PROPORTIONNALITE, AGRANDISSEMENT ET ECHELLE

Jean-Pierre LEVAIN
IREM de Besançon

Introduction

La plupart des recherches psychologiques concernant les notions de rapport et de proportion soulignent l'importance et la densité des travaux de Jean Piaget, tout en s'en démarquant sur un certain nombre de points : Piaget a longuement décrit et analysé les structures cognitives du sujet, il n'a pas suffisamment pris en compte la variabilité des situations ainsi que les différentes structures de problème. Sa perspective épistémologique l'a sans doute conduit à envisager le développement cognitif de manière très uniforme et globale.

La théorie piagétienne, et plus particulièrement l'organisation des différents stades, rend insuffisamment compte des difficultés persistantes rencontrées par un grand nombre d'élèves dès qu'ils doivent faire face à des rapports plus complexes qu'"un demi" ou "un quart".

Plus récemment, Kathleen Hart (1981), au cours d'une vaste enquête concernant des élèves de 13, 14 et 15 ans, a hiérarchisé quatre niveaux d'items. Elle montre que l'acquisition s'étend sur une longue période de temps et souligne l'hétérogénéité des performances à âge constant, ainsi que la difficulté, pour certains élèves, à dépasser une stratégie additive. Elle insiste également sur les conceptions implicites développées par les élèves et qui découlent souvent de généralisations tirées du domaine des entiers positifs ; par exemple la multiplication rend "plus grand", la division rend "plus petit, elle implique un grand nombre divisé par un petit etc...

Karplus, Pulos et Stage (1983) différencient quatre catégories de raisonnement dans une tâche de proportion :

1 - une utilisation mauvaise ou partielle des données de l'énoncé ;

2 - la mise en oeuvre d'une stratégie additive pure; les élèves raisonnent sur des différences qu'ils considèrent constantes, et non sur des rapports ;

3 - les élèves utilisent des stratégies mixtes, c'est à dire intégrant selon les données de l'additif et du multiplicatif; par exemple pour un problème du type :

" 4 gommes coûtent 6 francs. Combien coûtent 10 gommes ? " ,

ils peuvent décomposer 10 gommes en 4+4+2 gommes qui coûtent 6+6+3 francs donc 15 francs (stratégie de type "building up") ;

4 - enfin, les plus performants utilisent des approches construites à partir de la reconnaissance explicite de l'égalité de deux rapports.

Notre recherche porte sur la résolution de problèmes d'agrandissement et d'échelle du CM_2 à la fin de la troisième[1]. Ces situations d'agrandissement-réduction sont pour la plupart de nos élèves d'un usage courant (photos, posters, diapositives, zoom d'une caméra etc...). De même, la lecture de plan, ainsi que la distinction entre carte et territoire, renvoient à des pratiques sociales tout à fait banalisées (notice d'agencement de “légo”, construction d'un modèle réduit, choix d'un itinéraire, calcul du kilométrage etc...). Néanmoins beaucoup d'élèves (y compris parmi les plus âgés) ont de sérieuses difficultés à résoudre ce genre de problèmes.

Nous avons donc construit un questionnaire qui vise à faire avancer la recherche sur un certain nombre de points. Notre objectif est double :

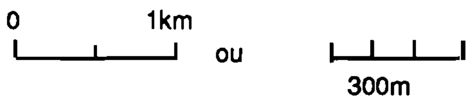
1 - explorer, sur une large période de temps, les compétences des élèves à résoudre des problèmes d'agrandissement et d'échelle ;

2 - analyser si la réussite ou l'échec renvoie à des profils spécifiques ainsi qu'à l'utilisation de stratégies de résolution particulières.

1. Description et passation du questionnaire

Notre questionnaire comporte 19 problèmes qui traitent des notions d'agrandissement et d'échelle. Antoine Bodin (1989) a déjà souligné l'ambiguïté du concept d'échelle trop rapidement considéré comme un objet mathématique à part entière. Il a souligné l'aspect imprécis, voire contradictoire, de certaines définitions et la relative polysémie du terme pouvant renvoyer à des représentations multiples. Nous retenons pour notre part, quatre types de présentation d'une échelle[2] :

- Echelle de type 1 : une représentation étant donnée, elle est accompagnée d'une indication du type : "1cm pour 2 km".
- Echelle de type 2 : une représentation étant donnée, elle est accompagnée d'un petit dessin du type :



- Echelle de type 3 : nous ajouterons pour certains problèmes une formulation du genre : "par quel nombre faut-il multiplier cette hauteur pour ...". Ces problèmes sont assez proches de ceux d'agrandissement; c'est l'aspect "outil" du concept d'échelle qui est ici mis en avant.
- Echelle de type 4 : une représentation étant donnée, elle est accompagnée d'une indication telle que : "échelle 1/5000".

