DIDACTIQUE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

François PLUVINAGE
IREM de Strasbourg

Note* : le présent texte est repris d'un article publié dans les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (IREM Strasbourg) ; seuls quelques passages y ont été retouchés ou aménagés.

Abstract. From our experience, problem solving in itself is not a goal for mathematics teaching, but components of problem solving constitute valuable objectives in the "Mathematics for All" perspective. We distinguish three stages or phases that the teacher can manage in the classroom : introduction to a problem, search for resolution and presentation of the answer. Each stage, with its own methodology, leads to develop some specific students abilities.

1. La résolution de problèmes : un objectif de l'enseignement général ?

Depuis la parution de l'ouvrage de G. Polya, *How to solve it*, publié en français sous le titre *Comment poser et résoudre un problème*, on ne s'est pas désintéressé de l'heuristique, mais on n'a guère fait paraître de réflexions globales sur la façon d'aborder la résolution de problèmes dans l'enseignement mathématique. Les études engagées ont porté sur des formes particulières de raisonnement, ou bien ont été limitées à des contenus mathématiques nettement précisés. Or il nous semble qu'il vaut la peine aujourd'hui de compléter de telles études par une réflexion didactique plus générale. Les deux questions auxquelles cette réflexion peut tenter d'apporter des réponses sont les suivantes :

Question 1. L'activité de résolution de problèmes suppose-t-elle en soi l'acquisition de certaines compétences, et si oui lesquelles ?

Question 2. Quel rôle les professeurs ont-ils à tenir par rapport à l'activité de résolution de problèmes et qu'ont-ils à apprendre à leurs élèves ?

Le présent article ne se propose que de poser quelques jalons ; les éléments de réponse ainsi ébauchés demanderont des études supplémentaires pour être précisés. Avant d'entrer dans le vif du sujet, c'est à dire ces éléments de réponse, il est peut-être

* Article repris des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 3 (1990) (pp.7 - 34) IREM de Strasbourg

bon d'esquisser brièvement le cadre de travail dans lequel nous prétendons nous situer.

Il s'agit d'une *heuristique non spécialisée*, autrement dit de celle qui s'adresse à un public d'enseignement général. En effet, l'ouvrage de Polya déjà cité nous paraît s'adresser à un public qui se trouve ou se trouvera directement engagé dans une activité mathématique en soi, c'est à dire un public en formation scientifique ou technique. Et les mathématiques ne sont pas enseignées qu'à ce seul public. Dans la scolarité obligatoire, il convient sans doute de s'en tenir à une heuristique non spécialisée, en se demandant quel intérêt elle peut présenter du point de vue de la formation générale et quels apprentissages elle autorise.

La première question qui vient alors à l'esprit concerne *l'utilité générale* d'apprendre à résoudre des problèmes de mathématiques. Le mot "problème" est à entendre ici dans le sens qu'il a pour tout mathématicien et non selon l'acception que l'on trouve notamment dans l'expression anglaise "problem solving", laquelle renvoie à des petites questions dont le schéma, standard, de traitement est appris. Donc nos problèmes sollicitent autre chose que la mise en œuvre de procédures routinières. A part cela, ils peuvent très bien être résolus de manière tout à fait simple et brève ; nous en verrons des exemples. Mais leur caractère nouveau, éventuellement surprenant par rapport à ce que l'on sait faire, est ici une condition à remplir impérativement auprès de ceux à qui ils sont proposés. Ceci précisé, le doute s'impose a priori sur le bien-fondé d'un *apprentissage* de la résolution des problèmes dans l'enseignement des *mathématiques pour tous*. On peut certes voir dans la pratique générale des problèmes un exercice intellectuel sain, un éveil à la curiosité, une occasion d'acquérir de l'autonomie. Cela suffit certes à encourager cette pratique dans la scolarité, mais pas à instituer des apprentissages dans lesquels elle soit un objet, elle représente un enjeu en elle-même.

Arrivé à ce point de la réflexion, on peut aller jusqu'à dire qu'il n'est pas plus d'intérêt général d'apprendre à résoudre des problèmes que, par exemple, d'apprendre à démontrer. Mais comme dans ce cas, l'analyse des tâches modifie radicalement la manière de voir. De même que des *blocs constitutifs* de la démonstration, tel que l'est par exemple la rédaction, apparaissent, eux, comme des objets d'apprentissage d'intérêt évident, de même des blocs constitutifs de la résolution de problèmes vont s'avérer constituer d'excellents objets d'apprentissage, à plusieurs points de vue, mathématiques **et** extra-mathématiques. La question se trouve ainsi déplacée : il ne s'agira pas d'apprendre à résoudre des problèmes, mais de viser des *apprentissages propres à différentes phases de la résolution*, envisagées *séparément* les unes des autres.

2. Agglomérer ou dissocier ?

Pour certaines acquisitions, on considère comme normal de mettre en place des apprentissages séparés. Nous ne parlons même pas de formations complètes, qui résultent presque toujours d'un cumul d'assimilations relevant de disciplines séparées, comme par exemple la mécanique automobile, la comptabilité et le droit pour la formation d'un garagiste, mais d'acquisitions bien précises, accessibles en un temps assez court (disons moins d'une année pour fixer les idées). Par exemple, la formation au permis de conduire est de ce type ; et elle dissocie deux apprentissages : celui du code de la route de celui de la conduite d'un véhicule.

Envisagée dans sa globalité, la formation mathématique (même celle des *mathématiques pour tous*) procède d'apprentissages disjoints. Mais d'un point de vue plus local, la dissociation donne lieu à des discussions. Elle a pu être érigée en principe par les propagateurs de l'enseignement programmé : toutes les difficultés devaient être scindées, les pas d'apprentissage préconisés étaient très petits. Mais à trop regarder où l'on met les pieds, on ne voit pas où l'on va et l'on est après coup incapable de refaire le chemin parcouru. C'est pourquoi les textes officiels actuels (notamment les programmes de mathématiques des Collèges et les documents d'accompagnement) expriment pour leur part au contraire la *crainte d'un morcellement* excessif du savoir. En conséquence, les professeurs se voient conseiller une organisation de leur enseignement qui permette les *connexions* entre les principales rubriques : activités numériques, activités géométriques, traitements de données et fonctions.

En gros les conclusions de travaux didactiques vont dans le sens de telles connexions, en mettant en évidence l'importance primordiale de la *structuration des savoirs*, même si c'est sous la forme négative du constat de l'écart entre les connaissances élémentaires et la capacité à conduire des traitements, en soulignant aussi le rôle du *contrôle*, qui suppose le recours à des registres différents lors du déroulement d'une même procédure. Toutefois, une dissociation des contenus semble pouvoir se justifier dans l'apprentissage lors des phases de mémorisation (mise en mémoire déclarative), mais les conditions méritent une discussion qui n'est pas notre objet ici. L'acquisition de sens bénéficie, elle, largement de l'instauration d'associations convenablement choisies et exploitées, tels les *jeux de cadres* de R. Douady.

