ET SI ON TIRAIT UN TRAIT SUR LE ... TRAIT DE FRACTION ?

Francis REYNES
Collège Grand Air, Arcachon

Dans la mesure où je peux faire confiance à mes souvenirs d'élève, la notion de «fraction» m'a toujours paru un peu bizarre. J'ai beau être devenu professeur, l'impression a persisté... Pire : au fil des années, des expériences et des réflexions, elle s'est renforcée : je trouve cette notion de plus en plus artificielle. Cela explique-t-il que son enseignement soit aussi difficile et engendre des «glissements méta-didactiques» aux effets désastreux, je ne l'affirmerai pas de façon catégorique ; mais j'ai néanmoins quelques arguments à faire valoir et quelques propositions à soumettre aux intéressés...

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20} \text{ mais } \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4}$$

Franchement, vous trouvez clairs ces «échafaudages» qui peuvent conduire à ceci :

$3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ *«parce qu'on multiplie par 3».*

$7x = \frac{2}{7}$ donc $x = 2$ *«parce qu'on simplifie par 7».*

$\frac{x}{4} = 3$ donc $x = 3 + 4$ *«parce que le 4 passe de l'autre côté».*

J'en passe, et des pires. De la 6ème à la ... terminale (? !), quel prof de maths n'a pas oscillé de l'exaspération au désespoir devant la récurrence d'une telle suite d'inepties ? Inepties, vous dis-je : car il est patent de constater que toutes les «énormités» de ce genre dérivent d'une perte du sens des écritures et des opérations qu'elles représentent. Quel est donc le sens du «trait de fraction», comment fonctionne-t-il, à quel(s) concept(s) est-il relié ? Il semble que les élèves n'en aient qu'une très vague idée : lorsqu'ils écrivent, à une écrasante majorité, «$5 + \frac{6}{3} = \frac{15}{3} + \frac{6}{3}$», n'est-ce pas révélateur du fait qu'ils ont appliqué une recette en un comportement d'*«automathe»*, parce qu'ils ont «oublié» que $\frac{6}{3}$ c'est 6 divisé par 3 ?

Il y a quelque temps, je lisais dans le «mini-dictionnaire» d'un manuel de 3ème : *«Le nombre $\frac{a}{b}$ est égal au quotient de a par b».* Soit. Mais si $\frac{a}{b}$ = a/b, alors je ne vois pas vraiment l'intérêt d'une deuxième notation... Pourquoi compliquer les choses ? !

«petit x» n° 31 pp. 63 à 70, 1992-1993

Au lieu d'ériger la «fraction» en une sorte d'objet en soi au statut arbitraire et ambivalent, traitons-la ni plus ni moins - c'est bien le cas de le dire - pour ce qu'elle est : un quotient. Je suis littéralement effaré lorsque je vois, encadré, dans un manuel de 5ème :

Règle *: pour multiplier par* $\frac{a}{b}$ *on multiplie par a et on divise par b.*

Assurément, pour multiplier par a et diviser par b, il faut ... multiplier par a et diviser par b.

Il devient urgent de réhabiliter la division et de lui redonner la place qui lui revient de part son statut d'opération. Il est manifeste que le «trait de fraction» fait perdre de vue cet aspect opératoire et son enracinement concret : lorsqu'on demande à un élève de 4ème : si tu paies 12 F pour acheter 5 trucs, comment calcules-tu le prix d'un truc ? Il répond : je divise 12 par 5. 12/5 a un sens pour lui, un sens «actif», opératoire.

Depuis deux ou trois ans, on trouve sur le marché des «outils pédagogiques» en forme de vraies-fausses calculatrices sur lesquels, à côté des quatre touches d'opérations usuelles, trône un magnifique «/» dont la fonction et - je vous le donne en ... millième - non calculatoire : si on tape, par exemple, 3/4 =, et bien il ne se passe rien ! Illogique ? non : pédagogique. Mais si on tape 3/4 +5/6 =, alors apparaît 19/12. Magique ? NON : pédagogique, vous dis-je.