Nous avons soumis notre questionnaire à 225 élèves appartenant à 5 classes de la fin du CM2 à la fin de la troisième (45 élèves par classe). Un seul problème est présenté par page afin que l'élève inscrive l'ensemble de ses calculs sur la feuille (les calculatrices sont autorisées). L'ordre de présentation des problèmes est aléatoire,

[1] Nous avons conduit cette recherche aux écoles primaires d'Ornans et des Vieilles Perrières; aux collèges Lumière et Stendhal. Nous remercions très sincèrement l'administration des collèges, les professeurs de mathématiques et bien sûr les élèves.

[2] Cet aspect a été plus particulièrement détaillé dans l'article d'Antoine Bodin:"Les échelles : préparation d'une situation d'enseignement en classe de cinquième" petit x n°20.

néanmoins tous les questionnaires commencent par les trois problèmes les plus simples de manière à ce qu'aucun élève ne soit d'emblée en échec. Deux problèmes purement additifs sont intercalés en troisième et onzième position afin de contrarier la prise de conscience éventuelle de l'uniformité de problèmes multiplicatifs[3] . Tous les élèves remplissent le même questionnaire; en ce sens les consignes insistent sur le fait qu'il existe à la fois des problèmes faciles et des problèmes difficiles, qu'un problème facile peut suivre un problème difficile ou inversement. Chacun est invité, après un temps d'analyse, à ne pas se bloquer sur les problèmes jugés insolubles.

2. Présentation des problèmes

Nous joignons en annexe une copie réduite des 19 problèmes : les problèmes n°1 à n°8 sont des problèmes d'agrandissement de type quatrième proportionnelle.

- Le n°1 permet la reconnaissance d'une réduction et d'un agrandissement, il constitue une introduction au questionnaire.

- Les n°2, 3, 4 et 5 combinent, à partir d'une situation d'agrandissement de figure, le type de rapport utilisé[4] (interne ou externe) et le degré de difficulté de ce rapport (simple ou complexe).

- Le n° 6, à travers la symétrie des nombres utilisés, invite à l'utilisation d'une stratégie additive[5] .

- Les n°7 et 8 permettent de comparer un agrandissement et une réduction, les rapports internes et externes sont identiques et respectivement égaux à 1,5 et 25.

Les problèmes n°9 à 19 utilisent explicitement le terme d'échelle (sauf, bien sûr, en ce qui concerne notre formulation de type 3 pour les n°12 et 14).

- Nous distinguons les problèmes qui portent sur le calcul de l'échelle comme le n°9 (formulation de type 4), le n°10 (passage d'une formulation de type 1 à une autre de type 4), le n°11 (passage d'une formulation de type 2 à une autre de type 4), le n°12 ("par quel nombre faut-il multiplier cette hauteur pour").

- Les n° 13 et 14 sont complexes d'un point de vue cognitif puisqu'il s'agit de calculer une échelle qui maximise la représentation (taille du plan) dans les limites d'une feuille 21 × 29,7 cm.

- Les n° 15 et 16 renvoient au calcul d'une dimension du représentant, c'est à dire du plan connaissant sa correspondance sur le terrain (échelle du type 4) : le n°15 utilise de petites valeurs numériques (50 m. et échelle : 1/100), le n°16 des plus grandes (76km et échelle: 1/200000).

- Les n° 17, 18 et 19 impliquent le calcul d'une dimension du représenté (calcul de l'image par la transformation); les n° 17 et 18 respectivement à partir de formulations de type 2 ou 4 (ces deux problèmes nécessitent d'effectuer une mesure à la règle), le n°19, uniquement à partir de l'échelle de type 4 et d'une dimension de la carte donnée dans l'énoncé.

---

[3] La diversité des problèmes proposés ainsi que le choix des valeurs numériques contrarient déjà largement la reconnaissance d'une structure multiplicative commune à l'ensemble des problèmes.

[4] Le rapport interne se calcule entre la longueur et la largeur d'un même rectangle. Le rapport externe correspond au rapport d'agrandissement.

[5] Nous nous sommes inspiré pour cette épreuve du célèbre problème de Karplus: "Mr Short and Mr Tall". A la surprise de son auteur ce problème était particulièrement mal réussi par les écoliers américains.

3. Analyse des résultats

L'observation du tableau 1 révèle une coupure entre deux séries de problèmes.

- Les premiers, et plus particulièrement du n°4 au n°8, sont des problèmes d'agrandissement de type recherche de la quatrième proportionnelle. La réussite à ces problèmes passe d'environ un quart (fin du CM_2)à trois quart des réponses (fin de 3ème). La réussite progresse donc de manière régulière en fonction de l'âge.

