

NUMERATION :

Aspects Techniques

Préambule

Cet article est rédigé pour des adultes qui ont déjà acquis les mécanismes de la numération dans le système décimal ; son but est d'amener à une réflexion sur ces mécanismes par l'intermédiaire de l'étude des systèmes de base autre que dix.

L'introduction «des bases» dans les petites classes de l'enseignement élémentaire suit un tout autre processus. En effet, le système décimal est difficile à comprendre par de jeunes enfants qui n'ont pas encore une notion claire du nombre. On fait alors appel en premier aux calculs dans différentes bases (plus petites que dix) afin de pouvoir introduire un système de numération déjà complexe à partir de collections d'objets que l'enfant peut manipuler (par exemple il n'est pas question de distribuer mille cubes à un enfant, mais si on lui en donne vingt sept à grouper en base trois, il arrivera à l'écriture 1000). L'enfant assimilera donc, ainsi plus facilement la numération de position, puis les techniques des opérations, qu'il n'aura plus qu'à appliquer en base dix.

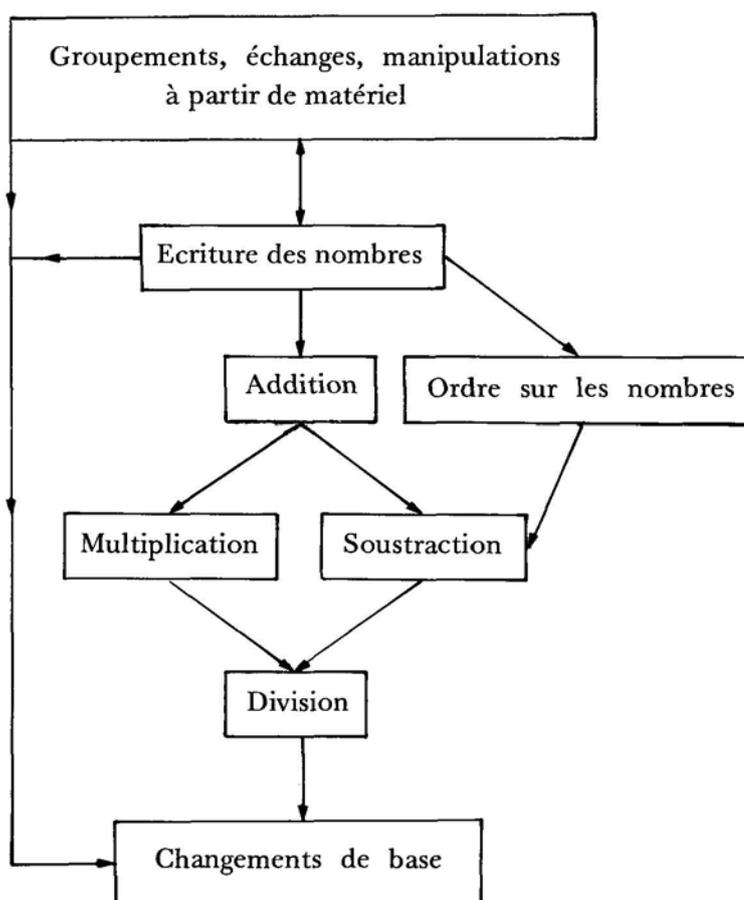
Au Cours Moyen, on peut de plus utiliser les exercices tels que «changements de base» pour mettre en oeuvre les techniques opératoires dans la base dix.

Nous ne nous intéresserons pas ici à l'aspect historique de la numération : échanges (ou groupements) réguliers ou non, numération de position ou autre système, introduction du zéro, etc...

Pour comprendre les principes de la numération, il est essentiel de commencer à travailler à partir de matériel (ce qui ne veut pas dire nécessairement matériel structuré acheté dans le commerce). Nous n'utiliserons ici qu'une sorte de matériel : les cubes emboîtables (nous l'avons choisi pour la commodité des explications).

Remarquons au passage que, lorsqu'on fait manipuler des enfants, il est préférable d'employer diverses sortes de matériel afin que les notions étudiées ne restent pas, dans leur esprit, liées au matériel utilisé.