Soyons sérieux, cela nous évitera peut-être quelques tristesses. Le «calcul sur les fractions», qui panique tant d'élèves, n'est rien d'autre que l'ensemble des conséquences que l'on peut tirer des propriétés de a division, c'est-à-dire de l'explicitation de ses relations avec les autres opérations. Dans le domaine additif, je n'ai jamais observé de blocage persistant sur la propriété $a - (b + c) = a - b - c$. Je ne vois pas pourquoi il y en aurait un sur le fait que $a/(b \times c) = a/b/c$ puisque c'est exactement le même mode de fonctionnement. Et pensez-vous sincèrement qu'un élève de 4ème soit incapable de comprendre que, pour partager un gâteau en 12, on peut commencer par le partager en 4 puis repartager chaque quart en 3 ?

«Ce qui manque, semble-t-il, à notre enseignement primaire et secondaire, ce n'est certes pas le contenu mais la structure. Il ne s'agit pas d'apprendre le plus de choses possible si l'on ne sait pas comment elles sont reliées entre elles». Ce n'est pas moi qui le dit, c'est Henri Laborit, qui, pour n'être pas matheux, n'en est pas moins un éminent scientifique.

«Il est indispensable que les connaissances aient pris un sens pour l'élève à partir de questions qu'il s'est posées». Ce n'est pas moi qui le dit, ce sont les instructions officielles pour le collège.

Lorsque les élèves rencontrent un «signe moins» au dénominateur d'une fraction, ils (se) demandent toujours ce qu'on peut en faire ! Manifestement, il les embarrasse : peut-on le faire passer dessus ? Peut-on le faire passer devant ? Pourquoi ces questions, comment y répondre ? Mais je dirai plutôt : pourquoi ces questions qui n'ont pas de sens ? ! Je commence toujours par répondre que «faire passer» n'est pas une opération mathématique...

Lorsque, dans un calcul, un élève propose d'«enlever les parenthèses» je rétorque : d'accord, et on va demander combien pour la rançon ?

Provocation ? Certes. Mais il faut bien réaliser qu'une question mal posée ne permet pas de penser.

Depuis quelques années déjà je tente de dépasser l'obstacle des fractions en réinvestissant la division du rôle qui lui revient en tant qu'opération, à la fois opération mathématique et opération mentale signifiante.

En ce qui concerne la notation, j'ai adopté le signe «/» car il est lisible sans ambiguïté, popularisé par l'informatique, d'une extension d'emploi croissante, déjà en usage dans d'autres pays : aucun problème avec les élèves.

Le premier concept à mettre en place est celui de désignation par une écriture : en 6ème, lorsque l'on demande ce que représente l'écriture 5 + 7, tout le monde répond «une addition». Et c'est normal. Il faut un lent, long et patient travail pour faire comprendre que l'écriture 5 + 7 est une dénomination du nombre «douze», de même que les écritures 18 - 6, 3 × 4, 36/3.

Avoir compris qu'une écriture d'une «opération non effectuée» peut servir à désigner un nombre est un prérequis incontournable : si, dans la tête de l'élève, 5 + 7 n'est pas une représentation de douze, alors 2/3 n'accèdera jamais au statut de nombre ! Car l'opération 2/3 n'est pas «faisable»... Le fait que certains quotients représentent des décimaux est agréable, commode et porteur d'extrapolations : puisque 4/5 désigne un nombre, pourquoi pas 5/6 ? Car il faut bien savoir que, au moins jusqu'en seconde, les «vrais» nombres restent imperturbablement les décimaux ! Cette tendance «naturelle» est considérablement renforcée par l'usage des calculatrices et de l'axiome connexe : la calculatrice ne se trompe jamais.

Bien entendu, un «changement de cadre» géométrique n'est pas un luxe inutile, avec des activités liées à la mesure, pour faire prendre sens aux nombres rationnels non décimaux. Encore faut-il avoir accepté, intégré, d'une façon ou d'une autre que tout segment est mesurable et que le résultat de la mesure» s'exprime dans un nombre.