- Du n°9 au n°19, la progression de la réussite n'est plus du tout régulière. Elle concerne toujours, à la fin du CM2, le quart des réponses mais les progrès deviennent très faibles, voire inexistants (par exemple les résultats aux problèmes n° 10, 11 et 16).

Les problèmes d'échelles qui impliquent de calculer le passage d'une écriture de type 1 ou 2 à une écriture de type 4 sont particulièrement complexes et largement échoués (taux de réussite .33 et .22 à la fin de la troisième au n° 10 et 11). Le calcul de l'échelle connaissant une dimension du plan et sa correspondance sur le terrain n'est réussi que par 40% de ces mêmes élèves. Par contre, ils sont 53% à réussir avec une formulation du type :"par quel nombre faut-il multiplier la hauteur pour...". Le calcul d'une échelle (de type 4) reste d'une manière générale, une opération complexe échouée par près des deux tiers des élèves.

- Le calcul de l'antécédent, c'est à dire d'une dimension sur le plan connaissant sa correspondance sur le terrain et l'échelle est tout aussi difficile (taux de réussite de .39 et .31 pour les problèmes n°15 et 16).

Problèmes	CM2	6e	5e	4e	3e	Total
n°1	.49	.51	.67	.69	.87	.65
n°2	.96	.96	1	1	1	.99
n°3	.91	.96	1	1	.93	.96
n°4	.18	.42	.56	.78	.78	.54
n°5	.20	.47	.64	.73	.73	.55
n°6	.16	.29	.56	.60	.71	.46
n°7	.40	.47	.82	.82	.91	.68
n°8	.27	.29	.80	.73	.84	.59
n°9	.27	.33	.36	.36	.40	.34
n°10	.31	.20	.36	.33	.33	.31
n°11a	.16	.16	.31	.29	.22	.23
n°12a	;16	.42	.53	.53	.53	.43
n°13a	.02	.07	.09	.18	.09	.09
n°14	.02	.04	.11	.22	.22	.12
n°15	.18	.33	.49	.42	.51	.39
n°16	.31	.13	.38	.42	.33	.31
n°17	.13	.44	.44	.38	.58	.39
n°18	.38	.36	.56	.44	.58	.46
n°19	.44	.33	.56	.29	.53	.43

Tableau 1 : taux de réussite aux différents problèmes[6].

[6] Les problèmes n°9 et 10 sont tirés du vaste travail d'évaluation du programme de cinquième mené par l'APMEP. Les résultats concernant un vaste échantillon d'élèves de cinquième sont très proches des nôtres: respectivement 39 et 34% de réussite contre 36 et 36% dans notre épreuve.

- Le calcul d'une dimension sur le terrain connaissant à la fois sa correspondance sur le plan et l'échelle semble un peu plus aisé ; il reste cependant échoué par une bonne moitié des élèves (problème n° 17, 18 et 19). Nous retrouvons à nouveau une progression plus régulière entre les élèves du CM2 et ceux de troisième (du moins en ce qui concerne les problèmes n°17 et 18).

- les problèmes n° 13 et 14 se présentent comme étant les plus difficiles (les taux de réussite sont respectivement de .9 et .22 à la fin de la troisième). Ces deux problèmes sont, sur le plan cognitif, à la fois complexes et peu familiers aux élèves ; il s'agit en effet de calculer un rapport d'agrandissement qui maximise la taille d'un plan par rapport à la dimension d'une feuille 21x29,7cm. On sort donc du cadre traditionnel où l'élève doit calculer une transformation en connaissant son image et son antécédent ; il y a sans doute ici des effets de rupture du contrat didactique tel qu'il a été défini par Guy Brousseau.

4. Analyse factorielle des données

Nous avons traité nos données en deux étapes : tout d'abord une analyse factorielle des correspondances, ensuite une classification ascendante hiérarchique à partir des résultats de l'analyse factorielle[7]. La lecture de l'arbre hiérarchique nous permet de distinguer cinq groupes traduisant en terme d'échec ou de réussite une proximité entre un ensemble de sujets et certains problèmes. La composition de ces groupes est synthétisée dans le tableau 2.

Le groupe E ne réussit que très peu de problèmes, le groupe D peut être considéré comme un sous-ensemble de E : les problèmes d'agrandissement, mis à part les trois premiers, sont systématiquement échoués (le détail des résultats apparaît dans le tableau 3).

