A PROPOS DU CONCEPT DE VOLUME

Raymond GUINET
Maryvonne VERJUS

*La revue trimestrielle "Recherches en Didactique des Mathématiques" vient de publier un numéro entier (1983 - Vol. 4 - 1) sur "Didactique et Acquisition du Concept de volume." **

Nous vous présentons ici un aperçu de cet ouvrage, compte rendu de travaux réalisés par une équipe commune au Centre d'Etude de Processus Cognitifs et du Langage CNRS -- EHESS et à l'IREM d'Orléans.

Le lecteur pourra se référer utilement à ce livre.

L'article qui suit est constitué de très larges extraits.

Les trois études citées dans cet article portent sur l'acquisition et la didactique du concept de volume au début de l'enseignement secondaire. Elles ont été conduites en complément les unes des autres, et se placent dans le cadre plus général de l'étude des "structures multiplicatives" à laquelle l'équipe s'est consacrée depuis plusieurs années.

Le concept de volume illustre de manière particulièrement nette les problèmes théoriques et méthodologiques posés à la recherche en didactique. Ce concept a en effet différentes propriétés, dont la compréhension progressive recouvre une longue période du développement de l'enfant et de l'adolescent : alors que certaines propriétés sont appréhendées dès l'âge de 5 ans ou 6 ans, sans qu'un enseignement systématique soit d'ailleurs nécessaire pour cela, d'autres propriétés soulèvent encore de grandes difficultés chez la majorité des élèves de 15 ans en dépit de l'enseignement qu'ils ont reçu.

Entre ces deux moments du développement des connaissances se situent de nombreux processus dans lesquels interviennent, mêlées entre elles, des représentations et opérations géométriques, physiques et arithmétiques. Les différentes étapes de la conservation du volume (Piaget 1941) constituent des jalons intéressants de ce développement mais ils sont loin d'en épuiser l'analyse. Les étapes décrites dans les trois études de cet article ne l'épuisent pas non plus,

---

** – Editions "La Pensée Sauvage" B.P. 141 – 38002 Grenoble cédex.*

d'abord parce qu'elles portent presque exclusivement sur l'arithmétisation du volume, c'est-à-dire sur le passage de l'espace au nombre ; ensuite parce qu'elles sont centrées sur une période limitée du développement : classe de cinquième (12-13 ans)pour l'expérience didactique et l'analyse des manuels, premier cycle du 2e degré (11-15 ans) pour les entretiens individuels ; enfin, parce que les liens qu'entretient le volume avec d'autres concepts **(proportion, surface, structures numériques et algébriques)** ne sont que marginalement abordés alors qu'ils jouent un rôle important.

Le choix de l'arithmétisation comme thème d'étude a été en partie dicté par la période de la scolarité étudiée et en partie par l'intérêt plus général porté "aux structures multiplicatives" par l'équipe responsable de cette recherche.

L'inscription du volume au programme de la classe de 5e est interprétée le plus souvent par les auteurs comme une incitation à enseigner les formules classiques du volume, du parallélépipède rectangle, des prismes, des pyramides, de la sphère. Or l'arithmétisation du volume déborde largement cette question de formules parce que le volume est une grandeur physique mesurable, qui peut être évaluée éventuellement directement : elle supporte à ce titre des propriétés propres aux **mesures unidimensionnelles.** En même temps la mesure du volume peut être calculée par une combinaison d'informations sur des grandeurs d'une autre nature (longueurs et surfaces notamment) : cela met en œuvre au delà des formules une **conception tridimensionnelle du volume.**

Trois recherches ont été entreprises :

La première recherche porte sur les conceptions et les compétences des élèves des quatre classes du 1er cycle secondaire (11-15 ans) dans plusieurs types de problèmes : calcul d'un volume, calcul d'une mesure élémentaire . . . . ; cette recherche met en évidence les difficultés auxquelles se heurtent les élèves jusqu'à la fin du 1er cycle ainsi que les principaux types d'erreurs observés et les formulations évolutives employées.