Le deuxième point fondamental est la discrimination des domaines d'opérations : il est absolument essentiel de distinguer le domaine additif et le domaine multiplicatif. Pour ce faire, il ne faut surtout pas adopter la politique de l'autruche : les traiter séparément en espérant naïvement que l'on va ainsi éviter les confusions. Ces confusions sont inévitables, ce sont des erreurs parfaitement normales et qu'il convient de traiter en tant que telles. Et comment pourrait-on les considérer comme pathologiques quand notre belle langue française dit «fois plus» pour traduire une multiplication en «fois moins» pour traduire une division ? ! Il est au contraire indispensable de les mélanger, à la fois pour mettre à jour leurs dissemblances de statut, d'interprétation, de traduction concrète, langagière, terminologique, et pour mettre en lumière leurs ressemblances de fonctionnement (oserai-je dire : de structure ?) modulo certaines correspondances à installer sans fausse honte.

Conjointement, et dans chacun de ces deux domaines, il est tout aussi nécessaire d'établir, d'enraciner la réciprocité des deux opérations qui y sont présentes : «définir» la soustraction par l'addition de l'opposé (ou la division par la multiplication par l'inverse) mène à coup sûr au désastre de la perte de sens. En revanche, si la soustraction est comprise comme l'opération réciproque de l'addition, autrement dit si les deux égalités $t + d = w$ et $w - d = t$ sont considérées comme équivalentes car porteuses de la même information, traductrices de la même situation, alors il sera possible de comprendre, de démontrer que soustraire revient à additionner l'opposé.

Il est bien évident qu'un tel «travail mathématique» ne peut pas être effectué sans une référence constante à la «langue naturelle» : comment comprendre que $c = 2{,}5 \times a$ est équivalent à $a = c/2{,}5$ si l'on a pas compris qu'il revient au même de dire qu'un concorde vole deux fois et demie plus vite qu'un airbus ou qu'un airbus vole deux fois et demie moins vite qu'un concorde ?

Lorsqu'ils arrivent en 4ème, les élèves ont en général une assez bonne maîtrise du domaine additif. Pourquoi ne pas s'y appuyer, la valoriser et la renforcer en l'utilisant comme guide pour explorer et défricher le domaine multiplicatif ? Presque toutes les propriétés du domaine multiplicatif (sauf le comportement «pathologique» de zéro : nous y viendrons plus loin car il a une autre étiologie) se «devinent» facilement à partir de celles du domaine additif grâce à une correspondance simple des concepts, des mots, des notations ; leurs démonstrations, elles aussi, fonctionnent sur le même mode. Que les didacticiens purs et durs se rassurent : je ne tente pas d'insinuer (sans oser l'avouer, de peur de me faire taxer de nostalgie rétrograde) qu'il faille enseigner l'isomorphisme entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+}, \times)$ ... Mais ils savent mieux que moi que les transferts et les réinvestissements sont déterminants dans la formation des «champs conceptuels». Et j'ai pu constater que ces activités de traduction, de transposition, sont extrêmement fructueuses et contribuent largement à démystifier les «pièges» du domaine multiplicatif (cf. les documents annexes pour une «ossature» possible d'une telle démarche).