ORGANIGRAMME



I - GROUPEMENTS, MANIPULATIONS A PARTIR DE MATERIEL

1.1 Soit un entier naturel n strictement supérieur à 1, que l'on appellera base, et un ensemble de cubes accrochables que l'on va grouper selon les règles suivantes :

- chaque fois que l'on a n cubes, on doit les réunir en une barre.
- chaque fois que l'on a n barres, on doit les réunir en une plaque.
- chaque fois que l'on a n plaques, on doit les réunir en un cube de plaques.
- etc...

1.2 Etude d'un exemple

Groupons en base quatre, d'après les règles précédentes, les cubes d'un ensemble donné de cubes.

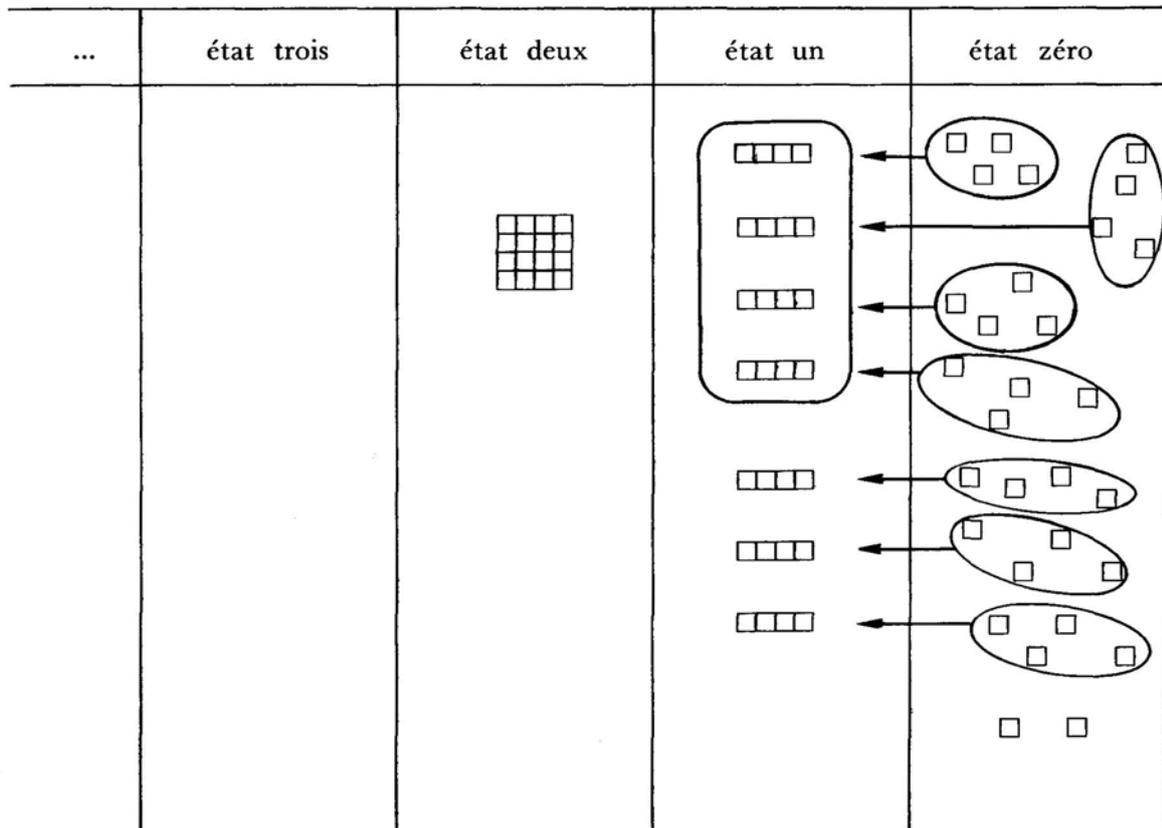
1.2.1 - On fait tous les groupements possibles de quatre cubes
On obtient donc un certain nombre a de barres et un nombre x de cubes tel que : $0 \leq x < 4$.

- Si a n'est pas inférieur à 4, on fait tous les groupements possibles de quatre barres. On obtient donc un certain nombre b de plaques et un nombre y de barres tel que : $0 \leq y < 4$.

- Si b n'est pas inférieur à 4, etc...