Les différentes questions abordées au cours des entretiens sont loin d'épuiser les aspects possibles du concept de volume. Elles portent principalement sur l'arithmétisation du concept (cf. introduction de ce volume) et plus particulièrement sur les propriétés trilinéaires :

- trouver le rapport des volumes de deux aquariums connaissant le rapport des longueurs entre elles, des largeurs entre elles et des hauteurs entre elles.

- trouver le nombre d'éléments cubiques nécessaires pour fabriquer une figure en L obtenue par agrandissement d'une petite figure de même forme.

- trouver le nombre de petites sphères dont le volume est équivalent à une sphère plus grosse, les deux diamètres étant connus. Même question pour le poids.

Ces questions sont précédées de deux calculs directs d'un volume parallélépipédique dont les dimensions linéaires ne sont pas données et que le sujet doit estimer ou mesurer :

- un petit volume extérieur au sujet (une boîte de carton figurant un aquarium)

- un volume plus grand à l'intérieur duquel se trouve le sujet (la pièce dans laquelle se déroule l'entretien).

En dernier lieu une question est posée sur l'opération inverse :

- recherche d'une dimension linéaire, connaissant le volume et les deux autres dimensions.

-- *Le tableau ci-dessous résume assez bien les conditions expérimentales :*

Consignes et matériel de l'entretien.

Question 1_1 – **Volume de l'aquarium** Matériel : L'élève a devant lui une boîte en carton (longueur 39 cm, hauteur 17 cm, largeur 20 cm). Il dispose également d'un mètre à portée de la main. Consigne :"Est-ce que tu peux me dire la quantité d'eau qu'on peut mettre dans cet aquarium en le remplissant complètement ?"
Question 1_2 – **Volume de la pièce** Matériel : La pièce où se déroule l'expérience. Consigne: "Est-ce que tu peux estimer le volume de cette pièce?"
Question 1_3 : Consigne :"Qu'est-ce que c'est pour toi le volume ?" Relance : "Si tu avais à expliquer à un copain la question que je t'ai posée, qu'est-ce que tu lui dirais ?"
Question 1_4 – **Calcul du nombre de cubes (légos) nécessaires pour construire un parallélépipède de 4 x 3 x 2.** Matériel : Une centaine de cubes emboîtables de 1 cm d'arête. Consigne: "Combien faut-il que je te donne de légos pour construire une boîte pleine (comme une boîte de sucre) de 3 de large, de 4 de long et de 2 de haut ?"
Question 2_1 – **Rapport entre le petit aquarium et le grand.** Consigne: "Monsieur Dupont a un aquarium assez petit dans sa cuisine et un grand dans son salon. Celui du salon est 2 fois plus long, 3 fois plus large et 2 fois plus profond que celui de la cuisine. Combien de fois celui du salon est-il plus grand que celui de la cuisine ?"

L'analyse des procédures * et des réponses des élèves montre qu'à côté des procédures de type "volume" dans lesquelles les dimensions sont composées multiplicativement, il est possible d'identifier trois autres catégories de procédures :

– les procédures de type "périmètre" qui reviennent à composer additivement les dimensions linéaires et à raisonner ainsi sur les arêtes du parallélépipède.

– les procédures de type "surface" qui reviennent à calculer des aires et à les additionner.

– les procédures de type "mixte" qui reviennent à ajouter des longueurs à des aires.

Exemples de procédures * utilisées dans le calcul du volume de l'aquarium et de la pièce : (Items 1_1 et 1_2).

1 – Procédures de type volume .

Le calcul fait intervenir la multiplication des trois dimensions. Cette multiplication peut évidemment être conduite de plusieurs manières :

(longueur × largeur) × hauteur
(longueur × hauteur) × largeur
(largeur × hauteur) × longueur

Nicolas (3ème ; aquarium) :

"Je mesurerai la largeur (20 cm), la longueur (40 cm) et la profondeur (17 cm) et puis je multiplie ça (les mesures) entre eux. Je trouve 12.200".

"C'est quoi 12.200? A mon avis c'est 12,2 litres."

2 – Procédures de type "périmètre".

Le calcul fait intervenir un modèle additif. L'élève ne semble alors tenir compte que des arêtes du solide, et ceci d'une manière éventuellement partielle ou exhaustive.