Le domaine multiplicatif pose évidemment davantage de problèmes que le domaine additif, du fait de ces «divisions infaisables» relevées précédemment. Ce n'est pas en multipliant les «règles» que l'on résout : les élèves s'y perdent, car ils ne perçoivent absolument pas la cohérence du système, alors ils sont inquiets et se cherchent des «trucs»à eux qui aggravent la situation. Ne sous-estimons pas leurs difficultés, n'ignorons pas leur demande : ils ont envie de comprendre pourquoi ça fonctionne comme ça ! Et ils en sont capables. A condition qu'on leur en donne les moyens et qu'on leur en laisse le temps ; ce n'est pas du tout perdu, c'est même un investissement très rentable, j'en suis de plus en plus convaincu : en partant d'un noyau de propriétés simples et facilement admises, établir leurs conséquences permet de découvrir les lois de fonctionnement internes du système, donc de comprendre le pourquoi. Ces lois constituent des références, des points d'encrage du sens auxquels on peut alors se référer dès que surgit une difficulté (par exemple le «signe moins au dénominateur» que j'évoquais plus haut) : car il devient alors possible de transformer une question mal posée («qu'est-ce que je fais du signe moins dans $\frac{a}{-b}$?» en une question sensée («$a/(-b)$ est-il l'opposé de a/b ?») à laquelle on s'est donné les moyens de répondre.

J'ai constaté que le concept d'inverse est très durablement confondu avec celui d'opposé, et bien plus longtemps que $\times$ n'est confondu avec +, et / avec -. D'où, bien sûr, la nécessité de séparer les domaines d'opérations, mais aussi celle de relier l'inverse à la division : il est clair que, pour une majorité d'élèves, «un sur douze» n'a pas grand chose à voir avec «un divisé par douze»... Or, si l'on a compris que $t \times m = u$ est équivalent à $t = u/m$, il n'est pas difficile d'en déduire que $t \times 12 = 1$ est équivalent à $t = 1/12$.

La signification de la notation passe par le sens de l'opération.
Mais, au fait, à quoi sert l'inverse ?
A démonter des propriétés fort utiles pour la facilité des calculs, par exemple :
$(a \times b)/c = a \times (b/c)$, ce qui autorise à noter cela $a \times b/c$.
$a/(b \times c) = a/b/c$, déjà signalée.
$a \times b/c = a/c \times c = a/c \times c = a/c \times b$, qui exprime que l'on peut intervertir les **opérateurs** de multiplication et de division, ce qui simplifie certains calculs.

Ces propriétés sont faciles à comprendre dans des contextes numériques. Au niveau 5ème il est hors de question de les démontrer : ce serait trop «lourd» ; les élèves les intègrent sans problème, ce qui n'empêche pas de leur dire qu'ils pourront les démontrer rigoureusement plus tard.
Alors ne compliquons pas les choses inutilement :
$5 \times m = 3$ donc $m = 3/5$.
$t/7 = 2$ donc $t = 7 \times 2$.
$x/4 = 5/9$ donc $x = 4 \times 5/9 = 20/9$.
$3 \times y = 7/4$ donc $y = 7/4/3 = 7/(4 \times 3) = 7/12$.

Vous commencez sans doute à subodorer les raisons de mon titre... Mais je sais à quel tournant on m'attend : quand même, les fractions, pour les simplifications, c'est si commode de barrer les nombres qu'on retrouve en haut et en bas ! Justement, c'est trop souvent mal barré...
$k + a - (k + b) = a + k - k - b = a + 0 + b = a + b$: facile !
$k \times a/(k \times b) = a \times k/k/b = a \times 1/b = a/b$: difficile ?

Idem pour les produits des quotients :
$a - b + c - d = a + c - b - d = a + c - (b + d)$: pas de problème.
$a/b \times c/d = a \times c/b/d = a \times c/(b \times d)$: où est le problème ?

Uniquement dans la résistance au changement, comme d'habitude.
Il va de soi que je n'impose rien à mes élèves. Comme je sais qu'ils rencontreront des fractions, j'en utilise aussi. Je mélange même parfois les deux notations : ça ne les dérange vraiment pas et, quant à eux, ils choisissent les notations qu'ils préfèrent. Mais dès qu'il y a une erreur à démontrer, une difficulté à analyser, j'emploie l'écriture en ligne avec le «/», car elle oblige à expliciter et permet de suivre les étapes.

