DES «PROBLEMES OUVERTS» DANS NOS CLASSES DE PREMIER CYCLE

Recherche de l'équipe sur le problème de l'IREM de LYON

Gilbert ARSAC
Université de Lyon 1
Michel MANTE
Collège J. Vilar, Villeurbanne

INTRODUCTION ET CONTENU DE L'ARTICLE.

Depuis longtemps, on a conscience du fait que le choix des problèmes que l'on pose en mathématiques, et le rôle qu'on leur fait jouer dans l'enseignement sont liés aux conceptions, souvent non explicites, que l'on a des mathématiques, de la relation au savoir en général et de la relation entre enseignant et enseigné (voir [1]).

L'article qui suit est consacré pour l'essentiel à la description d'une pratique pédagogique, que nous avons appelée pratique du «problème ouvert». Cette pratique a été élaborée et expérimentée dans le cadre de l'IREM de LYON depuis quelques années. Elle a fait l'objet d'une présentation lors du colloque national sur le problème organisé par cette même équipe à Lyon en 1982 et qui a réuni 150 participants [2].

Nous souhaitons que la lecture de cet article vous incite à pratiquer le «problème ouvert» dans vos classes, et à nous faire part de vos expériences. C'est pourquoi les deuxième et troisième parties sont consacrées à la description détaillée du déroulement de séances de recherche de «problème ouvert» dans une classe, et des constatations que nous avons faites à cette occasion. Notons que les classes où s'est déroulée l'expérience sont des classes «courantes», c'est-à-dire n'appartenant ni à un établissement expérimental ni à un établissement réputé pour son bon niveau, et que l'activité était proposée par l'enseignant. L'expérience est donc reproductible sans conditions particulières.

* participent à cette équipe en 1982-83 :

Gilbert ARSAC, Gilles GERMAIN (Université Lyon 1) ; Dominique PICHOD (Psychologie, IREM de Lyon) ; Michel GONNARD (Lycée Colbert, Lyon 8) ; Michel MANTE (Collège Jean Vilar, Villeurbanne)

«petit x», n°2, pp. 5 à 33, 1983

Les première et quatrième parties ont un caractère plus théorique encore que fort modeste : la première partie décrit brièvement la conception des mathématiques sous-jacente à la méthode, la quatrième partie expose quelques conclusions et indique les questions que nous nous posons.

On trouvera, en annexe, des problèmes ouverts directement exploitables dans le premier cycle et une grille de rapport d'expérimentation de problèmes ouverts.

PREMIERE PARTIE :

«LES PROBLEMES OUVERTS» ET LES AUTRES...

Le travail fait sur «le problème dans l'enseignement» à l'IREM de LYON se définit par comparaison avec des travaux analogues mais visant des buts différents :

— «l'enseignement par le problème» qui vise à faire acquérir certaines notions mathématiques au moyen de problèmes choisis à cet effet (soit problèmes d'application, soit même problèmes de découverte visant à introduire une notion nouvelle) ;

— l'initiation à la modélisation qui vise à entraîner les élèves à transformer un problème concret en problème mathématique. L'accent est mis ici sur la transformation du problème concret en problème abstrait, souvent facile à résoudre (Cf. tous les problèmes de modèles mathématiques pour des jeux).

Dans la définition par l'équipe lyonnaise du «problème ouvert» se trouve plus ou moins explicitement exprimé un but différent, que l'on peut formuler ainsi : placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur.

L'«enseignement par le problème» sous-entend que les mathématiques sont une science constituée, à laquelle on s'initie sous la conduite d'un maître (ou d'un livre).

L'initiation à la modélisation sous-entend que les mathématiques sont un outil pour résoudre des problèmes pas nécessairement mathématiques (mathématiques au service de la physique, de la biologie, de l'économie, etc...).

La pratique que nous proposons considère les mathématiques comme une science vivante, qui a son développement propre, et sa logique propre.

Naturellement, ces trois points de vue ont leur part de vérité et il nous semble souhaitable qu'ils coexistent dans l'enseignement, cependant, si l'on interroge les élèves, et même les enseignants, on constate souvent que seuls les deux premiers sont pris en compte et transmis (en général implicitement). Par exemple, les élèves (et les professeurs) n'arrivent pas à imaginer en quoi peut bien consister la recherche en mathématiques (il reste des choses à trouver ? Les professeurs ne savent pas tout ?). Beaucoup pensent que les mathématiques se sont développées uniquement à partir des applications (ce qui est historiquement faux, y compris à l'époque contemporaine).

Enfin, la recherche d'un problème se résume trop souvent à trouver le chapitre du cours d'où il est extrait.

Venons-en maintenant à une tentative de définition du «problème ouvert», que le lecteur attend... . La version que nous en donnons ci-dessous tient compte des remarques faites par certains participants au «colloque sur le problème» et des réflexions ultérieures de l'équipe.

Nous appelons **problème ouvert** un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

— énoncé court ;

— l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire ni de problème du genre «montrer que»). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats présentés en cours ;

— le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement «possession» de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.

Avant de commenter quelques exemples, notons tout de suite que cette définition n'est que relativement originale : on trouvera des définitions analogues ailleurs, par exemple dans le «livre du problème» [3] de l'IREM de Strasbourg où ce qui est appelé «problème» est voisin de ce que nous appelons «problème ouvert» et où une classification plus fine est proposée. On trouvera aussi un brillant compte rendu d'une séance de «problème ouvert» devant 200 personnes, menée par S. LANG dans [4] et [5].

En fait nous nous différencions du «livre du problème» en ce que nous proposons une pratique systématique du «problème ouvert» en classe alors que, pour les auteurs de cet ouvrage (page 20) :

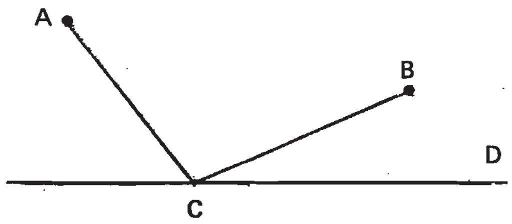
> «La recherche de problèmes n'est pas une activité scolaire compatible avec des horaires stricts, réalisée en temps limité...
>
> Il s'agit donc d'une activité libre, à laquelle on se livre par goût d'une façon désintéressée. On comparera le statut du problème, dans l'enseignement des mathématiques, à la lecture des œuvres littéraires, ne figurant pas au programme, dans l'enseignement du français.
>
> Le maître sèmera, de temps en temps, des idées de problèmes dans l'espoir de récolter un comportement de recherche. Mais lorsque l'Inspecteur viendra passer vingt minutes dans la classe, il n'apercevra pas ce qui germe dans la tête des enfants, et il ne pourra juger si l'initiative du professeur est sur le point de porter ses fruits. Ainsi, s'agit-il aussi pour le maître d'une activité gratuite, à laquelle il n'est pas réglementairement astreint».

Nous ne demandons pas que notre pratique devienne une obligation réglementaire, mais une possibilité reconnue.

QUELQUES COMMENTAIRES SUR LA DEFINITION DU PROBLEME OUVERT.

Remarquons tout d'abord que certaines des contraintes imposées dans la définition sont visiblement liées à la situation d'enseignement : il en est ainsi de la brièveté de l'énoncé et du choix du domaine conceptuel.