Groupes	Problèmes	Sujets
E	n°1 , 2, et 3	54 sujets : CM2 : 18 ; 6° : 14 ; 5° : 9 ; 4° : 7 ; 3° : 6.
D	Aucun	16 sujets CM2 : 9 ; 6° : 5 ; 5° : 1 ; 4° : 1 ; 3° : 0.
C	n° 4, 5, 6, 7 et 8	76 sujets CM2 : 4 ; 6° : 10; 5° : 15 ; 4° : 11 ; 3° : 12.
B	n° 9, 10, 11a, 15, 15, 18, 19	62 sujets CM2 : 14 ; 6° : 10; 5° : 15 ; 4° : 11 ; 3° : 12.
A	n° 12a, 13a, 14, et 17	17sujets CM2 : 0 ; 6° : 2 ; 5° : 4 ; 4° : 7 ; 3° : 4.

Tableau 2 : composition des cinq groupes.

[7] Logiciel ANACONDA Laboratoire "Mathématique Informatique et Statistique" Université de Franche Comté.

Le groupe C réussit massivement les problèmes d'agrandissement de type recherche de la quatrième proportionnelle ; par contre il échoue largement à l'ensemble des problèmes d'échelle. Ce n'est pas uniquement la construction de la notion d'échelle, c'est à dire la constitution comme "objet" d'un rapport externe de type 1/n où n est grand qui est source d'erreurs, mais aussi la nécessité d'harmoniser les unités entre numérateur et dénominateur dans le calcul d'un rapport. Le caractère trop systématique des erreurs d'unité ne permet plus de les considérer comme de simples défauts d'inattention.

Le groupe B réussit bien les problèmes d'échelle les plus classiques (n°9, 10, 11, 15, 16, 18 et 19), mais échoue assez massivement quand il doit faire face à des problèmes moins familiers; ce groupe souffre d'une légère faiblesse concernant les problèmes d'agrandissement type quatrième proportionnelle (taux de réussite de .65).

Problèmes : Groupes :	1, 2 , 3	4, 5, 6, 7, 8	9, 10, 11a, 15 , 16 18, 19	12a, 13a, 14, 17
A	.92	.82	.52	.70
B	.89	.65	.71	.34
C	.86	.80	.23	.15
D	.83	0	0	0
E	.83	.23	.17	.06

Tableau 3

Enfin le groupe A réussit bien l'ensemble des problèmes avec une baisse de performance concernant les problèmes d'échelle les plus classiques. Pour schématiser, nous pouvons dire que le groupe B "souffre" d'un déficit dans la mise en oeuvre du raisonnement proportionnel; le groupe A ayant plutôt quelques lacunes concernant la notion d'échelle[8] .

L'arbre de classification hiérarchique nous permet de positionner assez globalement les différents groupes par rapport à nos trois axes factoriels (voir le schéma n°1, mais aussi le tableau 3).

L'axe principal traduit, à travers une dimension réussite-échec, la capacité des élèves à utiliser efficacement des rapports complexes. Il oppose les groupes E et D à l'ensemble des autres groupes.

L'axe 2 oppose le groupe C aux groupes B et A, il traduit le passage délicat des problèmes d'agrandissement aux problèmes d'échelle, c'est-à-dire deux choses :

- le passage d'une forme “outil” à une forme “objet” à travers l'objectivation du rapport d'agrandissement comme échelle.
- Les difficultés liées à la gestion des unités dans le calcul du rapport.

[8] Ce groupe A est capable de résoudre les problèmes les plus complexes, à l'école, il sera néanmoins considéré comme moins performant que le groupe B. Comment expliquer que ce groupe qui maîtrise le mieux le raisonnement proportionnel ait autant de difficultés avec les problèmes d'échelle les plus classiques?

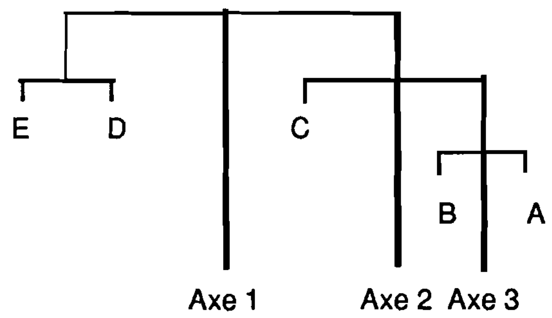


schéma 1 : positionnement des groupes par rapport aux axes

L'axe 3 distingue le groupe B du groupe A, il rend principalement compte d'une capacité à traiter des problèmes à la fois peu familiers et complexes.

5. Analyse des stratégies de résolution

Une analyse systématique des différentes procédures de résolution, problème par problème, déborderait le cadre de cet article ; par contre il nous paraît pertinent de repérer les principales stratégies utilisées à l'intérieur des groupes que nous avons différenciés afin d'en préciser les caractéristiques cognitives essentielles.

Le groupe D se compose seulement de 16 sujets (dont 9 de CM_2 et 5 de 6ème). Les élèves de ce groupe échouent à l'ensemble des problèmes qui impliquent un rapport d'agrandissement plus complexe que du simple au double. C'est le caractère à la fois massif et systématique de l'échec qui est ici caractéristique (100% d'échec du problème n°4 au n°19).