En rapport avec ce qui vient d'être énoncé, rappelons une augmentation de réussite spectaculaire sur des "équations à trous" (détermination d'un terme d'une opération connaissant le second terme et le résultat) observée en classe de Sixième, auprès d'élèves qui n'avaient effectué aucun travail préalable particulier à ce type de question, mais qui avaient pratiqué des activités géométriques prévues pour conduire à des calculs : Les écarts avec la population générale, prise comme population témoin, pouvaient, en pourcentage, dépasser 40, comme cela ressort du tableau qui figure dans un article de la revue *Petit x* (cf. [PR87]). Rappelons aussi la manipulation simultanée de périmètres et d'aires, également rapportée dans *Petit x* (cf. [DP85]), construite pour engendrer un apprentissage plus réel que celui qui résulte d'un enseignement séparé des deux notions et qui s'avère incomplet et flou pour beaucoup d'élèves.

Ainsi, les acquisitions conceptuelles peuvent bénéficier d'*associations* convenables *des contenus mathématiques* en jeu. Mais il semble qu'il en va différemment du déroulement des tâches. De nombreux traitements s'effectuent selon des *phases de travail successives*, correspondant à la mise en œuvre de techniques différentes et régies par des critères différents. C'est en particulier ce que nous avons rappelé précédemment à propos de la démonstration et ce que nous avons dit de la résolution de problèmes. Or s'il existe pour chacune des phases successives un nombre de techniques à acquérir en définitive petit, la combinatoire des enchaînements possibles réalise, elle, un univers vite très important de traitements types. Par un exemple pour des traitements passant par 3 phases, dont la première correspondrait à 2 procédures types, la seconde à 15 et la troisième à 4, le nombre total de procédures à assimiler sera de 21, alors que le nombre total de traitements types sera de 120.

L'écart en coût à l'apprentissage s'apprécie aisément. Par ailleurs, dans le déroulement d'un traitement en phases successives, il ne peut pas se produire de contrôle de l'une par une autre ; tout au plus, une contradiction ou un blocage à un endroit vont amener à revenir en arrière, ce qui n'est pas sans intérêt. Mais il est difficile d'imaginer un profit possible pour le déroulement d'une phase dans l'irruption des méthodes d'une autre phase de travail ; l'autonomie de chaque phase, une fois définie la nature des entrées qui lui sont fournies et des sorties auxquelles elle aboutit, est au contraire un élément important.

Les mathématiques prennent en compte cette réalité depuis fort longtemps pour certaines activités, en distinguant par exemple : mise en équation, résolution et report, analyse et synthèse, construction et discussion. Mais si on y regarde de près, ces séparations sont proposées dans les cas où *des ruptures subsistent dans le "produit fini"*. Au contraire, quand le “produit fini”, une démonstration par exemple, se présente comme une construction d'un seul tenant, la tendance est d'omettre par économie d'exposé la description des phases successives de son élaboration. Et d'ailleurs, il est connu que celles-ci ont même tendance à effacer de la mémoire après coup, au profit du seul résultat. L'analyse a posteriori du seul contenu mathématique ne fournira plus aucun indicateur ; c'est une analyse détaillée des tâches qui pourra signaler les changements de phases par lesquels passe l'élaboration.

Dans le cas de la résolution de problèmes, et afin de contribuer à la réflexion globale que nous évoquions en introduction, nous nous proposons une telle analyse des tâches afin de repérer les phases qui méritent d'être dissociées et les apprentissages spécifiques dont ces tâches sont tributaires.

3. Découpage en phases de la résolution de problèmes

Nous allons voir qu'il est possible, devant un problème résolu, d'*"interroger la solution"* pour procéder au repérage voulu. Deux exemples sont présentés à cette fin.

3.1 Premier exemple

Le premier problème est un bon sujet d'activité mathématique en formation des maîtres. Pour ma part, je l'avais entendu énoncé au cours d'une conférence de W. Fowler, l'historien des mathématiques. La solution indiquée est celle que des élèves instituteurs ont effectivement eux-mêmes imaginée, sans aucune suggestion extérieure. Je n'avais plus eu qu'à la mettre en forme avec eux.

Quelle période a le nombre

$$(1,\overline{001})^2 = (1,001\,001\,001\,\ldots)^2$$

en écriture décimale ?

Note : Il est souvent commode de présenter l'écriture décimale d'une fraction, qui est une écriture où un groupe de chiffres se répète périodiquement, en plaçant une barre au-dessus de la période, c'est-à-dire du groupe de chiffres répétitifs.

Solution

La longueur de la période n'est pas 6 ou 9, comme beaucoup sont tentés de le proposer si on demande une réponse spontanée, non réfléchie, mais 2997.

On peut obtenir cette réponse, qui risque de paraître a priori inaccessible, en se représentant la multiplication de 1,001 001 001 ... par lui-même, posée conformément à la disposition usuelle d'un produit effectué par écrit.

$$
\begin{array}{r}
1{,}001\ 001\ 001\ \ldots \\
\times\ \ 1{,}001\ 001\ 001\ \ldots \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001 \\
1\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001 \\
1\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001 \\
1\ \ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001\ 001 \\
\hline
1,\ 002\ 003\ 004\ \ ?\ \ \ ?\ \ \ ?\ \ \ ?\ \ \ ?
\end{array}
$$

L'opération posée a un défaut, du fait de l'illimitation des écritures en jeu : elle ne peut pas être commencée. Heureusement, cela n'empêche pas de la terminer, comme indiquée ci-dessus ! D'une ligne à la suivante, un décalage de trois places provient de la succession de deux 0 dans le multiplicateur. La virgule est facile à placer : le nombre de départ étant compris entre 1 et 2, son carré est compris entre 1 et 4 ; donc il s'écrit avec une partie entière constituée d'un chiffre (à savoir 1).

Reste à gérer la question de la hauteur de la pile, qui s'élève lorsque l'on prend en compte les chiffres successifs vers la droite de l'écriture du résultat.

Tant que l'on n'atteint pas une retenue de 1000, il n'y a aucune difficulté : la pile s'élève régulièrement et l'on obtiendra 005 après 004, puis 006 après 005, et ainsi de suite en regardant par groupes de trois chiffres. Mais une pile de hauteur 1000 déclenche une retenue, comme indiqué ci-dessous.

$$
\begin{array}{rr}
 & 1\ \ldots \\
 & 1\ 001\ \ldots \\
\uparrow & 1\ 001\ 001\ \ \ \ \\
| & .\ \ .\ \ .\ \ \ \ \ \\
998\ | & .\ \ .\ \ .\ \ \ \ \ \\
| & .\ \ .\ \ .\ \ \ \ \ \\
\downarrow & \ldots\ 001\ 001\ 001\ \ldots \\
\hline
 & \ldots\ 999\ 000\ 001\ \ldots
\end{array}
$$

Cette retenue fait passer à 1000 le total de la pile précédente, ce qui déclenche une nouvelle retenue, pour la pile de hauteur 998. Son total passe alors à 999 et, cette fois-ci, il n'y a plus propagation de retenue.