D'autre part, un même problème peut, suivant son énoncé, et suivant le moment où on le pose, conduire à un problème «ouvert» ou «fermé» ou donner lieu à un problème de modélisation préalable. Considérons par exemple le problème suivant, bien classique du point de vue mathématique :



On donne une droite **D** et deux points **A** et **B** situés dans un même demi-plan par rapport à **D**. Existe-t-il un point **C** de **D** tel que le trajet **ACB** soit minimum ?

Cet énoncé, auquel on peut donner éventuellement une forme plus concrète, peut constituer un problème ouvert dans les classes de quatrième ou troisième. Mais il donnera évidemment lieu à un problème «fermé» si l'on transforme la fin de l'énoncé sous la forme :

> «Montrer que le trajet **ACB** est minimum quand **C** est à l'intersection de **D** avec la droite joignant **B** au symétrique de **A** par rapport à **D**».

Il donnera également lieu à un problème fermé s'il est proposé après un cours sur la symétrie. Cet énoncé peut aussi servir à la modélisation d'une situation d'optique géométrique (réflexion de la lumière, principe de MAUPERTUIS).

De même, la frontière entre problème ouvert et problème de découverte n'est pas toujours nette. Ainsi de l'énoncé suivant qui peut servir aux deux usages :

> «Etant donné 3 nombres positifs, existe-t-il un triangle dont les côtés aient pour mesure ces 3 nombres ?».

Cet exemple montre aussi qu'une situation mathématique très classique peut donner lieu à un problème ouvert.

Enfin, l'attitude et le rôle du professeur pendant la recherche du problème sont essentiels pour que celui-ci reste ouvert du point de vue des élèves. Nous renvoyons pour cela aux troisième et quatrième parties où cette attitude est décrite et commentée.

POURQUOI CHERCHER DES PROBLEMES OUVERTS EN CLASSE ?

Il nous faut revenir finalement, avant de passer à la description d'une séance, sur ce point dont nous avons dit qu'il nous différencie par exemple du «livre du problème» [3], mais aussi des réflexions analogues d'autres enseignants.

Citons de nouveau [3] :

«L'éducation mathématique développe occasionnellement la mémoire, la minutie, le sens pratique, les facultés d'abstraction, etc... Mais le plus important est de cultiver **l'intelligence** qui est l'aptitude à faire face à des situations nouvelles et à saisir des relations. C'est la recherche de «problèmes» qui est donc l'activité mathématique la plus importante.

Contrairement aux exercices d'exposition, le contenu mathématique importe peu dans un problème. L'important est de susciter un élan de curiosité et de **déclencher un comportement de recherche.**

Cependant notre système d'enseignement méconnaît gravement cet aspect. Nombreux sont les étudiants qui sortent brillamment diplômés de nos universités sans avoir vraiment résolu un seul problème de leur vie : il ne leur est jamais arrivé d'être obsédé par une question pendant plusieurs semaines, d'avoir lentement pris conscience de la nature des difficultés, et d'aboutir à la suite d'un long processus à une illumination qui dévoile la réponse».

Bien entendu, nous souscrivons entièrement à ce qui précède et nous pouvons même y ajouter les remarques suivantes :

— la pratique de la recherche de problèmes apprend d'abord ce que sont les mathématiques (même si elle apprend aussi des mathématiques) ;

— elle suppose que le maître sache lui-même ce que sont les mathématiques, ce que c'est que de chercher un problème (un vrai problème, c'est-à-dire ouvert...). Pour faire pratiquer aux élèves la recherche de problèmes, il faut la pratiquer soi-même ; souvent d'ailleurs, les mêmes problèmes conviennent.

Cependant nous pensons que, lorsque la recherche est menée en classe, en général dans le cadre d'un travail par groupes, d'autres bénéfices apparaissent.

Tous les élèves sont concernés, même ceux qui se considérant comme faibles en maths, ou peu intéressés, ne travailleraient peut-être pas chez eux sur un énoncé. Ensuite, le professeur, s'il sait ne pas être trop directif, peut observer la progression de la recherche, depuis la compréhension de l'énoncé jusqu'à la formation des conjectures et la démonstration de résultats. C'est l'occasion pour lui de préciser des notions tellement fondamentales en mathématiques qu'elles sont paradoxalement souvent implicites. Par exemple, comment reconnaître qu'un énoncé est vrai ou faux ? Qu'est-ce qu'un contre exemple ? La réponse à ces questions est loin d'être évidente en quatrième ou troisième. L'intérêt de la recherche en classe c'est que ces questions surgissent non du discours du professeur mais du dialogue des élèves : ce sont des questions que les élèves sont amenés à poser.

La pratique de la mise en commun par les élèves, après la recherche de leurs conjectures (voir deuxième partie, séance de bilan) a de plus une portée éducative incontestable : expérimentation de rapports humains fondés sur le dialogue et l'échange d'arguments rationnels (ce qui ne veut pas dire que ce soient les seuls possibles). Lien de ce type de discussions avec les notions de démonstrations et de rigueur mathématique, ainsi restituées au niveau de la collectivité humaine (et non dans une abstraction logique). Découverte de la possibilité pour chacun de trouver quelque chose, du fait que le maître ne sait pas tout, etc...

DEUXIEME PARTIE :

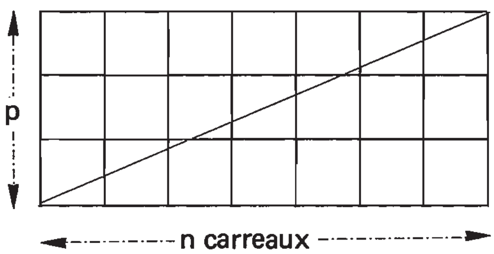
CHRONIQUE D'UNE EXPERIMENTATION D'UN PROBLEME OUVERT DANS UNE CLASSE DE QUATRIEME.

Cette chronique est rédigée par l'enseignant qui a proposé ce problème. La classe est une classe de quatrième d'un établissement depuis classé en ZEP.

I – MISE EN ROUTE DE L'EXPERIMENTATION.

J'ai présenté à mes élèves six problèmes (voir l'énoncé de ces problèmes en fin de deuxième partie), en notant leur énoncé sur une grande feuille (1 m X 1,50 m) qui a été affichée en classe.

Leurs réactions ont été très diverses : au début, ils ont trouvé tous ces problèmes très simples (dans leur esprit, énoncé court = problème facile !), puis chacun a essayé de proposer des solutions. Entre autre pour l'exercice 1, «tous les chemins sont égaux !». Certains ont essayé de noter les énoncés sur leur brouillon. Finalement je leur ai proposé de polycopier ces énoncés et d'organiser une séance de recherche la semaine suivante du problème numéro 6, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous.



Peux-tu déterminer en fonction de **n** et de **p**, le nombre de carreaux que traverse la diagonale ?

A noter que j'ai eu beaucoup de mal à les arracher à ces problèmes pour revenir à des choses plus traditionnelles.

II – PREMIERE SEANCE.

Quatre ou cinq jours plus tard, nous avons consacré une séance d'une heure pour chercher en classe l'exercice numéro 6.

Au cours de cette première séance, comme d'ailleurs pour les autres séances, les élèves ont cherché par groupes de deux ou individuellement.

Des questions ont été proposées concernant l'énoncé :

— «Que faire en fonction de n et p ?».

Je leur ai répondu qu'il fallait qu'ils trouvent une formule donnant directement le nombre de carreaux traversés, sans tracer le rectangle, uniquement à l'aide de n et p.