Les problèmes d'agrandissement n° 4, 5 et 6 sont traités exclusivement avec des stratégies additives. Le taux de non réponses est d'environ 50% pour l'ensemble des autres problèmes. Les procédures de résolution restent étrangères à la structure mathématique des problèmes. Ces élèves semblent programmer des suites d'opérations en s'appuyant sur un ensemble d'indices non pertinents, par exemple : deux entiers du même ordre de grandeur entraînent une addition ou une soustraction, un grand et un petit une multiplication ou une division etc...

Le groupe E se compose de 54 élèves, il apparaît dans de nombreuses recherches sur la proportionnalité (Karplus, Hart etc...). Il est constitué de sujets majoritairement additifs (plus de 75% de stratégies additives aux problèmes n° 4, 5 et 6. 59% des élèves de ce groupe sont au CM_2 ou en sixième, 25% en 4ème ou 3ème.

En ce qui concerne les problèmes d'échelle, le profil est assez proche du groupe D : un taux important de non réponses de l'ordre de 50%, une grande diversité des stratégies qui exclut a priori l'émergence de profils d'erreur. Ces élèves ont de grosses difficultés de compréhension qui, probablement, débordent le thème traité. Le manque de sens accordé aux opérations renvoie à toute une série d'invariants qui sont mal reconnus (ici par exemple, le fait que les rapports d'agrandissement restent constants qu'elle que soit la dimension sur laquelle on raisonne).

A la différence du groupe D, quatre problèmes sont assez bien réussis. Le caractère multiplicatif des problèmes n°7 et 8 est mieux reconnu (respectivement 50% et 39% de réussite). Les problèmes 18 et 19 (calcul de l'image par la transformation) sont respectivement réussis par 28% et 35% des élèves. Malheureusement le n° 17, où l'échelle présentée est de type 2 et qui nécessite à la fois une mesure de la représentation graphique de l'échelle afin de rendre opératoire un rapport d'agrandissement et une mesure sur le plan, n'est plus réussi que par 5% des élèves. Il convient de souligner le caractère "scolaire" des problèmes n° 18 et 19, ainsi que le fait qu'ils font appel à une multiplication d'un grand nombre par un "petit" ; ce qui est très cohérent avec les théories implicites développées par ces élèves.

Le groupe C comprend 75 sujets, c'est le plus important de notre échantillon ; il est composé à 55% d'élèves de troisième et de quatrième. Ce groupe est assez étonnant, il réussit très largement les problèmes d'agrandissement de type quatrième proportionnelle (80% de réussite aux problèmes n°4 à 8). Il se démarque par l'utilisation massive de stratégies multiplicatives (73% de réussite au problème n°6). Néanmoins, il échoue tout aussi largement à l'ensemble des problèmes d'échelle (seulement 19% de réussite des problèmes n°9 à 19).

La construction du concept d'échelle constitue bien un véritable obstacle épistémologique difficile à franchir, y compris pour de grands élèves de collège (38% de non réponses pour les problèmes n°9 à 19 au lieu de 7% pour les n°4 à 8). Ce constat peut sembler surprenant dans la mesure où ces élèves privilégient, dans un problème d'agrandissement, le rapport externe même s'il entraîne des calculs beaucoup plus lourds (au n°4 par exemple, 67% des élèves calculent le rapport externe 5/3 et 14% seulement le rapport interne 1/2).

L'importance des non réponses suggère d'éventuelles difficultés à objectiver la notion d'échelle (passage d'un concept outil à un concept objet). Les erreurs dans la gestion des unités constituent néanmoins la première source d'erreurs (par exemple, 36% de réponses 1/5 au problème n°9 ; au n° 12, si on ne tient pas compte des erreurs d'unités, on retrouve le même taux de réussite qu'aux problèmes d'agrandissement).

Certains effets “pervers” du fonctionnement de l'élève en situation de lecture de plan peuvent être avancés. Beaucoup ont en effet tendance à lire le plan dans les termes mêmes du signifié et non dans ceux du signifiant (par exemple, ils comptent sur la carte directement en kilomètres).

Le groupe B comprend 62 sujets, chaque classe y est représentée de manière sensiblement équivalente. Ces élèves sont performants et généralement considérés comme de bons élèves, ils réussissent au mieux les problèmes d'échelle (71%) et semblent avoir automatisé une stratégie canonique de résolution, par exemple :

- 71% de réussite au n°9 (le plus souvent : 1/500, car 5000: 10)
- 82% au n°10 (1/50000, car 100000 : 2)
- 52% au n°11 (1/2500, car 5000 : 2)
- 84% au n°19 (exclusivement : 38 × 200000).