Antonio (6ème , aquarium) :

Mesure la hauteur 18 cm, la longueur 40 cm (qu'il appelle largeur) et fait le calcul suivant :

"18 + 40 = 58
58 × 2 = 116 cm
ça donne 1,16 m et ça fait donc 1,16 litres."

"Les mètres correspondent bien aux litres ?"

"Oui, 1,16 litres. C'est ce qu'il faut mettre pour remplir cet aquarium."

---

* – *Voir Annexe.*

3 -- Procédures de type "surface".

Le calcul fait intervenir des produits de deux dimensions (L × l) ou (l × h) ou (L × h), donc des aires. Parfois l'élève ajoute des aires entre elles. On remarquera que dans ces procédures l'enfant manie la coordination multiplicative de deux dimensions mais cette "bidimensionalité" du volume ne signifie pas qu'il est projeté sur un plan, puisque l'enfant additionne fréquemment des surfaces qui se situent dans des plans orthogonaux.

Philippe (5ème ; aquarium)

"ça fait 800 centilitres."

"Explique-nous comment tu as fait ?"

"J'ai pris la longueur 40 cm et la largeur 20 cm et j'ai multiplié et j'ai trouvé 800 cl."

"Tu as mesuré en quoi ?"

"En centimètres !"

"Et avec des centimètres tu obtiens des centilitres ?"

"Eh oui ! pour l'eau."

4 -- Procédures de type "mixte"

Les calculs font intervenir en même temps des propriétés de la surface (multiplication) et du périmètre (addition). En d'autres termes la troisième dimension est traitée différemment des autres. Toutefois l'élève fait intervenir fréquemment des opérations de son crû comme dans les deux protocoles suivants : division par 2, 1/2 périmètre par la hauteur.

Eric (3ème ; pièce)

"Ça dépend comme on voit la pièce. Vue de haut, elle n'a pas de hauteur, alors ça fait la longueur, plus la largeur multipliée par 2. Mais comme je suis à l'intérieur de la pièce, il faut multiplier par la hauteur . . . ça fait $((L + l) \times 2) \times h$."

5 -- Autres conduites.

Nous trouvons également une réponse dans laquelle les enfants se contentent de fournir deux ou trois dimensions linéaires sans parvenir à réaliser aucun calcul.

Marie (4ème)

"J'ai mesuré la longueur 40 cm et la largeur 20 cm mais je ne vois pas comment les utiliser, ces mesures. Non, je ne sais pas. Je crois à peu près 4 litres."

"Comment . . . ? Au hasard ? "

Corinne (3ème) (Répète la consigne)

"J'sais pas . . . entre 8 et 10 litres."

"Comment . . . ?"

"J'essaie de prendre une bouteille contenant 1 litre d'eau et je la verse dans l'aquarium."

"Suppose que tu n'aies pas de bouteille . . . "

"Je ne sais pas !"

Il est intéressant de constater que certains sujets, avant de donner une réponse, aient l'idée de mesurer une ou plusieurs dimensions, mais demeurent ensuite incapables de les utiliser.

Conclusion

Comment résumer cet ensemble de résultats et quelles conclusions en tirer ?

Seules les épreuves de calcul direct du volume du parallélépipède à partir des dimensions linéaires et, avec un léger décalage, l'opération inverse de recherche d'une dimension sont relativement bien réussies à partir de la cinquième.

Il existe donc une place pour l'enseignement du volume au-delà de cette classe, place totalement inoccupée actuellement.

Les critères que nous avons utilisés n'épuisent d'ailleurs pas la variété des aspects du concept de volume qu'il serait intéressant de considérer. Il en existe qui concernent le second cycle des lycées. Il en existe également pour la période qui se situe en-deça de la classe de cinquième. Le fait que les élèves de sixième échouent massivement ne signifie pas qu'on doive renoncer à faire étudier certains aspects du volume à l'école élémentaire.

L'une des conclusions les mieux assurées de cette étude en tous cas, concerne l'extrême difficulté pour les élèves du premier cycle des propriétés de trilinéarité. Le concept de volume est typiquement de ceux sur lesquels il faut revenir pendant plusieurs années, en approfondissant chaque fois davantage, et en n'hésitant pas à revenir sur les aspects réputés acquis. On peut dire que le modèle du pavage demeure une aide puissante jusqu'en troisième.