Pour en revenir à l'inverse, il ne devient vraiment indispensable que lorsqu'on veut «faire» des sommes de quotients. Après avoir étudié parallèlement les deux domaines d'opérations, il faut bien en arriver à les mélanger. On atteint ici un point crucial et lourd de conséquences : LE SEUL «pont» entre ces deux domaines est la distributivité de $\times$ sur $+$.
Avec des exemples numériques, renforcés par un changement de cadre géométrique (aires de rectangles que l'on juxtapose, aires de trapèzes), cette propriété est facilement comprise et sa généralité est admise sans la moindre réticence dès la

classe de 6ème. Mais sa richesse, sa puissance, sa portée ne sont pas numériques : elles sont algébriques. Car cette loi concerne non pas les nombres mais bien les écritures de nombres. Il est fondamental de comprendre qu'une écriture telle que $7m + 21$ n'est pas factorisable car elle ne rentre pas dans le cadre de la loi. Ce qui ne l'empêche pas d'être égale à une écriture qui, elle, est factorisable : $7 \times m + 7 \times 3$. Cette distinction évite bien des déboires.

La distributivité de $\times$ sur $+$ a des effets décisifs sur le calcul algébrique : on ne peut pas faire l'économie de leur étude sérieuse si l'on veut que l'algèbre devienne, pour les élèves, autre chose qu'un catalogue de «règles».

C'est en classe de 3ème qu'il faut mener cette étude solidement.

D'abord parce qu'elle répond à une attente : les élèves commencent à être noyés et à tout mélanger, d'où l'apparition de comportements régressifs : ils se fabriquent des recettes en désespoir de cause, car ils ont un besoin de cohérence (mal exprimé, évidemment, car ils n'ont pas les moyens de l'exprimer correctement). Ils perdent le fil, la cohésion, le sens.

Ensuite parce que on tient là de magnifiques occasions de faire des démonstrations simples et efficaces : les démonstrations ne sont pas le domaine réservé de la géométrie ! Ces démonstrations algébriques mettent en œuvre des méthodes générales qui permettent de comprendre comment on fait fonctionner un concept (par exemple celui d'opposé). Or le plus sûr moyen de chasser les recettes consiste à mettre en évidence que les méthodes sont plus intéressantes, plus éclairantes, plus fiables, plus rentables.

Enfin parce que les élèves sont parfaitement capables d'effectuer de telles activités et que cela les rassure. Même s'ils se trompent encore après, il suffit de réactiver le souvenir de la démonstration de la propriété mise en cause pour qu'ils comprennent la source de leur erreur et soient capables de la citer, de la raconter, ce qui est très important pour eux.

Les propriétés s'établissent en une chaîne de conséquences :

1. le comportement «pathologique» de zéro pour la multiplication : $m \times 0 = 0$.
 Donc zéro n'a pas d'inverse. Donc diviser par zéro n'a pas de sens.

2. Conséquences de cela :

a) pour qu'un produit soit égal à zéro, etc. ;

b) les trois écritures $t \times (-m)$; $(-t) \times m$; $-(t \times m)$ sont égales

INTERPRETATION : quand on remplace un facteur par son opposé, on obtient ...

Conséquence : $(-T) \times (-M) = \ldots = T \times M$.

Conséquence : si $M = T$, alors on obtient $(-T)^2 = T^2$. INTERPRETATION : ...

3. Conséquences du b) :

α) Les trois écritures $t/(-m)$; $(-t)/m$; $-(t/m)$ sont égales.

En particulier, l'inverse de l'opposé est l'opposé de l'inverse... avec en prime un joli changement de cadre géométrico-graphique le centre de symétrie de la courbe d'équation $y = 1/x$, pour élargir et structurer le champ conceptuel...

β) La multiplication est distributive sur la soustraction.

Voilà : une-demi-douzaine de très courtes démonstrations, et tout est en place pour qu'on sache à quoi se référer en cas de problème.

Mais que se passe-t-il avec la division ? Elle n'est pas distributive sur l'addition ! C'est bien dommage, mais c'est comme ça, on n'y peut rien : il va falloir apprendre à faire avec... Et on n'a pas le choix : il faut recourir à l'inverse car, dans notre malheur, on a quand même la chance que diviser par un nombre revienne à multiplier par son inverse.