— «Et si la diagonale passe par un nœud du quadrillage, comment compte-t-on le nombre de carreaux traversés ?».

Après ces questions, les élèves ont fait des essais avec des feuilles quadrillées.

Certains au début traçaient leurs rectangles à main levée mais en comparant leurs résultats avec leurs camarades, ils se sont rendus compte que pour faire un découpage correct des carreaux, il fallait faire une figure précise : la figure n'est plus faite pour le prof, mais pour eux !

Rapidement (10 à 15 minutes après le début de la séance), des solutions me sont proposées par pratiquement tous les groupes. Mais il faut noter que ces «solutions» sont établies à partir de deux, voir souvent d'un seul exemple ! Ces deux exemples ou cet exemple suffisent à convaincre totalement mes élèves : ils estiment alors que le problème est résolu, ils posent leur crayon avec un grand sourire de satisfaction !

Exemple de ces solutions : (pour plus de simplicité, j'appellerai N le nombre de carreaux traversés).

- «$N = n$» — Ce groupe a fait deux essais avec $(n, p) = (8, 4)$ et $(6, 3)$.
- «$N = n + p - 1$» — Plusieurs fois proposé avec $(n, p) = (7, 4)$; $(5, 3)$;.....
- Voici une autre conjecture trouvée après 35 minutes de recherche :

— si n est pair

si $p \geqslant \frac{n}{2}$ alors $N = \frac{n}{2} + p$

si $p < \frac{n}{2}$ alors $N = \frac{n}{2} + 1$

— si n est impair, alors $N = \frac{n}{2} + 0{,}5 + p - 1$

J'essaie d'aider alors mes élèves à être davantage critiques face à leur conjecture en essayant de soulever en eux un doute face à leur «solution» : soit en leur demandant s'ils sont absolument sûr de leur résultat, soit en leur proposant un contre-exemple.

Exemple de dialogue professeur-élèves :

— Cà y est on a trouvé le nombre de carreaux traversés, c'est n.

— Avez-vous essayé avec 9 et 6 ?

Les élèves essaient et constatent...

— Mince notre truc ne marche pas !

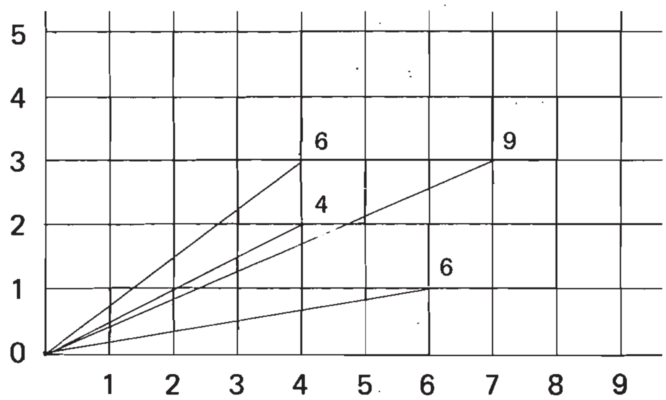
Le contre-exemple les convaint sans problème et ils se mettent à faire de nouveaux essais.

L'activité en classe est intense. Tous cherchent.

Certains élèves commencent à s'organiser.

— Un groupe fait un tableau à double entrée pour rassembler les résultats de ses essais.

p \ n	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2		2	4	4
3			3	6
4				4



— Une élève utilise le repère ci-dessus pour faire plus rapidement des essais.

Je suis moins souvent sollicité par les élèves qui commencent à devenir davantage critiques face à leurs conjectures. Au bout d'une heure toutes les conjectures proposées par les élèves se sont avérées fausses. Je propose alors d'organiser une nouvelle séance une semaine plus tard, les élèves étant bien sûr invités à continuer leurs recherches chez eux s'ils le désirent.

III — DEUXIEME SEANCE.

Au bout de la nouvelle séance, les élèves ont de la peine à faire le bilan de leurs recherches de la séance précédente : beaucoup ont perdu leur brouillon ou n'en retrouve qu'une partie, peu on noté leurs conjectures. J'en profite alors pour leur faire sentir la nécessité d'apprendre à rédiger leurs conjectures ou découvertes. Cette rédaction a pour but de leur permettre de faire un bilan de leur recherche et donc de ne pas repartir à zéro lorsqu'il recherche le problème quelque temps plus tard et de pouvoir communiquer leurs conjectures ou résultats à leur camarades.

La motivation semble un peu tomber dans certains groupes car les élèves ne trouvent pas la formule qui «marche tout le temps». Il y a toujours un exemple qui «ne va pas».

Je vais alors auprès de ces groupes pour faire avec eux le bilan de leur recherche et surtout pour leur indiquer qu'après tout, ils ne sont peut-être pas obligés de trouver «la bonne formule» mais qu'un résultat qui ne «marche» pas tout le temps peut être intéressant à condition de préciser dans quels cas il est valable !

Exemple de dialogue professeur-élèves.

— Alors où en êtes-vous ?

— Bof !... On avait trouvé que le nombre de carreaux traversés est n mais ça ne marche pas avec $n = 9$ et $p = 6$.

— Bien. Mais quels sont les exemples qui vous ont conduits à établir cette formule ?

— $n = 8$; $p = 4$ et $n = 9$; $p = 3$.

— Il serait peut-être intéressant de trouver pour quelles valeurs de n et p cette formule est valable.

Les élèves sont alors surpris car je les guide sur une piste qui ne semble plus être en rapport direct avec le problème de départ. Mais d'un autre côté, ils se sentent motivés pour reprendre leur recherche car ils se rendent compte que leur formule n'est pas si «ridicule que ça» !

De nouvelles conjectures commencent alors à apparaître.

«Si n est le double de p, alors $N = n$».

«Si n est un multiple de p, alors $N = n$».

«Si n est pair et p impair, alors $N = n + p - 1$».

«Si p est un nombre premier, alors $N = n + p - 1$».

Un groupe s'intéresse au nombre de nœuds traversés.

Je suis vraiment étonné par les découvertes de mes élèves. Je leur propose alors une séance de bilan pour la semaine suivante.

IV – SEANCE DE BILAN.

Cette fois-ci les brouillons ont été gardés.

Chaque groupe propose ses conjectures. Je les note au tableau. Les autres groupes essayant évidemment de prouver à l'aide de contre-exemples qu'elles sont fausses !

En fait, on s'aperçoit que, pour les élèves la distinction entre vrai ou faux n'est pas claire.

Certains pensent pouvoir nier la formule N = n + p - 2 quand n est impair et n pair avec l'exemple n = 6 et p = 5.

Si une conjecture est fausse, je l'efface.

Finalement trois conjectures «résistent» à toute attaque :

— si n est un multiple de p, alors N = n ;
— si p est un nombre premier non diviseur de n alors N = n + p - 1 ;
— N = n + p - 1 + le nombre de nœuds.

Je sens alors la nécessité de leur donner le résultat. Je n'ai pas pensé que je pouvais adapter une démonstration à des quatrièmes. Cela est peut-être possible ? N = n + p - pgcd (n, p).

Je suis alors surpris par la réaction de mes élèves.

— Ah mince, c'était facile !
— Comment n'y ai-je pas pensé ?

Beaucoup s'attendaient à une formule très compliquée. Chacun essaie de lui-même de vérifier cette formule avec un ou deux exemples. Un rappel a été évidemment nécessaire sur la notion de pgcd.

Puis un élève a alors posé la question suivante :

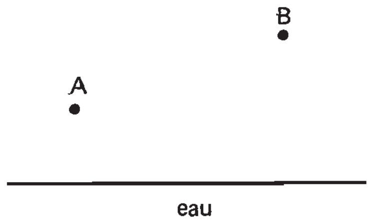
— Mais alors, nos formules sont fausses ou pas ?

45 minutes ont alors été consacrées à étudier cette question pour les deux premières conjectures.

PROBLEMES OUVERTS.

1. Toto part de A, prend de l'eau et va en B.

   Pourrais-tu lui tracer le chemin le plus court ?



2. Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ ?$$

   Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que

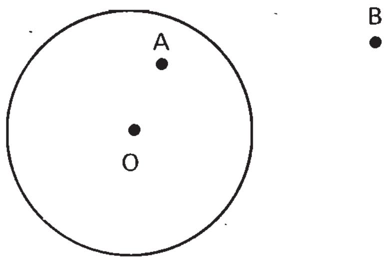
$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ ?$$

   Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \ ?$$

   Continue.

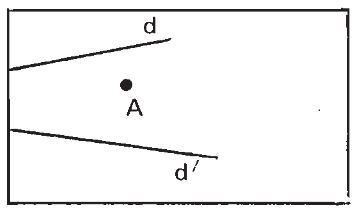
3. Peux-tu déterminer un des points d'intersection du cercle et de la droite (AB) en utilisant uniquement un compas ?
   (AB) ne contenant pas le point O.



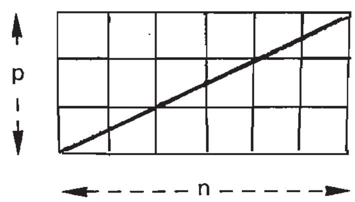
4. Etudie la chaîne :

$$n \begin{cases} \nearrow \ \dfrac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ \searrow \ 3n + 1 & \text{si n est impair} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

5. Comment tracer la droite passant par A et par l'intersection de d et d' ?
   Malheureusement, le point d'intersection de ces deux droites se situe à l'extérieur de la feuille.



6. Peux-tu déterminer en fonction de n et p, le nombre de carrés que traverse la diagonale ?



TROISIEME PARTIE :

CE QUE NOUS AVONS CONSTATE EN EXPERIMENTANT DES PROBLEMES OUVERTS DANS NOS CLASSES

D'autres problèmes faisant partie de la liste des six problèmes cités page 15, ont été expérimentés par une dizaine de collègues dans le premier et le second cycle.

Certains collègues ont proposé cette liste en devoir à la maison (les élèves devant chercher un certain nombre d'exercices au choix de cette liste). D'autres ont proposé ce travail en classe, les élèves travaillant en groupes plus ou moins structurés ; dans certaines classes, le professeur imposait un problème, ce travail se prolongeant, soit par un bilan écrit que devait faire l'élève à la maison, soit par de nouvelles séances de travail en groupes à la fin desquelles était fait un bilan des recherches.

Il y a donc eu une grande diversité dans la manière de proposer ce travail.

A partir des comptes rendus que nous avons reçus, nous avons fait un certain nombre de constatations.

I – CONSEQUENCES DES DIFFERENTES CONSIGNES DONNES AUX ELEVES.

Le fait de proposer ces problèmes de différentes manières nous a amenés à faire les constatations suivantes.

Il semble que, si la majeure partie du travail de recherche se passe à la maison, cette expérimentation est beaucoup «appauvrie» (tout particulièrement dans le premier cycle) :

– il y a appauvrissement pour l'enseignant qui ne voit pas l'élève chercher (nous verrons plus loin l'intérêt de cette observation) ;

– il y a appauvrissement pour l'élève qui risque rapidement de se décourager et d'aller «piocher» les résultats auprès d'autres camarades.

Proposer, même en classe, tous les exercices simultanément n'incite pas l'élève à une recherche approfondie (il papillonne d'un problème à l'autre).

Demander aux élèves de faire, après une heure de recherche en classe, un compte rendu écrit de leurs découvertes ou de leurs conjectures, n'est pas simple surtout pour un élève du premier cycle. Nos élèves, en effet, sont trop habitués à ne rédiger que ce qu'ils pensent être un résultat définitif et «juste». Des résultats partiels ou des études de cas particuliers ne sont pas pris en compte dans la notation traditionnelle de la production de l'élève devant un problème classique.

En fait, il y a ici une rupture du contrat didactique entre cette activité et l'usage habituel du problème en classe. Le problème n'est pas ici un outil d'évaluation.

II – AU DEBUT DE CETTE EXPERIMENTATION, LES ELEVES SONT DESORIENTES.

— Tout d'abord par la **forme de l'énoncé.** (Cf. Première partie).

— Parce que rapidement, ils se rendent compte qu'**ils ne voient pas de méthode à utiliser** (d'habitude là ou les méthodes sont sous-entendues dans l'énoncé des problèmes classiques et plus encore dans les exercices d'application). Aussi, l'enseignant est vite submergé par de nombreuses questions :

- Faut-il tracer des triangles ? Des parallélogrammes ?
- Est-ce que je peux faire comme ça ?
- Est-ce qu'il y a une solution ?

Cette dernière question est pour eux un grand sujet d'inquiétude. C'est un des symptômes de la rupture du contrat didactique : dans les problèmes classiques, cette question ne se pose pas, car la plupart du temps la solution apparaît dans l'énoncé : «Montrer que...».

A noter leur étonnement lorsqu'on leur dit que pour l'exercice 4 il n'y a pas, à ce jour, de résultat démontré. Réaction d'une élève suite à cette remarque :

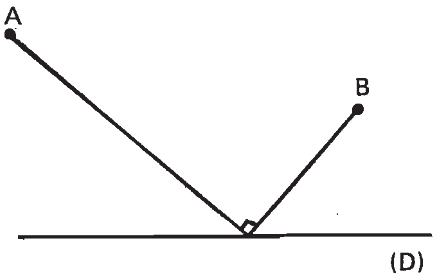
— Alors nous, on ne risque pas de démontrer quelque chose dans cet exercice et si on ne peut rien démontrer à quoi ça sert de le chercher ?
(Elève de troisième).

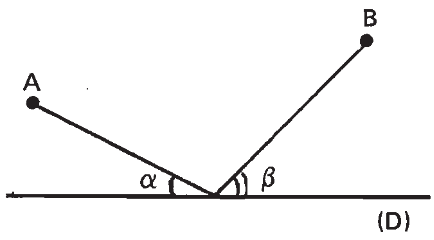
— Les élèves sont aussi désorientés car **ils pensent qu'il faut trouver un résultat et que, ne pas le trouver, c'est un échec.** D'où le découragement que l'on peut parfois noter. C'est peut-être l'occasion, pour l'enseignant, de faire prendre conscience aux élèves que dans la recherche d'un problème de maths, les résultats partiels (étude de cas particuliers) sont intéressants ainsi que la résolution de problèmes annexes.

Par exemple, pour l'exercice 1, de nombreux problèmes annexes ont été posés par les élèves et souvent résolus :

— Comment trouver un point d'une droite équidistant de deux autres points ?
(Classe de quatrième).

— Comment trouver un point **C** de **(D)** tel que **mes (ACB)** = **90°** ?
(Classe de quatrième).





— Comment construire un point **C** de **(D)** tel que $\alpha = \beta$?
(Classes de quatrième et troisième).

— Comment tracer un cercle passant par deux points, tangents à une droite donnée ?
(Classes de quatrième et troisième).

Pour l'exercice 2 :

— Peut-on trouver un entier **a** tel que $0{,}3 = \frac{1}{a}$?
(Classe de quatrième).

— Comment trouver des entiers dont la somme de certains de leurs diviseurs est égale à eux-mêmes ?
(Classe de quatrième).

III — DANS UN PREMIER TEMPS NOS ELEVES NE SONT PAS DU TOUT CRITIQUES FACE A LEURS CONJECTURES.

Comme nous l'avons vu plus haut, au cours des premières séances de ce genre de problèmes, les élèves du premier cycle, après avoir établi une conjecture sont satisfaits. Ils ne cherchent pas à faire d'autres essais en vue d'une vérification. Au début de l'expérimentation, les élèves gardent les mêmes réflexes qu'ils ont face aux problèmes traditionnels : il faut fournir une réponse et le plus rapidement possible même s'ils sont conscients que leurs réponses n'ont pas de sens «on ne sait jamais !». (A noter que ces réflexes ne sont pas propres aux mathématiques).

Comme nous l'avons précisé dans la deuxième partie, il semble important que l'enseignant amène ses élèves à être critiques face à leurs conjectures soit lorsque les élèves lui demandent de valider leurs résultats en leur retournant la question : «Et vous, êtes-vous sûr de votre résultat ?» soit en leur proposant des contre-exemples (pour les conjectures fausses).

Ainsi par exemple :

— Pour l'exercice 1, très vite les élèves pensent au point C équidistant de A et B et arrêtent toute recherche, satisfaits. A ce moment là, le professeur peut les inviter à tenter leur conjecture à l'aide d'autres essais.

Exemple de dialogue professeur-élèves :

- As-tu vérifié la longueur du parcours correspondant à ce point ? (On donne bien sûr le point convenable que l'on détermine à vue d'œil).
- Ah mince, mon truc ne marche pas !

A noter, et ceci semble important, qu'au bout de deux ou trois séances en classe, les élèves sont beaucoup plus critiques à l'égard de leur conjecture.

IV – NOS ELEVES NOUS ONT SOUVENT ETONNES (dans le bon sens du terme).

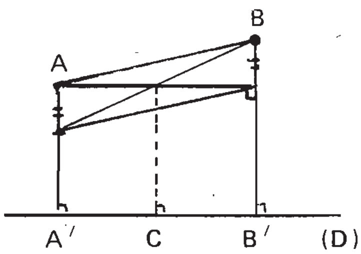
Ce qui va suivre peut être une réponse à un certain nombre de collègues qui, en voyant ces exercices, ont tout de suite estimé que leurs élèves étaient trop faibles pour tirer profit de ces problèmes.

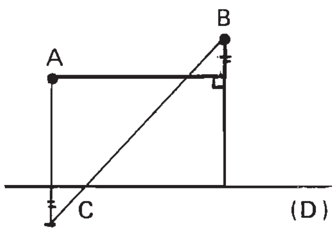
— Nous avons été étonnés par des **moments d'intense motivation** de la part des élèves, certains collègues parlent «d'activité fébrile». Les élèves continuent de chercher ces problèmes même pendant les heures de cours plus «traditionnels». Ils provoquent chez eux de grandes discussions (nous avons des réactions de certains parents d'élèves dans ce sens).

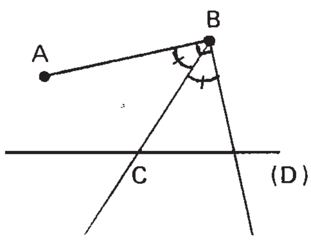
— Nous sommes aussi étonnés par **la ténacité de certains élèves** qui ne sont pas toujours les meilleurs.

— Les élèves nous ont étonnés par leur **grande imagination** (tout particulièrement dans le premier cycle). Cette imagination étant bien partagée entre tous les élèves. A noter que dans le second cycle, des collègues ont constaté que face à ce genre de problèmes, les élèves essaient directement de mathématiser la situation, s'ils n'y parviennent pas, ils restent «secs». L'idée de faire des essais ne leur vient pas à l'esprit.

Voici quelques exemples illustrant la grande imagination de nos élèves du premier cycle. Dans une classe de quatrième de 24 élèves, nous avons relevé dix conjectures différentes pour l'exercice 1. En voici quelques exemples :







Pour l'exercice 3, nous avons relevé 8 conjectures différentes.

— On a tous été étonnés par les **résultats trouvés par certains** élèves, résultats ou méthodes auxquels nous n'avions pas pensé.

A noter que ce sont souvent de bons élèves qui proposent ces résultats. Les élèves faibles quant à eux font des essais, émettent des conjectures souvent intéressantes, mais ils ne vont guère plus loin.

— En quatrième, deux élèves ont résolu le problème 3 au bout d'une heure de recherche en classe. L'un d'eux a démontré que sa construction était valable.

— Pour le problème 2, un élève de quatrième, après deux heures de recherche, a trouvé une méthode permettant de passer d'un rang au rang suivant :

Il part de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ et ensuite il constate que :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6+1}+\frac{1}{2 \times 3 \times (6+1)}=1 \ldots$$

Cet élève à qui son professeur demandait comment il avait fait pour trouver ce résultat expliqua :

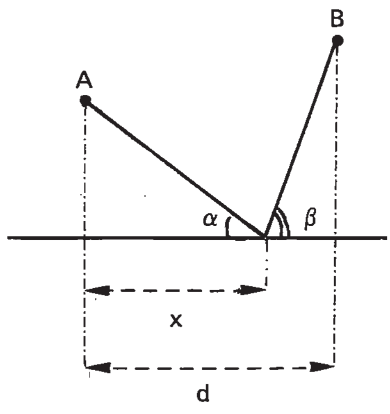
> «Je sais que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, il faut maintenant que j'ajoute une nouvelle fraction au premier membre de l'égalité donc il faut diminuer l'un des termes, je prends le dernier $\frac{1}{6}$ et pour le diminuer j'augmente son dénominateur de 1 (!) ; pour construire la quatrième fraction, j'ai fait le produit des nombres trouvés 2, 3 et 7 (!)».

— Des élèves de troisième constatent qu'ils peuvent passer d'un rang au rang suivant en gardant $\frac{1}{2}$ et en multipliant par 2 les dénominateurs de l'étape précédente.

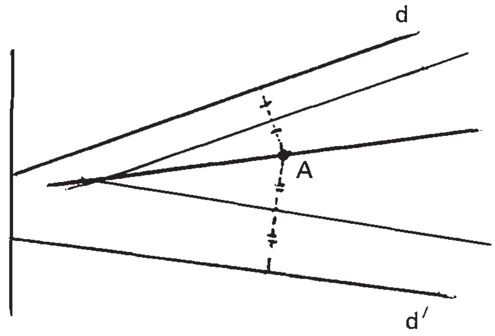
— Pour le problème 1, un élève de seconde écrit la longueur du trajet en fonction de x et d :

$$\text{trajet} = x\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta}\right)+\frac{d}{\cos\beta}$$

et conclut :
«pour que la somme (CA + CB) soit minimum il faut que
$\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta}=0$ car $\frac{d}{\cos\beta}>0$ donc $\alpha=\beta$».

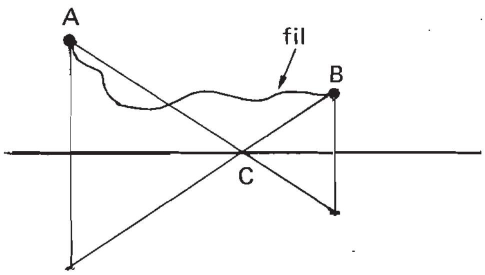


— Voici une méthode proposée par des élèves de troisième pour résoudre le problème 5.



— Nous avons été étonnés par **certains travaux d'élèves :**

■ Pour essayer de justifier la construction du point de l'exercice 1, un élève de quatrième fait une construction avec du carton et un fil.



La longueur du fil est égale à AC+CB

■ Pour le problème 4, un élève de troisième constate que l'on peut remplacer «$n \longrightarrow 3n + 1$» par «$n \longrightarrow \frac{3n+1}{2}$ pour aller plus vite.

V — LA SEANCE CONSACREE AU BILAN DES RECHERCHES SUR UN PROBLEME DONNE JOUE UN ROLE FONDAMENTAL.

Comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, chaque groupe présentent ses résultats (souvent partiels), ses conjectures. Ceux-ci peuvent être écrits au tableau ; chaque groupe est alors invité à demander des explications aux auteurs de ces conjectures si elles ne sont pas assez claires et ensuite à les critiquer. Un dialogue, ou plutôt une tentative de dialogue (car les élèves ne sont pas habitués à cette forme de débat) s'instaure. Les élèves comprennent rapidement que ce n'est pas celui qui crie le plus fort qui a raison, mais que si l'on veut contester une conjecture, il faut apporter un contre-exemple et si l'on veut convaincre les autres qu'une conjecture est vraie il faut apporter une preuve.

VI — Il semble qu'**IL NE FAUT PAS POSER N'IMPORTE QUEL PROBLEME** aux élèves (surtout dans le premier cycle). On risque de créer une situation de blocage face à ce genre d'exercice, blocages analogues à ceux que l'on rencontre au niveau des démonstrations en quatrième et troisième.

Il nous semble qu'il y a deux dangers à éviter :

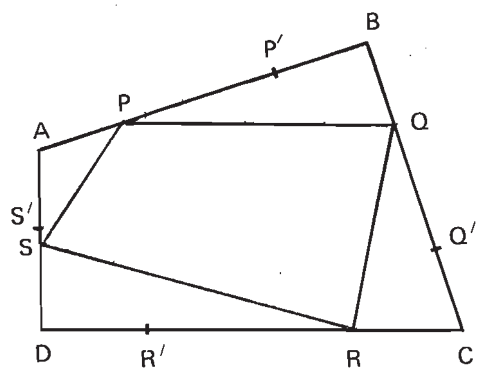
– Proposer des problèmes dont les solutions sont trop élaborées par exemple comme le problème de Napoléon : «Recherche du centre d'un cercle uniquement avec un compas».
Cela ne signifie pas qu'en proposant un problème ouvert à nos élèves, nous devons nous attendre à ce que la moitié de la classe le résolve ! Non bien sûr, ainsi pour l'exercice 6, sur trois classes du premier cycle dans lesquelles il a été testé, aucun élève n'a trouvé le résultat mais lorsqu'on leur donne la formule ils sont surpris par sa simplicité (voir deuxième partie, paragraphe V).

– Proposer des problèmes dont les essais nécessitent un important travail.

Par exemple :

PQRS est un quadrilatère convexe inscrit dans un quadrilatère convexe **ABCD** (voir figure).

P'Q'R'S' est un quadrilatère convexe inscrit dans le quadrilatère **ABCD** tel que **P', Q', R', S'** sont les symétriques respectifs de **P, Q, R, S** par rapport au milieu des côtés **AB, BC, CD** et **DA**.



Quels sont les quatrilatères **ABCD** tels que les aires de **PQRS** et **P'Q'R'S'** soient égales ?

Dans ce genre de problème, l'élève ne pourra pas faire suffisamment d'essais afin d'élaborer des conjectures. Il va donc se décourager très vite.

VII – NOTATION.

Il nous semble impossible de noter les recherches des élèves car qui mérite le plus de points, celui qui résout le problème au bout de 30 minutes ou celui qui, au bout de deux heures de recherche n'a pas trouvé la solution mais a résolu un certain nombres de problèmes annexes.

D'autre part, si l'on introduit une notation dans ce genre de travail on risque de dénaturer la situation problème dans la mesure où l'objectif final de l'élève ne sera plus résoudre ce problème pour lui-même mais résoudre ce problème pour avoir une bonne note.

QUATRIEME PARTIE :

CONCLUSIONS

Comme nous l'avons constaté au cours de ces recherches en classe de problèmes ouverts il y a **rupture du contrat didactique** concernant le rôle de problème dans la classe dans la mesure où l'objectif premier de la situation problème n'est plus de faire fonctionner une notion mathématique précise ou d'évaluer l'élève mais de lui permettre de mettre en route une démarche scientifique véritable.

■ CECI ENTRAINE DONC DES CHANGEMENTS DANS LE ROLE DU PROFESSEUR ET PAR VOIE DE CONSEQUENCE DANS LES RELATIONS PROFESSEUR-ELEVES.

Trop souvent dans une situation didactique traditionnelle, le professeur est celui qui sait, celui qui tranche s'il y a un débat, celui qui évalue et même celui qui juge.

Dans une recherche de problème ouvert, le rôle du professeur doit être différent ; il va de groupe en groupe pour **s'informer** de l'état des recherches ce qui **incite les élèves à faire le bilan de leur recherche** (dans une activité traditionnelle les élèves ont-ils souvent la possibilité de s'exprimer ?). Aux groupes bloqués, **il propose une piste de recherche** en fonction des recherches effectuées par le groupe. Ces pistes proposées ne conduisent pas forcément à la solution, elles peuvent inciter les élèves à aller plus loin dans la voie originale dans laquelle ils se sont engagés même si le professeur pense qu'elle ne conduira pas à la solution.

C'est l'occasion de faire comprendre aux élèves que dans ce genre de problème, trouver «le bon résultat» n'est pas forcément l'unique objectif ; résoudre le problème dans des cas particuliers ou se poser et résoudre des problèmes annexes sont aussi des objectifs de cette recherche. Il incite les élèves satisfaits de leurs conjectures à les **tester** par de nouveaux essais ou encore à **essayer de produire une preuve,** il propose **d'essayer des contre-exemples** pour les conjectures fausses, surtout il **encourage** les pistes de recherche originale (auxquelles il n'a peut-être pas pensé), il **valorise** les résultats ou conjectures trouvées.

Bref, plutôt que de juger le travail produit il aide les élèves à évoluer, à se dépasser.

Dans cette situation didactique particulière, nous découvrons nos élèves sous un autre aspect :

— Tout d'abord nous découvrons certains élèves : «Tiens, je n'aurai jamais cru cet élève capable de faire ça !». «Je n'aurais pas cru celui-là capable de s'accrocher comme ça sur ce problème».

— En dialoguant avec les groupes, on met en évidence le décalage qui existe entre le sens précis que l'on donne aux termes mathématiques que l'on utilise et le sens que donnent les élèves à ces mêmes termes.

Voici un exemple parmi beaucoup d'autres : pour le problème numéro 10 (voir liste de problèmes ouverts à la fin) un élève rédige ainsi sa conjecture : «Si la somme des deux plus petits nombres n'est pas égale au plus grand nombre, ça ne marche pas». Après discussion avec cet élève, le professeur découvre que le terme «n'est pas égale» signifiait pour l'élève non pas «est différent de» mais «n'est pas supérieure ou égale à».

— Cette discussion permet de mettre en évidence l'implicite que véhicule notre enseignement et tout particulièrement nos énoncés de problèmes.

- Pour le problème 3, un élève propose une construction qui ne convient que pour sa figure. Il ne pense pas à faire varier A et B.
- Pour le problème 6, aucun élève d'une classe ne pense à faire des essais avec n = p. Leur professeur leur proposant de le faire, les élèves estiment que ce n'est pas possible !

— Cette situation permet aussi de révéler des difficultés que rencontrent certains élèves (difficultés difficilement détectables dans une situation traditionnelle). Ainsi par exemple à la fin d'une séance de bilan de recherche du problème 1, un professeur fait au tableau la démonstration. Tous les élèves semblent convaincus lorsqu'un élève intervient : «Oui d'accord sur la figure que vous avez faite au tableau, vous avez démontré que le point qui convenait est bien le point C mais qu'en est-il sur ma figure ?».

— Pratiquement dans nos classes des recherches de problèmes ouverts influence aussi notre manière d'enseigner dans des situations plus traditionnelles.

Deux réflexions de collègues résument assez bien ces changements :

- «Je laisse maintenant plus de liberté à mes élèves : s'ils proposent une méthode qui je le sais va conduire à une impasse, je les laisse continuer plutôt que de leur donner directement la «bonne méthode»».
- «Si un élève fait une erreur, plutôt que de lui signaler son erreur et de lui donner la bonne réponse, j'essaie de le pousser à la contradiction».

■ **QUELLES SONT LES CONSEQUENCES POUR LES ELEVES DE CES CHANGEMENTS ?**

L'élève découvre peu à peu qu'il a droit à l'erreur en conséquence, il cherche moins à donner «la réponse que le professeur attend», l'élève est plus spontané, il peut donc davantage donner libre cours à son imagination.

Cette activité développe aussi son esprit d'initiative, son sens critique en somme son intelligence.

D'autre part, les séances de bilan jouent un rôle social important :

- L'élève apprend qu'il est nécessaire d'utiliser un langage précis, non pour faire plaisir au professeur (celui-ci généralement le comprend même si ses phrases sont peu claires : «L'idée y est») mais pour être compris par ses camarades.

- L'élève peu à peu sent la nécessité d'une preuve : la preuve devenant nécessaire pour lui car pour certaines conjectures on ne trouve pas d'exemples qui la contredisent, malgré cela un doute persiste : «A-t-on essayé tous les points pour l'exercice 1».
  «Le dessin est-il suffisamment précis pour qu'on soit sûr de notre conjecture pour l'exercice 5».
  L'élève ressent alors qu'une preuve est nécessaire pour qu'il se convainque lui-même et qu'il convainque ses camarades.

  La preuve obtenue n'est peut-être pas forcément «la belle preuve mathématique» que l'on attend. Ainsi par exemple pour le problème 10 un élève prouve la conjecture : «Si la somme des deux plus petites longueurs est supérieure à la plus grande alors on peut construire le triangle» de la manière suivante : «Je commence à tracer le plus grand côté que je nomme [AB] ensuite je trace un arc de cercle de centre A et de rayon égal au deuxième côté et je trace un arc de cercle de centre B et de rayon égal au troisième côté. Pour que le triangle existe il faut que les deux arcs se coupent, il faut donc que la somme du deuxième est du troisième côté soit supérieure à AB».

  Tout le monde a été convaincu. Nous considérons que ceci est une preuve pour la classe bien que ça ne soit peut-être pas une démonstration pour la communauté des mathématiciens !

Enfin dans ce genre d'activité, tous font quelque chose, c'est le moment ou jamais de valoriser le travail de certains élèves faibles qui ont peut-être l'impression pour la première fois depuis longtemps de faire quelque chose en mathématiques.

■ MAIS LA MISE EN ROUTE DE CES RECHERCHES DE PROBLEMES OUVERTS EN CLASSE N'EST PAS SANS SOULEVER DES DIFFICULTES.

• Une première objection qui nous est souvent formulée est la suivante : «Comment vais-je finir le programme si je propose souvent des recherches de problèmes ouverts en classe ?».

Disons tout de suite qu'il ne s'agit pas pour nous de bouleverser notre façon d'enseigner dans nos classes.

Mais même une dizaine de séances de ce genre de recherche peuvent poser des problèmes à beaucoup d'entre nous. Ici il est peut-être nécessaire de s'interroger sur le contenu du programme : tout est-il fondamental ? Ces programmes n'autorisent-ils pas une certaine liberté par exemple dans le premier cycle et en seconde ? En sixième et cinquième n'est-il pas possible d'utiliser certaines séances de soutien à la recherche de ce genre de problème ?

Cet argument n'est-il pas parfois un alibi pour ne pas se lancer dans ce genre d'expérimentation ?

• Comme nous l'avons vu dans l'introduction notre conception des mathématiques joue un rôle fondamental dans notre manière de les enseigner. Proposer des problèmes ouverts à nos élèves sous-entend que pour nous les mathématiques ne sont pas «un produit fini qu'il faut que nos élèves connaissent, analysent et sachent reproduire mais au contraire une science active qui se crée» [1].

Seulement notre conception des mathématiques dépend bien sûr de la formation que nous avons reçue et tout particulièrement de notre formation universitaire car celle-ci est essentiellement centrée sur une mathématique déductive qui incite l'étudiant à reproduire ce que le professeur lui enseigne ce qui conduit à une attitude passive et conformiste.

Or «l'initiation à la recherche de problème va à l'encontre de certains préjugés «moraux». La curiosité (abusivement confondue avec l'indiscrétion) est souvent considérée comme un défaut car il ne faut pas chercher à comprendre. Nombreux sont ceux qui se sentent coupables lorsqu'ils «sèchent» longtemps sur un problème ; ils ont à tort l'impression de perdre leur temps» [3].

Beaucoup d'entre nous qui expérimentons ces problèmes ouverts avons été en présence pour la première fois avec ce genre de problèmes bien longtemps après la fin de nos études !

Or comme nous le disions plus haut, il nous paraît indispensable pour tirer un maximum de profit de ces expérimentations de nous placer nous-mêmes en situation de recherche.

En somme, il nous paraît important que dans la formation même des futurs professeurs de mathématiques, une place soit faite à ce que nous serions tentés d'appeler l'activité mathématique par excellence à savoir «la résolution de problème».

• Voici enfin une réflexion que nous entendons souvent : «Dans les examens, on évalue les élèves non pas à partir de problèmes ouverts mais à partir de problèmes classiques aussi je préfère entraîner mes élèves à résoudre ce genre de problème».

Il est clair que l'activité de recherche de problèmes ouverts a un impact sur l'activité plus traditionnelle mais une question se pose à laquelle nous ne pouvons pas encore répondre : «Après un certain nombre de séances de recherche de problèmes ouverts nos élèves sont-il «plus performants» face aux problèmes classiques ?».

A partir de ces expérimentations, d'autres questions se posent :

CONCERNANT L'ACTIVITE DES ELEVES :

— Quelles sont les méthodes de recherche utilisées par nos élèves pour résoudre des problèmes ouverts ? Ces méthodes varient-elles suivant le niveau des élèves ?

— Pour un problème donné les conjectures proposées reviennent-elles dans un ordre chronologique précis ?

— Quels sont les erreurs commises par nos élèves au cours de ces recherches ? Quels obstacles rencontrent-ils ?

— En fonction du niveau socio-culturel de nos élèves note-t-on des différences de comportement face à ces problèmes ?

— Comment les élèves ressentent-ils la différence entre un problème ouvert et un problème classique ?

— A quel moment se produit une baisse de motivation de l'élève ?

— Les élèves acceptent bien les contre-exemples. Mais comment vivent-ils un contre-exemple ? Comment redémarrent-ils leur recherche ?

CONCERNANT LE CHOIX DU PROBLEME :

— N'y a-t-il pas de problèmes que les élèves s'approprient plus facilement que d'autres ? Lesquels ? Pourquoi ?

Si vous-mêmes vous êtes intéressés par la pratique de ces recherches en classe, en annexe, vous trouverez d'autres énoncés de problèmes ouverts directement expérimentables dans le premier cycle.

Si vous désirez nous faire part de vos rapports d'expérimentation, vous trouverez également une grille pour faciliter la rédaction de ces rapports.

Enfin, nous vous signalons que l'IREM de LYON publie régulièrement une feuille à problèmes dans laquelle vous trouverez d'autres énoncés de problèmes ouverts et des rapports d'expérimentation. (Abonnement gratuit en envoyant vos coordonnées à l'IREM de LYON).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] «Rôle des problèmes dans l'éducation mathématique».
Michele PELLEREY, dans «Mathématique et Pédagogie», numéro 16. (1978).

[2] Actes du Colloque de LYON sur «Le problème dans l'enseignement». Mai 1982.

[3] «Le livre du problème». Volume 1. IREM de Strasbourg. Editions CEDIC. (1976).

[4] «Une activité vivante : faire des mathématiques».
Serge LANG, dans «Revue du Palais de la découverte», numéro 104. (1983).

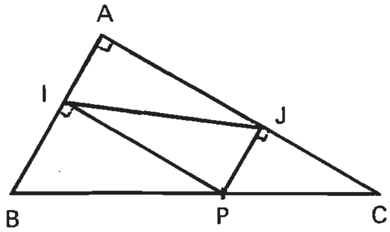
[5] «Que fait un mathématicien pur et pourquoi ?
Serge LANG, dans «Revue du Palais de la découverte», numéro 94. (1982).

ANNEXE 1.

D'AUTRES PROBLEMES OUVERTS DIRECTEMENT EXPLOITABLES DANS LE PREMIER CYCLE.

7 On se donne un triangle ABC rectangle en A.

Comment choisir P sur l'hypoténuse pour que la longueur IJ soit minimum ?
(Premier cycle).



8 Quel est le chiffre des unités de 23^{1982} ? (Premier cycle).

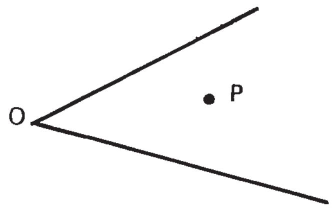
9 Soit trois droites concourantes, comment construire le ou un triangle dont elles sont médianes, médiatrices, hauteurs (et bissectrices) ?

(Problème figurant dans «Faire des maths» Troisième - (A. DELEDICQ) - Editions CEDIC).

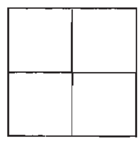
10 Etant donné trois nombres décimaux. Peux-tu construire un triangle dont les longueurs des côtés soient égaux aux trois nombres donnés ?
(Premier cycle).

11 On se donne deux demi-droites de même origine O, et un point P.

Tracer une droite passant par P tel que le triangle ainsi construit ait une aire minimum.
(Classe de quatrième).



12 Combien de carrés sur cette figure ?
Cinq ! Où sont-ils ?



Combien y a-t-il de carrés sur un tableau 3 X 3 ? Sur un tableau 4 X 4 ?

Combien de carrés sur un jeu d'échec ? (Classe de sixième).

13 En partant du naturel 5 et en utilisant les applications :
$f : x \longrightarrow 2x$
$g : x \longrightarrow x - 3$.

Quels sont tous les naturels que l'on peut atteindre ?

Comment atteindre un naturel donné en un minimum de coups ?

(D'après PC Rosembloom et M. Glaymann).

14 Peux-tu trouver deux entiers naturels a et tel que $2{,}\overline{68} = \frac{a}{b}$?

Même question pour $3{,}\overline{57}$; $6{,}\overline{38}$; $5{,}\overline{475}$.

Peux-tu trouver une méthode générale pour résoudre ce genre de problème ? (A partir de la quatrième).

15 Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers positifs. Par exemple $23 = 11 + 5 + 7$.

Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum. Et avec d'autres nombres ?
(A partir de la sixième).

16 Soit n un entier naturel non nul ; on considère l'ensemble $S_n = \{1 ; 2 ; ... ; n\}$.

On désire trouver deux parties A et B de S_n telles que

- A et B forment une partition de S_n.
- La somme des éléments de A est égale à la somme des éléments de B.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels cela soit possible.

Voici un exemple :

Pour $n = 7$ cela est possible, en effet $S_7 = \{1 ; 2 ; ... ; 7\}$.
Prenons $A = \{1 ; 2 ; 5 ; 6\}$; $B = \{3 ; 4 ; 7\}$.
On a bien $A \cup B = S$; $A \cap B = \phi$
et $1 + 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 7$.
(A partir de la cinquième).

17 Problème de billard. (A partir de la sixième).

Sur un quadrillage, on trace un rectangle de n carreaux sur p carreaux et on s'impose les règles suivantes :

- le point de départ est un sommet ;
- on avance toujours en ligne droite en suivant une diagonale de chaque carré ;
- quand on arrive au bord du rectangle, on rebondit à angle droit ;
- on s'arrête quand on atteint un sommet du rectangle.

Trouve en fonction de n et p le nombre de carreaux traversés.

ANNEXE 2.

GRILLE DE RAPPORT D'EXPERIMENTATION DE PROBLEMES OUVERTS

ETABLISSEMENT : **CLASSE :**

Votre établissement est-il classé en ZEP ?
Si ce n'est pas le cas, dans quel milieu socio-culturel vos élèves sont-ils recrutés ?

I ENONCE.

II Conditions dans lesquelles ce problème a été proposé.

(Nombre de séances, travail en groupe ou individuel,...).

III Déroulement de la ou des séances de recherche.

1) Réaction des élèves face à l'énoncé.
2) Méthodes de recherche utilisées par les élèves (entre autre, quelles difficultés ont-ils rencontrées, quelles questions ont été le plus souvent posées au cours de leurs recherches,...).
3) Conjectures proposées par les élèves.
4) Problèmes annexes soulevés et éventuellement résolus par les élèves.
5) Résultats trouvés.
6) Intervention du professeur.
   (Quand ? Comment ? Pourquoi ? A-t-il fallu relancer la motivation de certains groupes ? ...).
7) Y a-t-il eu une séance de bilan ?
   Déroulement.

IV CONCLUSION.

1) Quelles sont les principales notions mathématiques utilisées ?
2) La nécessité d'une preuve s'est-elle faite ressentir ?
3) La recherche de ces problèmes a-t-elle permis d'introduire des notions mathématiques nouvelles ?
4) Remarques particulières.
   (Entre autres, «les bons» sont-ils restés «bons», les «faibles» sont-ils restés «faibles» ? Avez-vous une méthode pour évaluer ce genre de travail des élèves ? ...).