Pourtant on ne peut pas en rester là. L'analyse des procédures utilisées par les élèves, et notamment des erreurs, montre que l'arithmétisation du volume est souvent opérée à l'aide d'une représentation de type "périmètre" ou de type "surface".

Cette réduction nous paraît être l'effet conjoint de deux modèles qui se confortent l'un l'autre :

D'une part, un modèle additif du volume comme grandeur unidimensionnelle décomposable en couches, en lignes, en colonnes, modèle qui pourrait être adéquat s'il était bien arithmétisé, mais qui se révèle en l'occurence non opératoire.

D'autre part, un modèle géométrique du volume comme ensemble d'arêtes ou ensemble de surfaces dont témoignent certains dessins des élèves.

Pour arithmétiser correctement le concept du volume il faut à la fois des opérations géométriques bien coordonnées (de pavage par exemple) et les opérations arithmétiques associées, qui sont par nature multiplicatives.

La deuxième recherche porte sur la construction d'une suite de situations didactiques destinées à des élèves de 5e (12 - 13 ans) et sur l'observation des effets produits en classe.

Des protocoles* sont cités pour montrer les difficultés inhérentes à la comparaison des volumes pleins et à l'évaluation de leur mesure par des moyens indirects. Le pavage du parallélépipède rectangle fait surgir un incident critique (le cube du coin) qui traduit la contradiction entre les conceptions unidimensionnelles et tridimensionnelles du volume.

1) Comparaison et mesure des volumes.

La suite de situations proposées aux élèves a pour objectif d'amener les élèves à approfondir leur conception unidimensionnelle du volume et à utiliser (ou découvrir) certaines opérations non triviales de comparaison et de mesure, portant sur des volumes pleins notamment. Elle vise en même temps à permettre de repérer certaines difficultés auxquelles les élèves de ce niveau peuvent encore se heurter. Cette suite comporte :

- une tâche de sériation de récipients, dont la forme complexe ne permet pas toujours d'évaluer perceptivement, pour chaque paire de récipients, lequel a la capacité la plus grande ;

- une tâche de comparaison de deux volumes pleins ; et d'insertion de ces deux volumes dans la série précédemment constituée ;

- une tâche de mesure des différents récipients avec une unité arbitraire (petit récipient unité). Cette tâche permet à chaque groupe d'élèves d'associer un nombre à chaque récipient ; mais l'unité n'est pas la même pour tous les groupes (deux unités différentes sont utilisées);

- une tâche de comparaison des suites de nombres obtenues par les différents groupes ;

- une tâche, relativement plus complexe, qui consiste à rechercher comment on peut associer un nombre d'unités de capacité à un volume plein et un nombre d'unités pleines à un récipient ;

- une tâche de calcul dans un tableau de plusieurs suites proportionnelles, débouchant sur l'analyse des propriétés du tableau.

2) D'une conception unidimensionnelle à une conception tridimensionnelle du volume.

Au cours de ces trois leçons, centrées sur le parallélépipède rectangle, l'objectif est de permettre aux élèves de "découvrir" empiriquement un nouveau moyen d'arithmétiser le volume, par le calcul du produit $L \times l \times h$. Toutefois cette formule, introduite par le pavage en couches, lignes et colonnes, s'appuie fortement sur la mesure directe du volume par itération d'un petit volume unité, c'est-à-dire sur une conception que nous avons qualifiée d'unidimensionnelle. Nous verrons que cela soulève un obstacle important.

---

* – *Voir Annexe*

Les caractéristiques des boîtes parallélépipédiques utilisées sont telles que les élèves doivent rencontrer le problème de la régularité et de l'optimalité du mode de pavage (l'une des boîtes ne se pave bien que dans une direction), ainsi que celui des interstices vides (pavage par petits cylindres). L'objectif est d'amener ainsi les élèves à mieux percevoir l'intérêt du pavage par des cubes, pavage indifférent à l'orientation, l'utilisation de cubes de 1 cm^3 présentant en outre l'avantage de donner une formule homogène avec les mesures de longueur.

3) **Conclusion.**

L'intérêt de cette expérience se situe davantage dans les éclaircissements qu'elle apporte sur les rapports entre les différents aspects du concept de volume, et sur les rapports entre situations proposées et conceptions des élèves. Le volume est un concept vivant, qui puise sa richesse dans la relation qu'il permet d'établir entre divers types de concepts (grandeurs spatiales, proportion et linéarité, fonction de plusieurs variables, dépendance et indépendance, dimensionnalité . . . .).

Tous ces aspects ont pris du sens à travers les situations proposées, les tâches demandées aux élèves, les représentations symboliques utilisées. Cette expérience didactique élargit donc sensiblement le point de vue auquel se placent la plupart des manuels, qui semblent faire du volume un objet de connaissance un peu désuet, souvent rabattu sur l'application des formules.

Cette expérience apporte en même temps une moisson d'observations, dont quelques-unes ont le statut de faits didactiques, et dont les autres offrent l'idée de plusieurs expériences nouvelles.

Il reste que nous ne sommes qu'au début du chemin de la recherche en didactique. On ne peut espérer du premier coup aborder toutes les questions ni a fortiori y répondre. La fécondité d'une approche tient autant dans sa capacité à faire surgir des faits intéressants même inattendus, qu'à apporter des conclusions.

L'expérience didactique que nous venons de rapporter nous semble présenter cette vertu. Les membres de l'équipe seraient satisfaits si elle permettait de réhabiliter le concept de volume comme un objet d'enseignement intéressant et comme un objet d'étude fécond pour la recherche en didactique.

La troisième recherche vise à évaluer les progrès accomplis par les élèves grâce à cette séquence didactique*. L'analyse d'un ensemble de questions posées en pré-test et post-test ne constitue pas vraiment une évaluation de la séquence didactique conduite dans les différentes classes. En effet, il n'a pas été effectué de comparaison avec des classes fonctionnant selon un autre déroulement de l'enseignement et un certain nombre de points n'ont pas été abordés dans le questionnaire.

---

* – *Voir Annexe*

Les questions sont les suivantes :

– *Volume de la pièce :*

" Est-ce que tu peux estimer le volume de la pièce ?
Explique comment tu fais, et écris tes calculs."

– *Notion exprimée sur le volume :*

"Peux-tu expliquer ce que c'est pour toi le volume ?"

– *Rapport des volumes :*

"Monsieur Dupont a un aquarium assez petit dans sa cuisine et un grand dans son salon. Celui du salon est 2 fois plus long, 3 fois plus large et 2 fois plus profond que celui de la cuisine. Combien de fois celui du salon est-il plus grand que celui de la cuisine ?"

– *Surface, arêtes, volume de la boîte :*

"Jocelyne veut fabriquer une boîte en carton de 40 cm de long, 30 cm de large et 20 cm de haut. Fais un dessin de cette boîte et indique sur ton dessin les dimensions.

Quelle surface de carton faut-il pour faire cette boîte ?

Quelle longueur de scotch faut-il pour coller le carton sur les bords ?

Quel est le volume de la boîte ?"

– *Calcul de la troisième dimension :*

"Le volume d'un bloc parallélépipédique fabriqué avec des légos (comme une boîte de sucre) est de 84 légos. Sa largeur est 3 et sa hauteur est 4. Quelle est sa longueur ?

Explique comment tu fais et écris tes calculs."

Néanmoins l'analyse des réussites, l'évolution de chaque élève, la comparaison des questions et l'étude des erreurs permettent d'avancer quelques remarques. L'amélioration d'ensemble est importante sur l'ensemble des classes et pour la plupart des élèves. Mais elle n'est pas uniforme sur les classes, elle semble dépendre à la fois du niveau initial des élèves et de ce qui s'est concrètement passé dans la classe.

Les progrès d'ensemble concernent surtout la mise en œuvre des formules de calcul du volume : le niveau moyen de réussite passe en effet de 46 à 72 %.

Annexe :

– **procédure** :"Nous appelons procédure les démarches par lesquelles les enfants choisissent, interprètent et traitent les données pour aboutir à une réponse."

– **séquence didactique** : Suite de leçons visant à l'apprentissage d'un concept.

– **protocole** : Compte rendu d'expérience.