Nous passons sur une vérification de bonne forme, pour s'assurer que des retenues plus lointaines ne pourraient pas se propager jusqu'à la zone initiale de l'écriture, et donnons le résultat final, où le groupe 998 est "sauté" :

$$(1,001\,001\,001\ldots)^2 = 1,002\,003\,004\ldots\underbrace{997\,999\,000\,001\,002\,003}_{\text{période}}\ldots$$

On voit ainsi apparaître 999 groupes de trois chiffres dans la période, d'où sa longueur 2997.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner précisément en quoi cet exercice offre un intérêt pour une session de formation des maîtres.

Analyse

Le fait de devoir passer outre, lorsque l'on se trouve face à une opération écrite dont le début est inaccessible, est certes une difficulté réelle. Mais il s'agit d'un type d'événement qui, bien qu'il se rencontre dans un certain nombre de problèmes, n'est pas inhérent à l'activité de résolution des problèmes.

Plus intéressant est le *choix* effectué, en ce qu'il implique que *d'autres choix* possibles n'ont *pas été retenus*. Par exemple, une connaissance de la périodicité dans l'écriture décimale des fractions conduit à écrire :

$$1,\overline{001} = \frac{1000}{999}\text{, d'où } \left(1,\overline{001}\right)^2 = \frac{1\,000\,000}{999 \times 999}.$$

On peut effectuer : 999 x 999 = 998 001, mais on ne voit guère alors comment progresser vers une réponse.

Un autre élément intéressant est le *champ d'application* du traitement effectué pour aboutir à la solution présentée. Par exemple, il est clair qu'un décalage autre que celui provoqué par deux 0 successifs ne modifiera pas la procédure de réponse : On peut traiter de la même façon $(1,000100010001\ldots)^2$, qui a une période plus longue, ou $(1,010101\ldots)^2$, qui a une période plus courte, ou même $(1,1111\ldots)^2$. Or ces deux derniers cas permettent des essais à la calculette, et l'on peut ainsi observer que

$$(1,1111111)^2 \boxed{=} 1,2345679.$$

On imagine que ce résultat mette sur la piste.

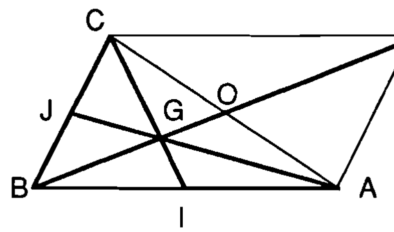
En dehors de ce qui est mis apparemment en jeu dans une solution, ce sont les deux éléments cités : *choix non retenus* et *champ d'application des procédures employées*, qui peuvent très généralement mettre en évidence des phases qu'une présentation "lisse" de la réponse ne permettrait pas d'entrevoir. Dans notre premier exemple, une recherche réussie risque fort d'être passée par un essai sur $(1,1111\ldots)^2$ ou $(1,010101\ldots)^2$, que l'on ne voit nullement dans la solution achevée (pour la petite histoire, ce fut effectivement le cas avec nos élèves-instituteurs).

3.2 Deuxième exemple

Le deuxième exemple est un problème de géométrie qui a été proposé à des élèves de collège (âge : 14 à 15 ans), lors de recherches sur la démonstration conduites à l'I.R.E.M. de Strasbourg. Voici son énoncé (sans indication pour la réponse).

Enoncé

Sur un parallélogramme ABCD, on considère les milieux I et J des côtés adjacents BA et BC respectivement. Démontrer que les droites IC et JA se coupent sur une diagonale du parallélogramme.



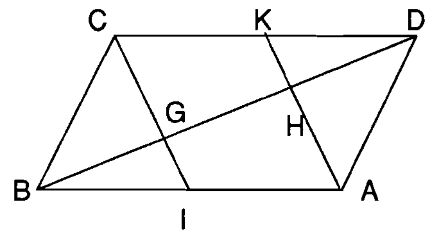
Solution

Les droites CI et AJ sont les médianes du triangle ABC. Elles se coupent donc au point G tel que la droite B est la troisième médiane du triangle.

Ainsi, la droite BG passe par le milieu O du segment AC. Mais on sait que les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc les points B,O et D sont alignés. La droite BG qui passe par O passe alors par D.

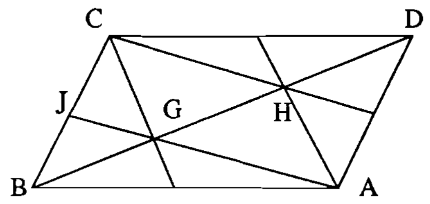
Analyse

Dans cette solution, un *choix* qui n'a *pas été retenu* est d'essayer de déterminer la position du point G sur la diagonale BD. Or si, dans le problème précédent, un choix non retenu menait plus ou moins à une impasse, ce choix non retenu conduit ici à une seconde solution très simple. Le point G est situé au tiers de la diagonale BD depuis B, ce qui apparaît si l'on trace la droite AK où K est le milieu du côté CD.



Le quadrilatère AICK est un parallélogramme, donc les droites IC et AK sont parallèles. Soit H le point d'intersection des droites AK et BD. Du théorème dit "réciproque du théorème des milieux (de deux côtés dans un triangle)", il résulte que G est le milieu du segment BH : il suffit de considérer le triangle ABH. De même, le point H est le milieu du segment GD (considérer le triangle CDG).

Finalement, la droite CI coupe la diagonale BD en le point G situé au tiers depuis B, et il en sera de même pour la droite AJ, d'où le résultat voulu.



Le *champ d'application* de la solution qui avait été proposée met, lui aussi, en évidence le point H précédemment introduit. En effet, les triangles ABC et CDA jouent des rôles symétriques dans le parallélogramme (on peut décider de noter B le sommet qui était noté D et vice-versa ; on parle de symétrie de notation). Le partage de la diagonale BD par les points G et H est alors une conséquence de la considération de la solution simultanément pour les deux triangles auxquels elle s'applique.

3.3 Conclusion

En se plaçant du point de vue de la personne confrontée à un énoncé, G. Polya distingue quatre phases :

1 - comprendre
2 - dresser un plan
3 - mettre le plan à exécution
4 - revenir en arrière.

Des analyses précédentes, entreprises du point de vue d'un professeur qui est en présence d'une solution (qu'il a lui-même trouvée, ou qu'il a lue, ou qu'il connaissait d'avance), seules trois phases *pour l'enseignement* se dégagent :

Phase 1 : entrée dans le problème
Phase 2 : recherche d'une solution
Phase 3 : rédaction d'une réponse

La phase 1 correspond à la prise en compte des données de l'énoncé pour aboutir à des *choix de traitements*. La phase 2 est celle de la mise en œuvre de traitements avec recours aux *résultats à utiliser*. La phase 3, de *rédaction*, a été notamment l'objet d'études spécifiques à propos de démonstrations (cf. [DE89]).

Nous prétendons que c'est ce découpage qui détermine des unités d'apprentissage autonomes, c'est à dire non tributaires des contenus mathématiques en jeu. Notons que c'est un découpage très analogue qui apparaît pour la communication, avec la *réception*, le *traitement* et l'*émission*, et qui est notamment pris en compte dans le document de présentation de l'*Evaluation à l'entrée en sixième* à l'attention des professeurs ([MEN89], p. 6), dans la page où est présenté un tableau de compétences.

Il s'agira pour nous d'établir :
- qu'il y a réellement des acquisitions propres à chaque phase,
- que l'enseignement est concerné par ces acquisitions (il y a des résultats à

attendre d'apprentissages),

- qu'il existe des tâches plus particulièrement adaptées à chacune des phases ; notamment, certains parmi les énoncés mathématiques vont être plus propices à la phase 1, d'autres à la phase 2 et d'autres enfin à la phase 3.

4. Caractéristiques propres à chaque phase de la résolution des problèmes

4.1 L'entrée dans le problème

Il est usuel pour les didacticiens de se préoccuper de la dévolution d'un problème aux élèves, puis de sa résolution. Cela correspond à un certain ensemble d'actions d'enseignement, ayant pour objectif dans un premier temps le passage du problème de l'état "problème du professeur" à celui de "problème d'élèves" (ou du moins du plus grand nombre possible dans un auditoire donné). Bien sûr, on trouve là notamment la compréhension au sens de G. Polya, mais aussi des amorces de plans.

Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que notre propos ici est autre. La dévolution d'un problème est pour les élèves concernés un moment qu'ils n'ont pas, eux, à isoler : ils sont alors aux prises avec des contenus mathématiques qui constituent les clefs de la situation. Mais nous nous intéressons ici à des techniques générales susceptibles d'être *apprises*, pour être mise en œuvre dans des situations mathématiques de toutes sortes, à la condition bien sûr que l'on ait en outre accès à leur contenu mathématique.

Une conduite qui est la marque d'une autonomie personnelle est de prendre un peu de recul, d'examiner un problème qui se présente *sans* nécessairement chercher à le résoudre sur le champ. Les techniques générales de nature à favoriser cette conduite, tout en la rendant efficace, sont à notre connaissance :

- *l'organisation des données* de l'énoncé,
- le traitement de *cas particuliers* ou de *situations simplifiées*.

L'antique conseil de faire une figure pour un problème de géométrie (conseil qui est toujours d'actualité) revient à une forme particulière d'organisation des données d'un énoncé. Nous verrons des exemples d'organisation des données autres que cette seule exécution de figure.

Ce qui peut être *appris* par des élèves, non pas à la suite d'un cours isolé sur la méthodologie, mais grâce à une pratique régulière mise en place tout au long d'un enseignement, c'est à se détacher momentanément de l'idée de répondre pour examiner simplement si les données de l'énoncé ont toutes trouvé place et s'il ne s'est pas surajouté l'une ou l'autre "donnée" absente de l'énoncé. A ce stade, le souhait de répondre peut créer des blocages.

Dans la phase d'entrée, le critère n'est pas de répondre mais de bien traduire la situation présentée. Il est donc possible pour le professeur de solliciter et de corriger des productions issues de cette phase.

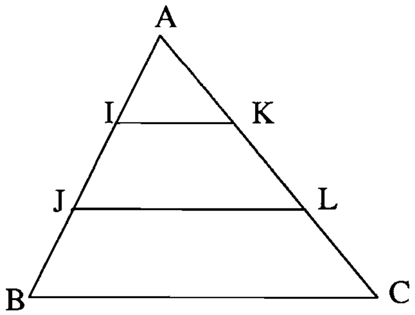
4.2 La recherche d'une solution

L'heuristique s'intéressant plus particulièrement à cette phase, même si on ne la dissocie souvent pas de l'entrée dans le problème faute d'avoir identifié cette première phase, notre propos ici n'aura pas besoin de longs développements, que l'on peut trouver par ailleurs. Mais rappelons que nous souhaitons ne pas présenter une heuristique spécialisée ; aussi nous nous limiterons ici aux deux techniques qui ont un intérêt pour *tout* contenu mathématique :

- l'identification, *la reconnaissance de situations de référence*,
- *l'enrichissement* des informations présentes.

En géométrie, la reconnaissance est celle en particulier d'un certain nombre de figures types, comme, à un niveau très élémentaire, celles d'un triangle avec ses médianes, ou avec ses hauteurs, ou ... L'enrichissement consiste souvent à compléter une figure, pour obtenir une sous-figure qui soit une figure type.

Par exemple, nous avons proposé dans le groupe "Collège"[1] une activité intitulée "du théorème des milieux au théorème des tiers". A partir d'un triangle ABC dont les côtés AB et AC sont partagés en trois segments de même longueur, il s'agit d'établir des parallélismes (IJ et KL avec BC sur la figure).



L'expérience montre que la reconnaissance de la situation d'un triangle avec deux milieux de côtés (AJL avec I et K sur la figure) est très généralement atteinte dans ce cas. Mais la clef, consistant à compléter la figure par un segment joignant B à K ou C à I, n'est découverte que par très peu d'élèves dans de "bonnes classes".

Il n'y a rien que de très normal à cela, de la part d'élèves âgés d'environ 14 ans, mais ce n'est certainement pas une raison de ne pas consacrer du temps à cette phase heuristique, au contraire.

Mais il n'y a pas qu'en géométrie où les mêmes techniques ont un intérêt. Par exemple, reconnaître dans un produit la forme (A + B) (A – B) pour l'écrire $A^2 - B^2$ permettra de résoudre des problèmes d'extremums : ainsi, si A est une constante et B une fonction d'une variable x, c'est lorsque B sera nul que l'expression $A^2 - B^2$ atteindra son maximum. Il n'est pas nécessaire de multiplier de tels exemples, tant ceux-ci abondent dans l'expérience de chacun.