- On arrête quand on ne peut plus appliquer les règles données.

1.2.2 Disposition pratique



On a choisi ici d'appeler «état zéro», «état un», «état deux» les différentes étapes, mais tout autre vocabulaire conviendrait. Ce choix étant fait, on appellera chiffre d'état zéro le chiffre le plus à droite d'un nombre donné, chiffre d'état un le chiffre écrit au 2ème rang à partir de la droite...

Pour que ce processus soit cohérent, on admettra que quelle que soit la manière de faire les groupements, on obtient le même résultat.

On a alors un certain nombre de . . ., plaques, barres, cubes, que l'on peut représenter ainsi :

..	Plaques	Barres	Cubes
..	z	y	x
	1	3	2

On convient de respecter toujours cette disposition, quelle que soit la base envisagée, et on ne matérialise plus les colonnes. On obtient alors l'écriture, en base quatre, du nombre d'éléments de l'ensemble donné de cubes :

... z y x_(quatre) ou 1 3 2_(quatre) pour l'exemple du paragraphe 1.2.2

On pourra se dispenser d'écrire la base à côté de chaque nombre si l'on travaille dans un système de base donné et si l'on a explicitement indiqué celle-ci en début de calcul.

1.2.3 Remarque : c'est une raison historique qui explique que l'on écrive les unités d'état 2 à gauche des unités d'état 1, etc... : ce sont les Arabes, dont l'écriture va de la droite vers la gauche, qui ont mis au point le système de numération en base dix.

1.3 Exercices

1.3.1 Prenez des ensembles quelconques de cubes et utilisez la méthode donnée pour écrire le nombre de leurs éléments dans différentes bases.

1.3.2 Pourquoi l'entier n définissant la base doit-il être choisi supérieur à 1 ?

II - ECRITURE DES NOMBRES DANS UN SYSTEME DE BASE DONNE

2.1 Ecriture de nombres consécutifs dans un système de base donné.

2.1.1 Exemples

Voici l'écriture de nombres consécutifs en base trois :

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210 ...

2.1.2 Remarques

En base n, il faut n symboles différents pour écrire les nombres. Si la base est inférieure à dix, on utilise souvent, pour plus de facilité, certains chiffres du système décimal, correspondant à : zéro, un, deux, ..., n moins un.

Si la base est supérieure à dix, on adjoint d'autres symboles aux chiffres du système décimal. Par exemple, voici les chiffres que l'on peut utiliser en base douze : 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - α - β .

D'après ces conventions, n s'écrit toujours 10 en base n.

2.1.3 Attention

Le nombre 14033 doit être lu en base n «différente de dix» : un, quatre, zéro, trois, trois. La lecture : quatorze mille trente trois est réservée à la base dix.

2.2 Exercices

2.2.1 En base dix, le nombre 743 peut se décomposer comme suit : $743 = 700 + 40 + 3$. Peut-on décomposer d'une manière analogue, les nombres dans un système de base n ?

2.2.2

Comment reconnaître dans l'écriture en base deux si un nombre est pair (ou impair) ?

III - COMMENT ORDONNER DES NOMBRES ECRITS DANS UN SYSTEME DE BASE DONNE ?

3.1 Comparaison de deux nombres écrits dans un système de base donné

- Si les nombres ne sont pas écrits avec le même nombre de chiffres : le plus grand est celui qui s'écrit avec le plus grand nombre de chiffres.

- Si les deux nombres s'écrivent avec autant de chiffres : on compare alors les chiffres de rangs identiques à partir de la gauche.

- ou ces chiffres sont inégaux et au plus grand de ces deux chiffres correspond le plus grand des deux nombres considérés.

- ou ces chiffres sont égaux et on compare alors de la même façon ceux de rang immédiatement à droite.

Exemple : voici en base huit des nombres classés par ordre décroissant : 463041 - 52311 - 52011 - 1307 - 1267 - 1260

3.2 Exercices : Dans un système de base donné, choisir des nombres quelconques et les classer par ordre croissant ou décroissant.