Du côté droit, pas de difficulté :

$(t + m)/k = (t + m) \times (1/k) = t \times 1/k + m \times 1/x = t/k + m/k$. Je ne réécris pas cela en m'imaginant vous apprendre quelque chose, mais observons un exemple une source d'erreur «classique» : $(x + 2)/2$ désigne le quotient de $x + 2$ par 2. L'emploi de «/» oblige à écrire des parenthèses : je trouve cela très bien : c'est une sorte de garde fou. Cette écriture invite beaucoup moins à «barrer le 2» que celle utilisant le trait de fraction. Ce n'est pas qu'une «intime conviction» : je l'ai constaté.

D'autre part, il faudrait s'entendre sur les mots : comment peut-on transformer l'écriture d'une expression telle que $\frac{12x + 9}{6}$? Si l'on demande de la «simplifier», on induit l'envie d'écrire $2x + 9$. Veut-on transformer en somme le quotient $(12x + 9)/6$? Alors pourquoi ne pas demander de le développer, puisqu'il s'agit précisément de développer $(12x + 9) \times 1/6$? On peut m'objecter qu'il n'est pas possible de développer $6/(12x + 9)$ alors qu'on peut le simplifier. Objection retenue, mais, sans arguer du fait qu'une telle question ne se pose pas en collège, ce pourrait être une activité intéressante en seconde de chercher à quelle(s) condition(s) un quotient est «développable». Quoi qu'il en soit,
$6/(12x + 9) = 6/3(4x + 3) = 2/(4x + 3)$.

Nous, nous le savons : la division est distributive à droite, mais pas à gauche, sur l'addition. Je commence à me demander si le sujet ne vaudrait pas d'être abordé franchement en 3ème : lorsqu'on traite celle de $\times$ sur $+$, on omet la plupart du temps de se questionner à propos de celle de $+$ sur $\times$, qui fournit pourtant à peu de frais un beau contre-exemple. Idem après l'«extension» à la soustraction. De là à ce que les élèves s'imaginent que «ça marche à tous les coups»... A ce propos, justement, une petite «histoire vécue» il y a peu : j'avais donné comme exercice, en 3ème : démontrer que $1/(a \times b) = (1/a) \times (1/b)$. J'ai été très surpris de trouver fréquemment comme justification : c'est la distributivité. Sur le coup je me suis dit : zut ! ils n'ont rien compris... Et je m'en suis voulu de ne pas avoir exhibé les contre-exemples mentionnés ci-dessus. Mais en y regardant à deux fois je me suis rendu compte que cette «mauvaise réponse» révélait une excellente compréhension du fonctionnement de cette notion : effectivement, dans le cadre restreint de l'exercice proposé, «ça marche» !

Les «identités remarquables» ont encore un prestige certain, et toutes les «règles de calcul» s'expriment par des égalités. Il y a pourtant des non-égalités absolument remarquables, et qui mériteraient tout autant d'être institutionnalisées, des questions «naïves» qui mériteraient d'être posées : par exemple est-il possible (et, si oui, dans quelles conditions) que $a/b = b/a$, ou que $1/(a + b) = 1/a + 1/b$, ou que $(a/b)/c = a/(b/c)$?

Pour en finir avec la «distributivité à droite» de la division, remarquons que l'écriture a/m + b/m = (a + b)/m possède indéniablement le mérite de mettre en évidence la nécessité du diviseur commun pour pouvoir réécrire sous forme de quotient une somme de quotients, puisqu'elle dérive directement de a × 1/m + b × 1/m = (a + b) × 1/m. Quant à la critique, attendue, du risque de confusion entre distributivité à droite et à gauche, j'y répondrai, comme je l'ai déjà fait à une précédente occasion, en affirmant que ce n'est pas en ignorant les symptômes que l'on soigne une maladie : le risque existe assurément, donc il faut le traiter en connaissance de cause : la division n'est pas une opération commutative, et cette «non-propriété» a forcément des conséquences qui, même si elles ne sont pas «agréables», doivent être analysées et assumées.

Dernière critique à l'égard du trait de fraction : le fait qu'il «cache» une paire de parenthèses. Ce sous-entendu est la source de bien des malentendus (je devrais dire : des «mal-lire»). En 3ème les élèves sont encore loin de maîtriser l'usage des parenthèses, surtout lorsqu'il faut prendre l'initiative d'en rajouter, par exemple à l'occasion d'une substitution (si y = x - 3, alors -y = ?). On sait à quel point la présence d'un «signe moins» devant un trait de fraction, conjuguée à l'imprécision du graphisme, génère des «erreurs de signe». Le retour à la division, même s'il «alourdit» un peu l'écriture, a le mérite de la rendre parfaitement explicite : il y a suffisamment de possibilités d'erreurs sans rajouter ce qu'il faut bien appeler un piège.

Dernière remarque en faveur de «/» : la physique définit des «grandeurs quotients» dont les notations l'utilisent : km/h, m/s, etc.Dans sa trilogie d'article[1] sur *«le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège»* , Yves Chevallard a des mots très durs sur *«la réforme Chevènement et le triomphe de l'empirisme»,* stigmatisant *«l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques»*, et montrant comment *«l'insistance naïve sur le concret»* entraîne l'*«inversion des rapports entre théorie et réalité».*

A travers ses notations, le langage du calcul algébrique doit se constituer en outil et non en obstacle. Pour ce faire, la transparence de son fonctionnement doit être assurée et la cohérence de ses lois rendue manifeste : c'est une condition nécessaire pour qu'il cesse de devenir ce labyrinthe dans lequel les élèves paniquent et deviennent incapables de penser car ils perdent le fil du sens jusqu'à en perdre leur bon sens. Or, comme l'a magnifiquement dit Boris Cyrulnix : «Il n'y a pire agression que le non-sens».

---

[1] Petit x n° 5 - 1984, n 19 - 1989, n° 23 -1989-90.

DISTINCTIONS ET CORRESPONDANCES

DOMAINE ADDITIF		DOMAINE MULTIPLICATIF
addition	$\longrightarrow$	multiplication
somme	$\longrightarrow$	
terme	$\longrightarrow$	
zéro	$\longrightarrow$	
opposé	$\longrightarrow$	
soustraction	$\longrightarrow$	
différence	$\longrightarrow$	

Quels que soient les réels a,b,c, (a + b) + c = a + (b + c). Ce nombre peut alors être désigné par ... + ...+ ...	
Quels que soient les réels t et m, t + m = m + ...	
Quels que soient les réels truc, machin et K, SI truc = machin, ALORS truc + K = ___ ___	
Quel que soit le réel r, r + 0 = ___ (et r = ___+ r)	
Tout réel r admet un OPPOSÉ, désigné par − r , qui se lit "moins r". Deux réels sont opposés lorsque leur ___ est égale à ___. Donc pour tout réel r, − r + r = r + (___) = ___. Les six phrases suivantes sont équivalentes : k et u sont opposés ___ + ___ = ___ k est l'___ de ___ k = ___ u est ___ ___ = ___	Tout réel r (SAUF zéro, nous verrons pourquoi un peu plus loin) admet un ___ ___, désigné par 1/r ou $\frac{1}{r}$, qui se lit "un sur r". Deux réels sont ___ lorsque leur ___ est égal à ___. Donc pour tout réel r différent de zéro, ___ Les six phrases suivantes sont équivalentes : m et w sont ___ ___ x ___ = ___ m est ___ ___ m = ___ ___ est ___ ___ ___ = ___
L'opposé de − m , c'est ___. TRADUCTION : − (___) = ___ SI truc = machin , ALORS − truc = ___	___ TRADUCTION : 1/(___) = ___ ___