---

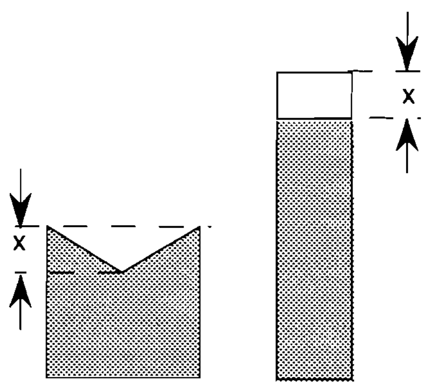
[1] *Constitution du groupe : C. Hindelang, M. Keyling, C. Mathern, D. Maurette, M. Ortlieb, J.C. Rauscher et l'auteur de ces lignes.*

Après plusieurs expériences, nous avons toutefois limité les techniques à promouvoir pour cette phase heuristique, dans l'enseignement général, aux deux techniques indiquées. On trouve d'autres techniques, notamment chez G. Polya, mais celles-ci apparaissent déjà comme spécialisées. Par exemple, l'identification du caractère, euclidien ou affine, d'une situation de géométrie élémentaire nous a paru exiger une maturité mathématique relevant d'une expérience déjà riche. De même, il s'avère que la géométrie par les transformations suppose un préalable important d'utilisation de ces transformations ; par conséquent, compléter une figure, en lui appliquant une transformation qui apparaît au départ sur une partie de la figure, est à placer dans l'heuristique générale, alors que décomposer une transformation en un produit de deux transformations bien choisies relève d'une heuristique déjà spécialisée.

4.3 La rédaction d'une réponse

La rédaction d'une réponse à un problème n'est pas stéréotypée (sinon, c'est que le "problème" n'était qu'un exercice standard). Elle s'appuie sur le travail antérieur, essentiellement en procédant à des vérifications et à une organisation. Pour ce qui est de la vérification, le "dénivelé" cognitif auquel elle est généralement associée (c'est-à-dire le fait qu'elle se situe à un niveau nettement plus simple que la découverte du résultat) a pour conséquence l'absence de difficulté de présentation ; la seule condition à énoncer est de ne pas omettre de procéder à une vérification lorsqu'il en faut une.
Les problèmes conduisant à une équation du second degré ayant deux racines, dont seule l'une convient, sont souvent de ce type.

Voici au contraire un exemple, proposé à des élèves de Troisième, qui ne conduit pas à des difficultés de rédaction. Il s'agit d'un carré de côté noté 2a, duquel on retire un triangle isocèle de hauteur x, et d'un rectangle a x 4a, duquel on retire un morceau rectangulaire a x x.



Une première question est d'établir l'égalité des deux aires obtenues, indépendamment de la valeur de x, et une seconde de trouver x tel que les deux figures aient aussi même périmètre. Une solution s'appuie sur le théorème de Pythagore pour obtenir la seule longueur inconnue du "carré tronqué", puis sur un travail dans le registre algébrique. La vérification se réduira à reconnaître que le triangle 5 - 12 - 13 est rectangle.

Dans un tel exemple, la solution revient à une (bonne) exploitation des données et le théorème utilisé ("le" théorème de Pythagore) apparaît comme un *outil* au service de cette exploitation. Sans risque d'erreur, on peut avancer que les théorèmes qui, tels celui de Pythagore, “crachent” une valeur inconnue à partir de données convenables, sont à tous les niveaux :

1° d'application facile,

2° d'une grande popularité auprès des élèves ou étudiants.

A titre d'exemples, citons le fait que les extremums atteints par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sont les zéros de sa dérivée, celui que les valeurs propres d'une matrice sont les zéros de son polynome caractéristique, le théorème de Huygens sur les moments d'inertie ; on peut ainsi voir que de tels théorèmes “cracheurs de résultats” se rencontrent dans tous les domaines des mathématiques de l'algèbre à la mécanique, en passant par l'arithmétique, l'analyse, etc...

Au contraire, une rédaction qui exige une organisation n'est pas une tâche a priori évidente. Elle correspond à une véritable phase du travail, dont les caractéristiques ont été présentées, pour le cas de la présentation d'une démonstration, dans un article de R. Duval et M.A. Egret (cf. [DE89]). Interviennent en particulier dans la rédaction :

- la distinction entre le *contenu* et le rôle ou *statut opératoire* d'un énoncé,
- la démarche par *substitution* d'énoncés, grâce à des règles de substitution.

Antérieurement, nous n'avions parlé que de distinguer *contenu* et *statut* des énoncés, mais après discussion nous préférons tenir compte du point de vue de J.B. Grize (cf. [GR82]). En effet, pour des spécialistes de l'argumentation, le statut (sans que l'on précise “opératoire”) d'un énoncé est propre à un individu placé dans des circonstances précises ; par exemple, un énoncé peut être une évidence, une conjecture plus ou moins plausible, une absurdité, ... Mais une absurdité pour l'un peut très bien être une évidence pour son voisin et une conjecture pour un troisième. Et une même personne peut également attribuer d'un jour à l'autre des statuts très différents à un même énoncé, selon l'évolution des informations qu'elle possède. Un exemple bien connu dans l'enseignement est celui d'une inégalité comme $2 - 3 > 2 - 5$ qui passe du statut d'absurdité à celui de vérité assez évidente (hm !) lorsque l'on apprend les nombres relatifs.

Le statut opératoire, ou rôle, d'un énoncé (hypothèse, résultat intermédiaire, conclusion partielle ou conclusion complète) est au contraire bien fixé, de manière immuable, par le problème dans la solution duquel l'énoncé est formulé.

La démarche par substitution d'énoncés, les théorèmes étant vus alors comme des règles de substitution (ce qui les distingue des théorèmes précédemment envisagés), a été abondamment décrite et commentée par R. Duval et M.A. Egret (article précité). Nous n'y revenons donc pas.

L'observation nous a conduit à relever une caractéristique supplémentaire de la rédaction mathématique de base, génératrice d'une difficulté que nous avons intitulée difficulté d'*élaboration théorique*.

Cette caractéristique peut ainsi être formulée : - *le défini est définitif* -.

Ceci signifie que si un objet mathématique, par exemple un point, a été introduit d'une certaine façon, il devient interdit de l'introduire d'une autre façon sans vérifier la coïncidence. On remarquera que la méconnaissance ou le non respect de cette caractéristique ne se traduit pas par des marques nettes de défaut d'un réseau de démonstration ; il faut chercher spécifiquement une double occurrence d'un même élément en position initiale (un point de départ) dans le réseau pour repérer un défaut.

5. Situations spécifiques à chacune des phases

Il y a deux façons de promouvoir les différentes phases de la résolution d'un problème et de développer spécifiquement les compétences correspondantes :

1° choisir des problèmes dont la solution correspond à un travail presque exclusif dans l'une des trois phases,

2° construire des situations de manière à ce que chaque phase de résolution corresponde à des activités précises et que les changements de phases soient marqués par des modifications des tâches proposées.

Certainement, un enseignement devra recourir à l'une et l'autre de ces deux façons, pour s'avérer efficace par rapport à l'acquisition de compétences relatives à chaque phase. En effet, des choix exclusifs de la première risqueraient de conduire à l'idée que la forme du travail est entièrement tributaire des problèmes considérés, qu'il n'y a pas une méthodologie générale. Au contraire, des choix exclusifs de la seconde risqueraient de laisser les élèves désarmés devant des problèmes énoncés de la manière usuelle, sans propositions de travail particulier (autre que la seule résolution).

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous envisageons les deux façons à propos de chacune des trois phases, en les illustrant par des exemples choisis parmi les situations que nous avons eu l'occasion de rencontrer, lors de diverses observations ou expérimentations.

5.1. Illustrations de l'entrée dans les problèmes

Certains problèmes se trouvent pratiquement résolus de manière complète dès achèvement de la phase d'entrée, supposée correctement conduite.

Un exemple se trouve dans une expérience de C. Moritz, qui remonte à quelques années déjà, sur l'exploitation au collège du thème des carrés magiques. Un carré magique donne lieu à la même somme, dite *somme magique*, pour les termes d'une ligne quelconque, d'une colonne quelconque ou d'une diagonale.

			S
a	b	c	S
d	e	f	S
g	h	i	S
S	S	S	S

Pour un carré magique 3x3, une propriété est que la somme magique S est le triple du terme central (e sur la figure). L'observation de quelques cas particuliers conduit assez vite à conjecturer cette propriété. L'établir se réduit pratiquement à un travail d'*entrée*, c'est à dire :

— introduction de lettres pour désigner les termes,

— écriture des relations déterminées par l'énoncé du problème.

Certes, quand on a écrit entre autres :

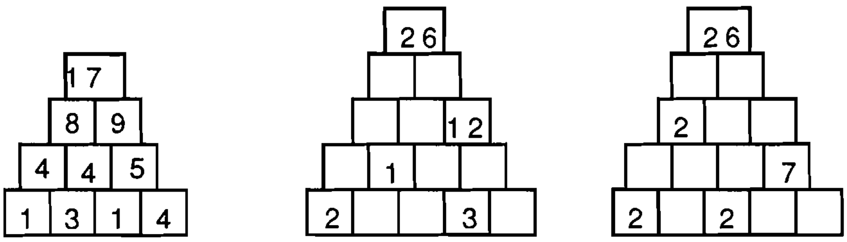
$$S = a + e + i$$
$$S = d + e + f$$
$$S = g + e + c$$

il reste à effectuer la somme membre à membre pour obtenir :

$$S = a + d + g + 3e + i + f + c = 2S + 3e,$$

d'où il résulte que S = 3e. Le travail n'est donc pas tout à fait achevé à la fin de la phase d'entrée, mais il ne reste plus rien à faire qui puisse bloquer (voir le compte-rendu de C. Moritz).

A titre d'exercice de didactique, nous proposons au lecteur de repérer les différences de situation qui résultent de différences de valeurs entre des énoncés relatifs à un même problème de reconstitution d'une *pyramide de Pascal.*



Une *pyramide de Pascal* Deux *énoncés* du même problème

Comme le triangle de Pascal, une pyramide dite de Pascal est telle que deux termes voisins d'une même rangée s'ajoutent pour donner naissance à un terme de la rangée supérieure, à la place qui touche les deux termes considérés. Un problème se fabrique en supprimant d'une pyramide de Pascal certains termes et en demandant de reconstituer les valeurs manquantes au vu des termes présents. Des exemples ont été demandés aux élèves dans l'évaluation en 6ème organisée par l'A.P.M.E.P. sous la direction d'Antoine Bodin. Bien sûr, il faut choisir judicieusement les places à laisser vides, mais ceci n'est pas notre question ici. De même que précédemment, une introduction de variable s'avère nécessaire pour chacun des deux cas présentés ici. Mais une seule variable peut suffire.

Un énoncé qui a été proposé à un niveau plus avancé, à savoir celui du premier cycle universitaire, avec un insuccès à peu près total, montre bien à quel point l'apprentissage de l'entrée dans les problèmes peut être défaillant actuellement. L'énoncé, qui avait été proposé par M. El Faqih dans le cadre d'une évaluation initiale des étudiants, est le suivant :

" Une application f de l'ensemble des nombres réels dans lui-même est supposée vérifier pour tout x la propriété

$$f^3(x) = 1 \text{ , où } f^3 = f \circ f \circ f \quad (\text{ainsi : } f^3(x) = f(f(f(x))) \text{).}$$

Déterminer f(1)."

Le simple parti pris d'exploiter les données, donc ici de remplacer le 1 de f(1) par $f^3(x)$, où x est arbitraire, suffit pratiquement à conduire à la réponse. En effet :

$$f(1) = f(f^3(x)) = f(f(f(f(x)))) = f^3(f(x)) = 1.$$

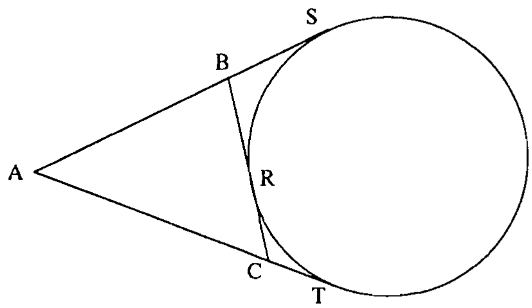
Or moins de 10% des bacheliers scientifiques entrent ainsi dans le problème.

Pour donner l'occasion au lecteur de se convaincre lui-même du fait que ne pas chercher d'emblée à résoudre un problème, mais se contenter d'organiser ses données et ses contraintes, est en définitive *la* démarche payante pour certains cas, voici un exemple. Cet exemple a été publié dans un bulletin de l'A.P.M.E.P., comme un problème non complètement trivial. Son énoncé est :

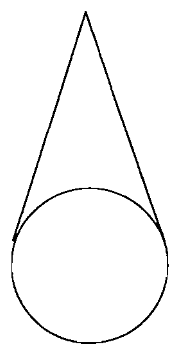
> " En 2h30, un automobiliste a parcouru 250 km, et pourtant il prétend que lors de toute durée de 1h, il a parcouru une distance de 90 km. Peut-il avoir raison ? "

Nous suggérons de préparer un graphique avec en abscisse les durées, de 0 à 2h30, et en ordonnée les distances, de 0 à 250 km. En y portant les points dont l'énoncé impose la place sur ce graphique (par exemple : l'automobile est à l'instant 0 au départ , donc à la distance 0), on aboutira à la vision d'une réponse, qu'il suffira de mettre en forme.

Le problème que nous avons intitulé "Au revoir les enfants" (d'après le film de Louis Malle, dont une scène montre une variante de ce problème) est de ce type, c'est à dire résoluble ou presque dès la phase d'entrée. Dans la thèse de A. Mesquita [M89], on pourra trouver le compte-rendu d'une observation faite sur une variante de ce problème. L'énoncé du problème est indiqué sous la figure.



Comparer le périmètre du triangle ABC aux longueurs AS ou AT



Situation de base : un cercle et deux segments de tangentes

Un premier essai de travail dans une classe fut entrepris pour le groupe du "Suivi scientifique des collèges" et cet essai se solda par un échec relatif, malgré l'indication de la situation de base. Mais, pour les essais ultérieurs, il s'avéra suffisant de demander aux élèves de noter les égalités de segments repérées, pour aboutir au contraire à une obtention très générale de réponses exactes.

La préoccupation d'entrer dans le problème est présente dans certains logiciels d'aide à la démonstration, tel DEFI qui a un module d'*exploration de la figure* (cf. [G88] et sa critique dans [GIA89]). Les réactions d'élèves travaillant sur ce logiciel sont étudiées dans la thèse de doctorat de Saddo Ag Almouloud (Université Rennes I, 1992).

La demande qui a été faite aux élèves pour le problème "Au revoir les enfants", nous conduit à aborder les situations spécifiquement conçues pour le développement des compétences qui correspondent à l'entrée dans un problème. D'autres textes ont déjà présenté ces situations, notamment ceux qui ont paru dans les bulletins du "Suivi scientifique des collèges" ; nous nous contenterons ici de les citer, en les commentant brièvement du point de vue qui nous intéresse dans le présent développement. Bien sûr, nous ne prétendons pas donner une liste exhaustive. En particulier, des extensions hors du domaine de la géométrie méritent d'être envisagées.

– Constructions points par points

De telles constructions supposent une situation dans laquelle les contraintes indiquées laissent une latitude (généralement un degré de liberté). Leur mise en œuvre conduit ainsi à exploiter des variations possibles à l'intérieur d'un cadre donné de contraintes.

- Programmes de construction

Les dessins exécutés selon un programme, donné sous formes d'instructions qui s'enchaînent, constituent l'un des exercices de passage d'un registre d'expression à un autre, exercices fondamentaux pour l'organisation de données.

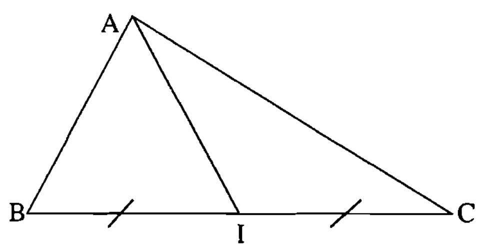
- Figures muettes

Des figures accompagnées d'une description, mais dépourvues de lettres qui désignent leurs éléments remarquables, amènent, justement pour que ces désignations soient retrouvées, à pendre en compte le jeu mutuel des contraintes issues de la description.

- Reproduction de certaines figures codées ou accompagnées d'hypothèses, de "film" de constructions

Les reproductions demandées ne sont pas identiques à l'original, mais modifiées en ce qui concerne l'un ou l'autre élément. Si les seules constructions auxiliaires nécessaires pour la reproduction sont les constructions standard de mise en place des éléments indiqués (exemple : la construction du milieu I d'un segment AB au vu de l'égalité IA = IB), la situation conduit à une exploration des déterminations et des contraintes caractéristiques de la phase d'entrée.

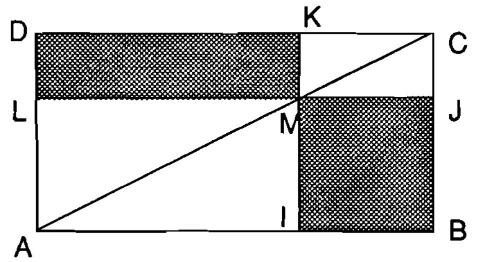
Sinon, l'activité relève de la phase de recherche d'une solution, comme ce sera par exemple le cas pour le problème de reproduire une figure analogue à la figure ci-dessous, mais avec pour longueurs AB = 5 cm, AI = 6 cm et AC = 10 cm.



5.2 Illustration de la recherche d'une solution

La phase de recherche d'une solution est celle qui a suscité le plus de réflexions. Aux études concernant les contenus en jeu s'ajoutent les travaux sur l'heuristique. Nous insisterons donc plus particulièrement sur la transmission entre la phase d'entrée dans le problème et cette phase de recherche, moins fréquemment envisagée.

Par rapport au problème précédemment intitulé "Au revoir les enfants", le problème introduit par Euclide, en liaison avec ses réflexions sur les rapports de grandeurs (et notamment de longueurs), illustre bien l'apparition d'une phase heuristique.



Problème d'Euclide : Egalité des aires hachurées ?

Pourtant il ne repose a priori que sur des considérations de symétrie aussi évidentes que celles qui interviennent dans "Au revoir les enfants".

Des rectangles tels que AIML sur la figure sont partagés en deux par leur diagonale. Quelle est alors la différence entre les deux problèmes, qui fait qu'ici des récapitulatifs d'égalités d'aires ne seront pas décisifs comme l'ont été précédemment ceux des égalités de longueurs ? C'est que précédemment la question concernait un périmètre, auquel on n'a accès que par la somme des longueurs des segments en jeu, tandis qu'ici la question concerne des rectangles, objets de base pour les aires de surfaces planes. Et ces rectangles doivent apparaître comme des résidus d'une démarche, la reconfiguration, portant sur des triangles (MKDL est ce qui reste de ACD quand on lui a "retiré" AML et MCK).

Certes, dans l'un et l'autre problème, les objets de la conclusion (un périmètre, des aires) ne sont pas des résultats d'instructions élémentaires de construction, autrement dit, ne peuvent être des objets premiers dans une construction (comme peut l'être un milieu). Il n'y a donc pas de nécessité à propos de ces deux problèmes de rendre attentif à la distinction entre contenu et rôle d'un assertion. C'est d'ailleurs pourquoi nous considérons ces deux problèmes comme des problèmes "publicitaires" pour la démonstration, car la phase de rédaction y sera très réduite. Ceci n'empêche pas les deux problèmes cités de relever d'une approche différente. Nous renvoyons à [MA89] pour plus de détails sur la résolution du problème d'Euclide.

L'extraction d'informations est bien illustrée par l'activité de reconfiguration sollicitée dans le problème d'Euclide.

L'enrichissement est typiquement illustré par la résolution du "théorème des tiers" (cf. 4.2) ou par le dernier exemple proposé en 5.1 (un triangle avec une médiane). Dans le dernier cas, la clef est la considération du point A' symétrique de A par rapport à I, qui conduira à la construction d'un triangle ABA' de côtés connus.

Dans tous ces exemples cependant, la phase de résolution est commandée par la phase d'entrée. On peut très bien conduire cette phase de résolution à un ratage par une gestion didactique maladroite de la phase d'entrée, comme cela apparaît dans un article très honnête de B. Capponi [C88], sur un échec dans l'exploitation du problème d'Euclide. Nous avons du mal à imaginer un problème pour lequel la phase d'entrée se réduise au point d'être inexistante. Elle précédera donc la phase de résolution.