IV - TECHNIQUE DE L'ADDITION

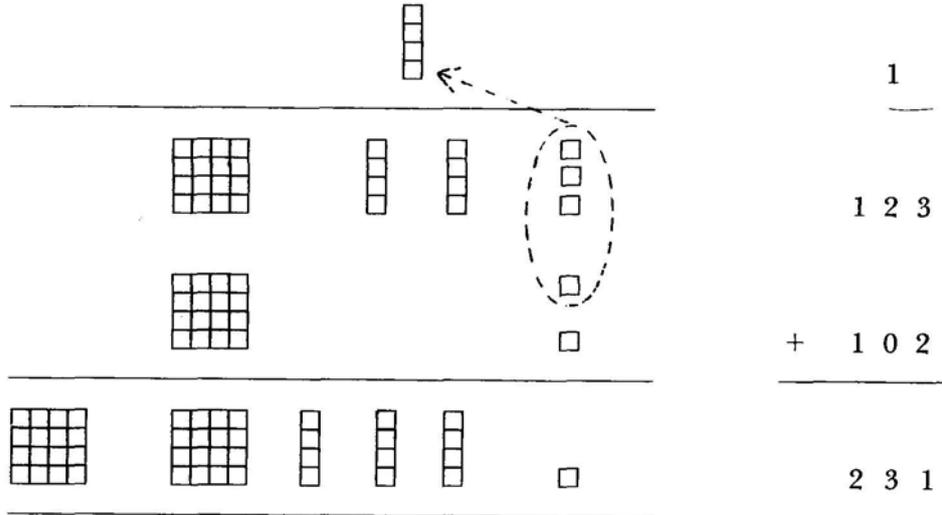
4.1 Exemple

Dans le système de base quatre, on se propose de trouver l'écriture de la somme des deux nombres 123 et 102.

On peut concrétiser le problème posé en faisant appel, de même qu'en I, aux cubes accrochables : au nombre 123 on fait correspondre 3 cubes, 2 barres,

1 plaque ; au nombre 102, on fait correspondre 2 cubes et 1 plaque. Mettons ensemble les cubes, barres, plaques ainsi obtenus (cf le schéma ci-dessous), on obtient (3 + 2) cubes, (2 + 0) barres, (1 + 1) plaques.

Mais nous sommes en base quatre, nous devons donc regrouper les cubes, puis les barres, puis les plaques... quatre par quatre. Dans le cas présent, nous obtenons finalement 1 cube, 3 barres, 2 plaques. Le nombre cherché est donc 231. On peut poser l'addition de la façon suivante (qui met en évidence la manipulation décrite)



4.2 Table d'addition

On connaît bien la table d'addition en base dix. Elle est reproduite ci-dessous.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

De la même façon, on pourra construire la table d'addition, dans un système de base n : pour cela, on écrira dans la case située à l'intersection d'une ligne et d'une colonne la somme en base n des nombres écrits à l'entrée de la ligne et de la colonne correspondante.

Attention : Il ne faut pas oublier qu'on ne trouve dans les «entrées» d'une table d'addition que les nombres d'un chiffre.

Exemple : table d'addition dans le système de base quatre

↖	+	0	1	2	3
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	10	
2	2	3	10	11	
3	3	10	11	12	

Les résultats nécessaires pour remplir la table étant simples, on peut soit les trouver directement, soit reprendre le matériel de départ. (cubes, ...)

4.3 Remarque

Les propriétés de l'addition sont indépendantes du système de numération choisi. Aussi la technique sera-t-elle la même quelle que soit la base n .

4.3.1 Exemple

On veut calculer, en base cinq, $23042 + 413$. Pour cela, il faut d'abord construire la table d'addition en base cinq. Puis on cherche dans la table la somme des unités. On lit $2 + 3 = 10$. Dans la colonne des unités, on pose 0 et on «retient» 1. On cherche alors dans la table d'addition la somme des chiffres d'état 1 soit $(4 + 1) + 1 = 10 + 1 = 11$ etc...

