac{a_0}{x_0}$. Mais alors $\frac{a}{x}$ ne peut qu'être inférieur à w, et F(a,x), qui est égal à $G(\frac{a}{x})$

est inférieur à $G(w)$. Il est donc négatif, et sa valeur absolue est alors supérieure à celle de $F(a_0,x_0)$.

Si $x<2x_0$, on a $a^2+2ax+x^2 < 4(a_0^2+2a_0x_0+x_0^2)$. On va voir que la valeur absolue du numérateur de $F(a,x)$ est alors supérieure ou égale à 4. Il en résultera que $|F(a,x)| > |F(a_0,x_0)|$, ce qui achèvera de démontrer que $\frac{a_0}{x_0}$ minimise la valeur absolue de F.

On sait déjà que a^2-ax-x^2 ne vaut ni 1, ni -1 puisque $\frac{a}{x}$ n'est pas une réduite. Etudions l'équation du second degré en a : $a^2-ax-x^2\pm2 = 0$. Les solutions ne peuvent être entières que si le discriminant d est un carré parfait. On trouve $d = 5x^2\pm8$, qui est égal à 2 ou à 3 modulo 5. Or un carré est toujours égal à 0, 1 ou 4 modulo 5. Donc d n'est pas un carré parfait et a^2-ax-x^2 n'est jamais égal à 2 lorsque a et x sont entiers. De la même façon on montre que a^2-ax-x^2 n'est jamais égal à ±3. Il est donc, en valeur absolue, supérieur ou égal à 4, comme nous l'avions annoncé.

Certes, à ce stade de notre travail, nous n'avons répondu que de façon très incomplète à la troisième question posée. Mais - et c'était le but poursuivi - l'ensemble de l'activité de modélisation, locale puis régionale, mise en œuvre nous a permis à la fois de résoudre le paradoxe associé au système physique initial et de réduire l'opacité qui s'attachait à certains des outils mathématiques utilisés, tout en nous permettant de poser et parfois même de résoudre de nouvelles questions.

Bibliographie

[1] CHEVALLARD Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, *petit x*, n°19, pp. 45-75.

[2] GRAHAM R.L., KNUTH D.E., PATASHNIK O. (1989), *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley.

[3] BONNET O., CHAS P., ARZIDINE FAZAL R., JEANNE A., DOCOUTO C. (1990), Panique au pays des merveilles, *tangente*, n° 17, pp. 8-10.

[4] DAVID M., (1985) Diophantiennes (Equations) *Encyclopædia Universalis* Vol, pp. 654.

[5] JABŒUF F., (1990), Fractions continues, *Quadrature*, n°2, pp. 5-9.