En ce qui concerne l'ensemble de ces problèmes (n°9, 10, 11, 15, 16, 18 et 19), les non-réponses et les erreurs d'unités s'équilibrent à un niveau assez bas (10 et 11%). Ce groupe B ne réussit cependant pas à l'ensemble des problèmes d'échelle. On peut en effet relever une chute des performances aux problèmes n°12, 13, 14 et 17 (seulement 34% de réussite). Face à des problèmes complexes, comme les n° 13 et 14, un grand nombre de ces élèves s'abstient (68% de non-réponses); une "régression" des stratégies peut être observée (retour à des procédures additives de type périmètre, proposition de deux rapports un pour la longueur et un pour la largeur, calcul d'un rapport à partir des aires etc.).

Les élèves du groupe B réussissent mieux à calculer une échelle sous sa forme fractionnaire (type 4), plutôt que de déterminer un coefficient multiplicatif d'agrandissement (type 3). Ce groupe se caractérise également par une relative faiblesse concernant les problèmes d'agrandissement vis à vis des problèmes d'échelle (l'âge moyen du groupe B est plus jeune que pour les groupe A et C[9].

Le groupe A comprend 17 élèves, la plupart appartiennent aux classes de quatrième et de troisième (64%). Ce groupe réussit les problèmes n°12, 13, 14 et 17 à 70%, et les problèmes d'agrandissement de type quatrième proportionnelle à 82%. La baisse de performance aux problèmes d'échelle les plus classiques (voir tableau n°3) s'explique presque exclusivement à partir d'erreurs dans la gestion des unités, par exemple :

- 35% de réponses 1/5 au problème n°9.
- 53% de réponses 1/25 au n°11.
- 30% de réponses 0,00038 cm au n°16.

Compte non tenu de ces erreurs d'unités, on retrouve des performances équivalentes entre les problèmes d'échelle et ceux d'agrandissement.

Ce groupe A nous semble plus proche du groupe C que du B pour plusieurs raisons:

- l'âge des élèves est équivalent.
- Ce groupe a bien réussi à objectiver le concept d'échelle, mais gère encore très mal les unités; ces élèves sont souvent confus quant à la nécessité de différencier les unités du signifié et celles du signifiant.

Conclusion

Notre étude nous permet de différencier cinq groupes d'élèves au profil cognitif très différent. Elle met en évidence plusieurs niveaux de difficulté concernant la maîtrise des situations d'agrandissement et l'acquisition du concept d'échelle :

- **Schèmes** : Certains élèves ne maîtrisent pas les schèmes essentiels de la proportion. Nous trouvons en effet de nombreuses procédures qui ne sont pas organisées de manière invariante autour du calcul d'un rapport, stratégies additives par exemple ou suite de calculs programmée par des indices non pertinents (taille des nombres etc...).
- **Concept outil et concept objet** : A travers la maîtrise d'un ensemble de situations d'agrandissement, le concept de rapport devient un outil de pensée bien avant de pouvoir être objectivé en terme d'échelle. Assez peu d'élèves conceptualisent l'échelle comme caractéristique essentielle d'un signifiant dans son rapport au signifié, si ce n'est sous des formes stéréotypées du type: "un centimètre sur le plan représente x centimètres sur le terrain". Le recours presque exclusif au produit en croix comme algorithme de résolution rend plus délicat l'objectivation du rapport d'agrandissement ainsi que la compréhension de problèmes plus complexes.
- **La gestion des unités** : Beaucoup d'élèves, dans le calcul du rapport, n'harmonise pas les unités entre numérateur et dénominateur. Ce phénomène semble

[9] Ce groupe qui comprend aussi des sujets jeunes est bien entendu le plus susceptible de progresser en ce qui concerne les problèmes d'agrandissement (nous avons vu que la réussite à ces problèmes dépend de l'âge des sujets).

trop massif pour être uniquement attribué à des oublis ou à de l'inattention. Dans leur fonctionnement, de nombreux élèves lisent le plan dans les termes mêmes du signifié et non dans ceux du signifiant. En ce sens un travail sur les signifiants (différents choix possibles en fonction de l'utilisation prévue, passage d'un système d'écriture à un autre etc....) nous paraît tout à fait essentiel.

- **La spécificité des problèmes et des situations** : D'un problème à l'autre, le sujet mobilise très diversement un certain nombre de paramètres: l'analyse du tracé, les différentes mesures géométriques, la nature des variables et les calculs numériques qui sont impliqués, l'objectivation de l'échelle, le contrôle des unités. Le poids relatif de ces différents facteurs contribue sans doute à une plus ou moins grande charge cognitive dans l'exécution de la tâche.
- **Le concept d'échelle** : Nos données plaident en faveur d'une présentation précoce du concept d'échelle (le groupe B est un groupe jeune). Néanmoins il ne va pas de soi qu'un élève sachant résoudre un ensemble de problèmes multiplicatifs puissent directement traiter des problèmes d'échelle.