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 23042 \\
 + \quad 413 \\
 \hline
 24010
 \end{array}$$

4.3.2 Exercices

Effectuer les opérations suivantes en base deux :

$$101111 + 11011 ; 110111 + 111011 + 1101$$

Effectuer les opérations suivantes en base sept :

$$4230 + 155621 ; 13046 + 24526 + 506215$$

V - MULTIPLICATION DANS UN SYSTEME DE BASE DONNE

5.1 Tables de multiplication

Soit une base quelconque n . La table de multiplication en base n se construit en suivant le même principe que la table d'addition : dans chaque case on écrit le résultat en base n du produit du nombre écrit à l'entrée de la ligne correspondante et du nombre écrit à l'entrée de la colonne correspondante.

Exemple : table de multiplication en base quatre

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

5.2 Technique de la multiplication

Dans une base quelconque n , la technique de la multiplication est la même que dans le système décimal, à cette différence près que tous les calculs (multiplications partielles et addition finale) se font en base n . Pour faire une multiplication en base n , il faut donc utiliser les tables de multiplication et d'addition en base n .

Expliquez le mécanisme de la multiplication effectuée ci-dessous en base quatre :

$$\begin{array}{r}
 132 \\
 \times 23 \\
 \hline
 1122 \\
 330 \\
 \hline
 11022
 \end{array}$$

5.3 Exercices

Effectuer les opérations suivantes :

- en base quatre : 2103×31
- en base deux : 1011×110
- en base sept : 4621×502

VI - CHANGEMENT DE BASE

6.1 Passage de l'écriture en base dix à l'écriture dans une base quelconque n .

6.1.1 Revenons à notre matériel et à l'exemple donné au paragraphe 1.2 : soit à grouper en base quatre un tas de p cubes. (p étant le nombre de cubes en base dix)

Pour déterminer le nombre x de cubes qui restent lorsque l'on a effectué la première manipulation (construire toutes les barres possibles), il suffit d'effectuer la division euclidienne de p par 4, il vient :

$$p = (4 \times a) + x \text{ avec } 0 \leq x < 4$$

Pour déterminer ensuite le nombre y de barres que l'on a après avoir effectué la seconde manipulation (regrouper les barres pour obtenir des plaques), on fait alors la division euclidienne de a par 4 et on obtient :

$$a = (4 \times b) + y \text{ avec } 0 \leq y < 4$$

De la même façon, pour obtenir le nombre z de plaques, on effectue la division de b par 4 et on a :

$$b = (4 \times c) + z \text{ avec } 0 \leq z < 4$$

etc... jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient nul.

L'écriture en système de base quatre du nombre donné en système décimal est alors ... $z y x$ (quatre) .

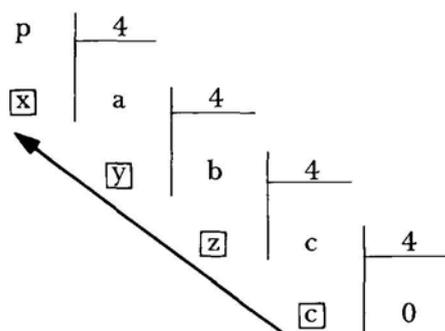
Remarque :

Les divisions successives ont été, bien entendu, effectuées en base dix.

6.1.2 Disposition pratique des calculs

Supposons que le nombre c obtenu ci-dessus soit strictement inférieur à 4.

On peut alors résumer de la manière suivante les calculs introduits en 6.1.1.



Le nombre p donné en base dix s'écrit alors : $c z y x$ en base quatre.

6.1.3 Exemples numériques

Ecrire en base quatre le nombre 30 du système décimal, en base sept le nombre 631 du système décimal.

$$\begin{array}{r|l}
 30 & 4 \\
 \hline
 \boxed{2} & 7 \quad | \quad 4 \\
 & \boxed{3} \quad | \quad 1 \quad | \quad 4 \\
 & & \boxed{1} \quad | \quad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 631 & 7 \\
 \hline
 01 & 90 \quad | \quad 7 \\
 \boxed{1} & 20 \quad | \quad 12 \quad | \quad 7 \\
 & \boxed{6} \quad \boxed{5} \quad | \quad 1 \quad | \quad 7 \\
 & & \boxed{1} \quad | \quad 0
 \end{array}$$

$$30 = 132_{(\text{quatre})}$$

$$631 = 1561_{(\text{sept})}$$

Remarque : On convient de ne pas mettre la base à côté d'un nombre écrit en base dix.

6.2 Passage de l'écriture dans un système de base quelconque à l'écriture dans le système de base dix.

6.2.1 Réfléchissons : que signifie 3275 dans le système décimal ?

C'est 3 unités d'état trois, 2 unités d'état deux, 7 unités d'état un, 5 unités d'état zéro.

$$3275 = 3000 + 200 + 70 + 5$$

$$3275 = (3 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (7 \times 10) + 5$$

10 étant le nombre dix écrit en base dix.

6.2.2 Recherche d'une méthode :

a) Soit en base quatre le nombre 1121. Nous voulons l'écrire en base dix.

$$1121_{(\text{quatre})} = 1000_{(\text{quatre})} + 100_{(\text{quatre})} + 20_{(\text{quatre})} + 1_{(\text{quatre})}$$

soit :

$$1121_{(\text{quatre})} = (1_{(\text{quatre})} \times 10^3_{(\text{quatre})}) + (1_{(\text{quatre})} \times 10^2_{(\text{quatre})}) + (2_{(\text{quatre})} \times 10_{(\text{quatre})}) + 1_{(\text{quatre})}$$

Pour alléger l'écriture ci-dessus, nous adopterons la convention d'écriture suivante :

$$1121_{(\text{quatre})} = \overbrace{(1 \times 10^3) + (1 \times 10^2) + (2 \times 10) + 1}^{\text{quatre}}$$

Pour obtenir l'écriture de ce nombre en base dix, il nous suffit d'écrire le second membre de l'égalité ci-dessus en base dix. Nous obtenons (puisque $10_{(\text{quatre})} = 4$)

$$1121_{(\text{quatre})} = \overbrace{(1 \times 4^3) + (1 \times 4^2) + (2 \times 4) + 1}^{\text{dix}}$$

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 3 \quad 5 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \times 36 \quad \times 6 \quad \times 1 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 144 \quad + \quad 18 \quad + \quad 5 = 167
 \end{array}
 \qquad
 435_{(\text{six})} = 167$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \times 32 \quad \times 16 \quad \times 8 \quad \times 4 \quad \times 2 \quad \times 1 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 32 \quad + \quad 0 \quad + \quad 8 \quad + \quad 4 \quad + \quad 0 \quad + \quad 1 = 45
 \end{array}
 \qquad
 101101_{(\text{deux})} = 45$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 4 \quad 7 \quad 0 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \times 512 \quad \times 64 \quad \times 8 \quad \times 1 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 512 \quad + \quad 256 \quad + \quad 56 \quad + \quad 0 = 824
 \end{array}
 \qquad
 1470_{(\text{huit})} = 824$$

6.2.6 Exercices :

Ecrire en base dix les nombres suivants :

$21201_{(\text{trois})}$; $415_{(\text{neuf})}$; $100101_{(\text{deux})}$; $10001_{(\text{cinq})}$; $322_{(\text{sept})}$; etc...

6.2.7 Autre écriture possible

On se propose toujours de passer de l'écriture en base n à l'écriture en base dix. Mais on va essayer cette fois d'obtenir un algorithme simple faisant intervenir des machines à multiplier et des machines à ajouter déterminées à chaque fois de manière très simple.

Cherchons, tout d'abord, une suite de machines permettant de transformer, en base dix, 0 en 3458, on obtient entre autres, la suite :

$$\begin{array}{cccccccc}
 + 3 & \times 10 & + 4 & \times 10 & + 5 & \times 10 & + 8 & \\
 0 \longrightarrow & 3 \longrightarrow & 30 \longrightarrow & 34 \longrightarrow & 340 \longrightarrow & 345 \longrightarrow & 3450 \longrightarrow & 3458
 \end{array}$$

Recommençons avec 5269 : on trouve

$$\begin{array}{cccccccc}
 + 5 & \times 10 & + 2 & \times 10 & + 6 & \times 10 & + 9 & \\
 0 \longrightarrow & 5 \longrightarrow & 50 \longrightarrow & 52 \longrightarrow & 520 \longrightarrow & 526 \longrightarrow & 5260 \longrightarrow & 5269
 \end{array}$$

On remarque alors que les opérateurs additifs sont obtenus en faisant intervenir successivement les chiffres du nombre étudié, l'opérateur multiplicatif qui intervient étant alors défini par la base dans laquelle on veut écrire ce nombre. Les calculs indiqués par les opérateurs se font évidemment dans le système décimal.

Supposons maintenant que nous cherchions l'écriture, dans le système décimal, de $1121_{(\text{quatre})}$. Nous pourrions nous y prendre de la même façon, la seule différence étant que $1121_{(\text{quatre})}$ étant écrit en base quatre l'opérateur multiplicatif intervenant sera, non plus dix mais 4.

On aura donc :

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{\times 4} 20 \xrightarrow{+2} 22 \xrightarrow{\times 4} 88 \xrightarrow{+1} 89$$

$$\text{d'où } 1121_{(\text{quatre})} = 89$$

De même $3022_{(\text{quatre})} = 202$ car :

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{\times 4} 12 \xrightarrow{+0} 12 \xrightarrow{\times 4} 48 \xrightarrow{+2} 50 \xrightarrow{\times 4} 200 \xrightarrow{+2} 202$$

De même $4\beta 9_{(\text{douze})} = 617$ car :

$$0 \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{\times 12} 48 \xrightarrow{+11} 59 \xrightarrow{\times 12} 608 \xrightarrow{+9} 617$$

6.3 Remarques sur les changements de base

Pourquoi avoir deux méthodes différentes de passage d'une base dans une autre lorsque l'une de ces bases est la base dix ? Parce que chaque fois, l'on privilégie la base dix.

Reprenons les deux méthodes données en 6.1.1 et en 6.2.2 et montrons qu'elles sont toujours applicables.

6.3.1 Pour écrire $152_{(\text{dix})}$ en base quatre, utilisons la méthode 6.2.2.

Décomposons 152 en base dix :

$$152 = \overbrace{(1 \times 10^2) + (5 \times 10) + 2}^{\text{dix}}$$

Écrivons tous les nombres de cette décomposition en base quatre puis calculons (toujours en base quatre) :

$$152 = \overbrace{(1 \times 22^2) + (11 \times 22) + 2}^{\text{quatre}}$$

$$152 = \overbrace{1210 + 302 + 2}^{\text{quatre}}$$

$$152 = 2120_{(\text{quatre})}$$

Soit, avec la disposition 6.2.3 (ici les chiffres du nombre donné doivent être écrits en base quatre, et les calculs faits en base quatre), soit en remarquant que $22^2_{(\text{quatre})} = 1210_{(\text{quatre})}$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \downarrow \\
 \times 1210 \\
 \downarrow \\
 1210
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 11 \\
 \downarrow \\
 \times 22 \\
 \downarrow \\
 302
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \downarrow \\
 \times 1 \\
 \downarrow \\
 2
 \end{array}
 = 2120_{(\text{quatre})}$$

ou avec la disposition 6.2.7 (tous les calculs se faisant en base quatre, chaque nombre étant écrit en base quatre)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + 1 & \times 22 & + 11 & \times 22 & + 2 & \\
 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 22 & \longrightarrow & 33 & \longrightarrow & 2112 & \longrightarrow & 2120
 \end{array}$$

6.3.2 Pour écrire en base dix $1121_{(\text{quatre})}$ utilisons la méthode 6.1.1

Tous les nombres seront écrits en base quatre, tous les calculs se feront en base quatre.

Dix s'écrit $22_{(\text{quatre})}$

$$\begin{array}{r|l}
 1121 & 22 \\
 021 & 20 \\
 \hline
 \boxed{21} & \boxed{20} \quad 0
 \end{array}$$

Il reste à traduire en chiffres de la base dix les restes écrits en base quatre des divisions.

$$20_{(\text{quatre})} = 8 \quad \text{et} \quad 21_{(\text{quatre})} = 9$$

$$\text{Donc : } 1121_{(\text{quatre})} = 89$$

6.3.3 Comment passer de l'écriture dans une base n à celle dans une base p , n et p étant différents de dix ?

VII - NOUS VOUS PROPOSONS D'ESSAYER D'ETUDIER LA SOUSTRACTION ET LA DIVISION DANS UNE BASE DONNEE n .

Nous traiterons ces questions dans un prochain bulletin.