Des situations qui nous paraissent spécifiquement adaptées au développement de compétences pour la phase de résolution sont les suivantes (liste non exhaustive, limitée à des situations expérimentées) :

- Messages décrivant certaines figures
La transmission d'une figure au moyen d'un message est une activité qui conduit souvent à compléter, enrichir la figure donnée pour se ramener à une figure fondamentale connue. Par exemple, une description faisant état d'un "rectangle avec coin coupé" sera d'emblée plus évocatrice qu'un relevé de parallèles, perpendiculaires, sécantes. Nous nous limitons ici à certaines figures, celles qui ne conduisent pas à prendre des justifications en charge pour leur description. Dans le cas contraire, la même activité est à relier à la phase de rédaction d'une réponse.

- Figures douteuses
Des figures qui laissent planer un doute sur la réalité d'une propriété apparente, par exemple un parallélisme, conduisent à une exploitation systématique de leurs sous-figures qui sont des figures fondamentales (ou figures clefs).

- Reproduction de certaines figures
Pour ceci, nous renvoyons à ce qui a été indiqué en 5.1, où figurait déjà ce type de situations.

5.3 Illustration de la rédaction

Il y a un travail spécifique de rédaction lorsque des précisions de rôle des énoncés en jeu ou des discussions de validité s'avèrent nécessaires. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a rien à rédiger dans le cas contraire, mais simplement que la rédaction s'en tient en quelque sorte à un compte-rendu de ce qui a été fait antérieurement.

Par exemple, le "théorème des tiers" déjà cité donne lieu à un travail spécifique de rédaction : il demande d'utiliser deux fois le théorème relatif aux milieux de deux côtés d'un triangle et une fois le théorème réciproque (voir [R89]). Le choix entre un théorème et le théorème réciproque est typiquement un choix tributaire du rôle des énoncés en jeu.

De même, la construction du triangle dont on donne les longueurs de deux côtés et de la médiane issue du sommet commun à ces deux côtés, ne s'avère possible que sous réserve de vérification d'une inégalité triangulaire.

Il est très important, pour la conduite d'une classe, de ne pas réserver l'activité de rédaction aux élèves qui ont mené à bien les deux phases précédentes de la résolution d'un problème. Ce sont d'ailleurs souvent ces élèves qui ont le moins besoin d'apprendre à rédiger. D'où l'importance, signalée dans certains articles, de consacrer une place en soi, séparée des autres phases, à la phase de rédaction.

Des situations qui se sont avérées intéressantes, pour l'évolution de compétences à présenter une solution, sont les suivantes :

- Vérifications
Une solution étant donnée, par exemple un programme réalisant une construction voulue étant indiqué, il s'agit d'examiner les conditions dans lesquelles ce

programme peut être exécuté. Pour nous, de tels tests relatifs aux hypothèses du problème ne relèvent pas du niveau "évaluation" de la classification NLSMA, car il ne s'agit que d'apprécier localement la marge de manœuvre que laissent subsister des hypothèses.

- Messages décrivant certaines figures
Nous renvoyons à 5.2 où cette activité est déjà mentionnée.

- Production d'énoncés
Dans des conditions bien précises, les élèves peuvent être productifs sur la fabrication d'énoncés. Nous renvoyons pour cela à un de nos articles, paru dans les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (IREM de Strasbourg, 1989), mentionnant une production d'énoncés acceptables, par une majorité (55%) d'élèves de Quatrième.

- Réseaux
Le travail sur des réseaux organisant la démarche mathématique est tout spécialement adapté à la phase de rédaction.

6. Conclusion

L'enseignement des mathématiques a d'autres finalités que la transmission du savoir mathématique. En particulier, c'est cet enseignement qui conduit à apprendre à utiliser correctement les divers registres d'expression au service de la communication, et à passer de l'un à l'autre de ces registres. On comprend que les compétences à entrer dans l'étude d'une question qui vous est posée, à faire preuve d'imagination dans des essais de traitement, à présenter correctement les résultats obtenus sont d'une utilité générale qui déborde largement le cadre des mathématiques ou même des disciplines scientifiques. C'est pourquoi les efforts à leur consacrer dans l'enseignement méritent d'être comparables à ceux que l'on consacre à l'acquisition de contenus mathématiques. Ils risquent d'ailleurs d'être payants même du seul point de vue des mathématiques, en contribuant à une appropriation moins coûteuse des contenus de la discipline.

Références

Note : le sigle *ESM* désigne la revue Educational Studies in Mathematics, Kluwer, Pays-Bas, le sigle *RDM* désigne la revue Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[B82] N. BALACHEFF, 1982, Preuve et Démonstration en Mathématiques au Collège, *RDM*, vol.3 n° 3, pp. 261-282.

[BO89] A. BODIN, 1989, L'Evaluation du Savoir Mathématique, *Bulletin APMEP*, n° 368, pp. 195-219.

[C88] B. CAPPONI, 1988, Mesure et Démonstration, *Petit x*, n° 17, pp. 29-48.

[DP85] R. DOUADY et M.J. PERRIN, 1984 & 1985, Aires de Surfaces Planes, *Petit x*, n° 6, pp. 5-33 et n° 8, pp. 5-30.

[DE89] R. DUVAL et M.A. EGRET, 1989, L'Organisation Déductive du Discours, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol.2, ULP Strasbourg.

[GG85] G. GLAESER, 1985, *La Didactique Expérimentale des Mathématiques (chapitre 3)*, 2ème rédaction augmentée, publication de l'ULP, IREM de Strasbourg.

[G88] R. GRAS, 1988, Aide Logicielle aux Problèmes de Démonstration, *Petit x*, n° 17, pp. 65-83.

[GR82] J.B. GRIZE, 1982, *De la Logique à l'Argumentation*, librairie Droz, Genève.

[GIA89] D. GUIN et le groupe I.A., 1989, Réflexions sur les Logiciels d'Aide à la Démonstration en Géométrie, *Ann. de Did. et de Sc. Cogn.*, vol.2, ULP Strasbourg, pp. 89-109.

[M89] A.L. MESQUITA, 1989, *L'Influence des Aspects Figuratifs..*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[MA89] A.L. MESQUITA, 1989, Sur une Situation d'Eveil à la Déduction en Géométrie, *ESM*, vol.20 n° 1, pp. 55-77.

[MEN89] Ministère de l'Education Nationale, Direction de l'Evaluation et de la Prospective, 1989, *Evaluation à l'Entrée en Sixième, Présentation*, Document diffusé aux professeurs de France et de Navarre.

[MO80] C. MORITZ, 1980, *Descriptif du Film "Sur un Thème de Carrés Magiques"*, publication de l'IREM, ULP Strasbourg.

[P65] G. POLYA, 1965 (date de la traduction française de *How to Solve It*), *Comment Poser et Résoudre un Problème*, Dunod, Paris.

[R89] J.C. RAUSCHER, 1989, Le "Théorème des Tiers", in *Suivi Scientifique classe de Troisième*, Bulletin Inter-IREM, pp. 75-79.