Il nous paraît nécessaire d'introduire ce concept à partir de situations simplifiées (petites valeurs numériques, rapports d'agrandissement simples), mais suffisamment diversifiées de manière à proposer à l'élève une présentation plus systématique des différents problèmes (par exemple, utilisation de l'ordinateur dans une perspective de mise en page avec agrandissement et réduction de différents documents, utilisation sociale des informations issues de la lecture ou du calcul sur le plan, variation possible des signifiants en fonction de l'utilisation prévue etc.).

Bibliographie

BODIN, A., Les échelles: préparation d'une situation d'enseignement en classe de cinquième, *Petit x,* n°20, pp 35-44.

BROUSSEAU, G., Le contrat didactique: le milieu, *Recherches Didactique des Mathématiques,* v.9/3

DOUADY, R., Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 7/2., pp 5-31.

EVAPM., 1988, *Evaluation du programme de mathématiques,* classe de cinquième, APMEM (éd), IREM de Besançon.

HART, K.M., 1981, *Children Understanding of Mathematics,*J. Murray, London.

HART, K.M., 1988, Ratio and Proportion, in Hiebert, J. and Behr, M (Ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Hillsdale, N.J: Erlbaum/Reston, VA: National Concil of Teachers of Mathematics, 198-219.

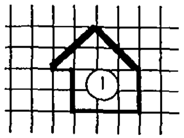
INHELDER, B., Piaget, J., 1955, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent,* P.U.F, Paris.

KARPLUS, R., Pulos, S. and Stage, E.K., 1983a, Early adolescents' proportional reasoning on rate problems, *Educational Studies in Mathematics* 14, 219-234.

KARPLUS, R., Pulos, S. and Stage, E.K., 1983b, Proportional reasoning of early adolescents, in Lesh, R. and Landau, M (Ed.), *Acquisition of Mathematics Conceps and Processes,* Academic Press, New york, 45-90

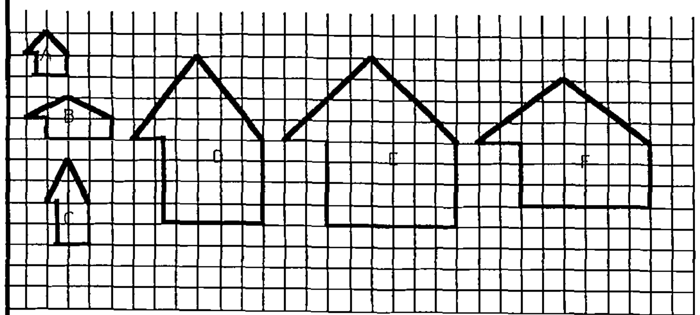
VERGNAUD, G., La théorie des champs conceptuels, *RDM,* vol 10/ 2.3, pp. 133-169.

1

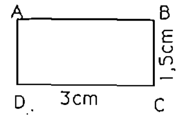


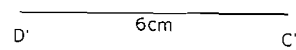
Parmi les dessins A, B, C, D, E et F ci-dessous, lesquels sont des agrandissements ou des réductions du dessin n° 1 ?

Entoure les lettres correspondantes et barre les autres.



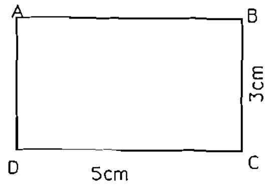
2

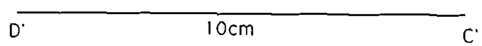




Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

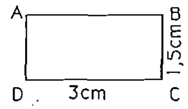
Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

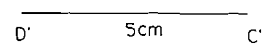




Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

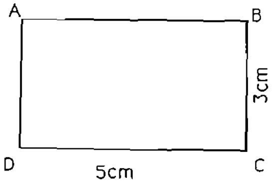


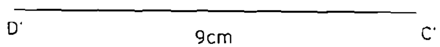


Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

5

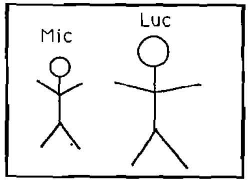




Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

6



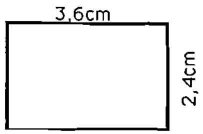
Sur une photo, Mic mesure 4cm
et Luc 6cm.
Après agrandissement de la photo,
Mic mesure 6cm.