L'opposé d'une somme est la somme des opposés. TRADUCTIONS : − (T + M) = ___ − T + (− M) est l'opposé de ___ PREUVE : pour savoir si deux nombres sont opposés, on calcule leur ___ : − T + − M + ___ = ___ + ___ = ___	TRADUCTIONS : PREUVE : pour savoir si deux nombres sont ___, on calcule leur ___ :
La DIFFERENCE de k et de u, désignée par k − u, est le nombre qu'il faut additionner à u pour égaler ___. Si on l'appelle "d", on a donc : d = ___ est équivalent à ___ + ___ = ___ La SOUSTRACTION est l'opération qui, aux deux nombres k et u, fait correspondre le nombre ___. d $\underset{-u}{\overset{+u}{\rightleftarrows}}$ k d = k − u $\iff$ ___ + ___ = ___ $\iff$ u + ___ = ___ u $\underset{-d}{\overset{+d}{\rightleftarrows}}$ k $\iff$ u = ___ Finalement, on a trois égalités équivalentes : d = ___ k = ___ u = ___ Propriété fondamentale : lien entre soustraction et opposé 1°) Par définition, d = k − u $\iff$ ___ + ___ = ___ 2°) D'autre part on sait que si truc = machin, alors truc + chose = ___ Puisque d + u = ___, alors d + u + (− u) = ___ + (___) , et comme u + (− u) = ___ , on a donc d = ___ 3°) d = k − ___ et d = k + ___ , donc, finalement, k − u = ___ + ___ Autrement dit : Soustraire u, c'est additionner ___. Soustraire un nombre, c'est ___ son ___.	Le ___ de t et de m, désigné par ___, est le nombre qu'il faut ___. Si on l'appelle "q", on a donc : q = ___ est équivalent à ___ La ___ est l'opération qui, aux deux nombres t et m, fait correspondre le nombre ___ q $\rightleftarrows$ t ___ $\rightleftarrows$ t Finalement, on a trois égalités équivalentes : q = ___ t = ___ m = ___ Propriété fondamentale : lien entre ___ 1°) Par définition, 2°) D'autre part on sait que 3°) Diviser par m, c'est multiplier par ___ Diviser par un nombre, c'est ___ par son ___
Les nombres k − u et u − k sont ___. PREUVE : ___	Les nombres t/m et ___ sont ___ PREUVE :

TRADUCTIONS : k − u = −( ) et u − k = −( )

EGALITE et SOUSTRACTION :

SI truc = machin, ALORS truc − chose = −

<u>En particulier</u> :

Si truc = machin, alors truc − machin = —— − ——

autrement dit truc − machin = —

RECIPROQUEMENT, si truc − machin = 0 , alors —— = ——

FINALEMENT : truc = machin ⟺ —— − —— = —

<u>Règles de calcul découlant des propriétés précédentes</u> :

1°) a − (b + c) = a +(−(—)) = a + ( ) + ( )

= a − − −

Pour soustraire une somme, on peut soustraire successivement CHAQUE terme de cette somme.

2°) a − (b − c) = a − (b + (−c)) = a + (—) + —

= a − +

a − (b − c) = a + (−(—)) = a + −

3°) Simplification : a + u − (b + u) = + − − − — = ——

4°) Somme de deux différences :

a − b + c − d = + − − − = − + − −(——)

TRADUCTIONS :

EGALITE et :

SI truc = machin, ALORS

<u>En particulier</u> :

RECIPROQUEMENT,

FINALEMENT :

<u>Règles de calcul découlant des propriétés précédentes</u> :

1°) m/(kxt) = mx 1/(kxt) = mx( )x( )

=

Pour par un , on peut

2°) m/(k/t) =

=

m/(k/t) = mx 1/( ) = mx

3°) Simplification : mxk / (mxt) = x / / =

4°)

k/t x u/m = x / / = x /( )

5°) DANS LA PRATIQUE, IL FAUT SAVOIR AUSSI "COMPLIQUER" DES QUOTIENTS : exemple :

3/20 = 3x5/5/20 = 15/(5x20) = 15/100