Combien Luc mesure-t-il sur la photo agrandie?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

7



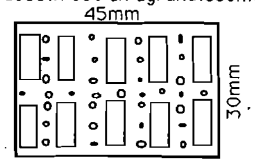
Une diapositive est un rectangle de pellicule qui mesure 3,6cm de longueur et 2,4 cm de largeur.
Quand elle est projetée sur un écran, cette diapositive a pour longueur 90cm.
Quelle est sa largeur?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

8

Ce dessin est un agrandissement d'un petit circuit électrique:



Sur le dessin, ce circuit de forme rectangulaire mesure 45 millimètres de longueur èt 30 millimètres de largeur.

La longueur réelle du circuit est de 1,8 millimètres.
Quelle est sa largeur?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

Un mur de 50m de long est représenté sur un plan par

un segment de 10cm.

Quelle est l'échelle de ce plan?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

Sur une carte on peut lire: "2 centimètres pour 1 kilomètre"

Quelle est l'échelle de cette carte?

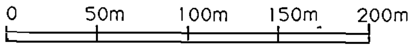
Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

11

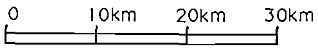
Sur deux cartes, on a relevé les indications suivantes:

Ecris pour chaque cas l'échelle correspondante:



Ecris tes calculs:

Echelle:



Ecris tes calculs:

Echelle:

12

Un architecte a réalisé la maquette d'un nouveau quartier. Sur cette maquette, un immeuble de 25m de haut est représenté par une petite boîte d'allumettes de 5cm de hauteur.
Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:
(tu peux faire les changements d'unité que tu désires).

Le mur qui borde le parking de cet immeuble mesurera 70m.
Quelle est sa longueur sur la maquette?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

13

Imagine une chambre idéale et donne ses dimensions:
Cette chambre mesure ....mètres de long et ....mètres de large.

Calcule une échelle qui te permette de représenter cette chambre sur une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7cm).
Le plan doit être le plus grand possible:

Echelle de cette chambre: [ ]

Même exercice pour une mouche qui mesure 1,2 centimètres de long et 0,5 centimètres de large:

Echelle de cette mouche: [ ]

14

Tu veux faire le plan d'une classe de chimie qui mesure 14 mètres de long et 9 mètres de large.
Par combien dois-tu diviser les dimensions de cette classe pour la représenter sur une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7cm)?
(le plan doit être le plus grand possible)

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre: [ ]

15

Un jardin rectangulaire mesure 50 mètres de long et 30 mètres de large.

On représente ce jardin par un dessin à l'échelle $\frac{1}{100}$.

Quelle est la longueur du jardin sur ce dessin?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

16

A vol d'oiseau, 76 kilomètres séparent Besançon de Montbéliard.

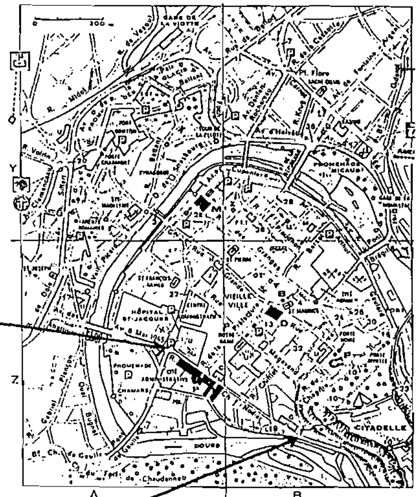
La carte Michelin de Franche Comté est à l'échelle: $\frac{1}{200\,000}$.

Combien de centimètres séparent, sur cette carte, Besançon de Montbéliard?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

Voici un plan de la ville de Besançon:



Début de la rue C. Nodier

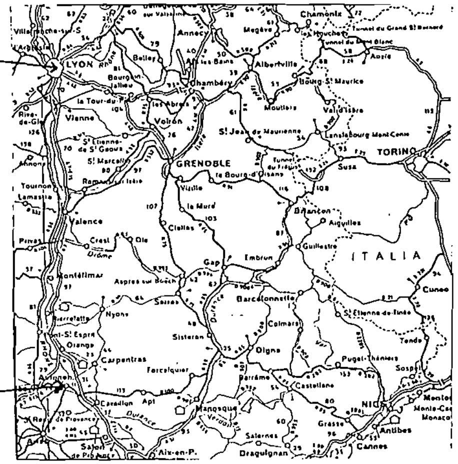
Fin de la rue C. Nodier

Quelle est, sur le terrain, la longueur en mètres de la rue Charles Nodier?

Ecris ta réponse dans le cadre:

Cette carte du guide Michelin est à l'échelle $\frac{1}{3\,000\,000}$:

Lyon



Avignon

Combien de kilomètres séparent Lyon d'Avignon à vol d'oiseau?

Ecris ta réponse dans le cadre:

19

Pierre regarde une carte Michelin à l'échelle $\frac{1}{200\ 000}$.

Sur cette carte, il mesure 38 centimètres de Besançon à Paris.

Combien de kilomètres séparent Besançon de Paris à vol d'oiseau?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre: