AUTOUR DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE

Deuxième partie

Alain MERCIER
Jacques TONNELLE
IREM d'Aix-Marseille

Le lecteur trouvera ci-après la deuxième partie d'un dossier élaboré à l'occasion et dans le cadre d'un stage de formation continue de quatre jours, réalisé, sous l'égide de la MAFPEN de l'Académie d'Aix-Marseille, et à l'intention de professeurs de Collège confrontés à la mise en oeuvre de nouveaux programmes, par une équipe de l'IREM d'Aix-Marseille constituée d'Yves Chevallard, Michel Jullien, Alain Mercier et Jacques Tonnelle.

Le texte qui suit se compose de la troisième section, intitulée ***Vers une étude rationnelle de l'espace et des objets qui sont dans l'espace.*** *On y engage l'étude de l'activité géométrique que les programmes induisent, et de la solution que les manuels proposent ; on y cherche une solution compatible avec les contraintes mises en évidence dans la première section, qui se terminait sur cette déclaration :*

> « Le savoir géométrique - la géométrie - a été associé depuis ses origines à l'aventure de la civilisation occidentale. Dans cette entreprise, il a joué constamment un double rôle. D'une part, la géométrie s'est constituée comme une science de l'espace, se fixant ses propres valeurs, ses propres enjeux, ses propres problèmes, et ayant pour cela un développement partiellement autonome. Socialement, elle a constitué de ce point de vue un savoir savant, proposé en modèle à tous les autres (quand elle n'était pas en conflit avec eux - comme ce fut le cas avec la rhétorique, dans l'Europe des XVIIe et XVIIIe siècles). Dans le même temps, regardée culturellement comme théorie en acte de la rationalité, elle a, comme on l'a déjà souligné, joué un rôle majeur dans la formation intellectuelle et culturelle des hommes. Mais, d'autre part, quelque savante qu'ait été son organisation, la géométrie n'a jamais cessé de jouer le rôle de technologie de l'espace, de théorie de la maîtrise pratique de l'espace. Il s'agit-là d'une fonction sociale attestée dès la plus haute antiquité et dont même la tradition savante nous a rapporté l'existence à travers quelques épisodes mémorables - Thalès et les pyramides ou, plus près de nous, Archimède et ses « méchaniques ». (...) Toute représentation graphique est ainsi un moment, une forme déterminée (et variable), d'une modélisation de l'espace, moyen de production de connaissances que commande le savoir

«petit x» n° 29 pp. 15 à 56, 1991-1992

géométrique et qui commande l'action sur le sensible. C'est à cette notion que l'on devra tenter de rapporter ce que tout enseignement de la géométrie, quel qu'il soit, propose »[1].

Soulignons que ces textes ne se veulent nullement ouverts à une lecture cursive et indolente : faits pour l'étude, ils appellent l'étude...

C. VERS UNE ETUDE RATIONNELLE DE L'ESPACE ET DES OBJETS DE L'ESPACE

1. Le lexique des programmes de géométrie

La difficulté de l'analyse que nous devons mener provient de l'absence de références savantes sur le sujet. Dans la « pratique savante » en effet, les mathématiciens ne s'embarrassent pas de nombreuses distinctions sur la nature des objets qu'ils manipulent pour produire des mathématiques, parce qu'en dehors des rares périodes de « crise des fondements », il n'est pas besoin d'épistémologie pour produire des savoirs nouveaux. Ainsi les mathématiciens, le plus souvent, n'étudient pas les problèmes spatiaux, mais des systèmes géométriques pour lesquels ils disposent des schémas correspondants : ce qu'ils appellent *les figures* géométriques. Ils n'ont, souvent, même pas besoin de « réaliser » ces figures, parce qu'elles sont décrites dans d'autres formalismes (algébriques, etc.) avec bien plus d'efficacité (une figure est pour eux ce que certains agents du système d'enseignement appelleraient une configuration). Les multiples apparences et fonctions des figures induisent en partie, pour les activités graphiques et les objets qu'elles produisent, une confusion des rôles que nous rencontrons jusque dans les mathématiques savantes, dès que le travail ne porte pas sur les fondements mêmes de la géométrie.

Etudier le lexique des programmes du Collège, ce sera pour nous étudier le type de savoirs géométriques et de savoirs sur l'espace que les programmes proposent d'enseigner. C'est étudier conjointement les effets, dans la rédaction de ces programmes, de formulations venues de la pratique savante ordinaire, parce qu'elles vont contraindre l'action enseignante : en analysant ces contraintes, nous tentons de reconquérir une part de la liberté que, en principe, le texte des programmes devrait ouvrir à l'enseignant.

Le titre général des programmes actuels (1991) pour le Collège est dans la ligne du mouvement de promotion de l'activité de l'élève, pour les questions non-géométriques comme pour celles qui nous intéressent ici : «*Travaux* géométriques». Dès la première phrase, le ton est donné. Pour la sixième comme pour les classes suivantes, la même phrase initiale est répétée : « L'objectif fondamental demeure la *description* et la *représentation d'objets* géométriques usuels du plan et de l'espace ». Ces objectifs demeureront tout au long du collège. Ils commandent le titre de cet article, mais nous nous sommes proposé, avec *l'étude* des objets de l'espace, l'étude de l'espace lui-même.

---

1 Chevallard Y., Jullien M. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, Première partie, *Petit x, 27,* 41-76.

Ces commentaires induisent une première limitation, et une confusion. La limitation est évidente : l'usage de ces objets « usuels » du plan ou de l'espace qui sont des objets « géométriques » n'est-il pas trop réduit, quand on se limite à les *décrire* et à les *représenter* ? La confusion est plus délicate à montrer : ce n'est pas un usage matériel des objets géométriques, ce n'est pas non plus un usage géométrique des objets matériels qui est demandé ici par les commentaires.

Si l'on considère par exemple, en prenant le mot « géométrique » dans son sens culturel, que des cubes matériels - des cubes de bois - sont des objets géométriques, quel en est l'usage et en quelles opérations sont-ils usuels ? Si l'on considère les triangles tracés sur une feuille de papier, et si on les pose comme des objets matériels, là encore, de quels usages matériels sont-ils les objets ? En étant réalistes, et en prenant le mot d'« objets géométriques » dans son sens mathématique, nous pourrions dire que leur usage, en classe, consiste surtout ...à être les objets de notre intérêt par leur participation aux figures. Mais si les objets sont usuels, les figures, elles, s'étudient (d'une étude qui s'outille en Sixième et Cinquième des symétries centrale et orthogonale). Elles ne se décrivent ni ne se représentent, puisqu'elles sont les représentations matérielles des objets théoriques de la géométrie élémentaire (bien que la géométrie élémentaire n'ait pas de place en tant que théorie constituée, dans ce contexte). Une interprétation du texte dans les termes de la géométrie euclidienne traditionnelle (telle par exemple qu'elle pouvait vivre avant la réforme dite « des mathématiques modernes ») ne sera pas plus aisée à tenir[2].

Continuons notre lecture : « Dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient. Elles fournissent un terrain pour dégager quelques propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité ». Ainsi se termine l'introduction, et cette fin nous éclaire.

L'enjeu déclaré de l'enseignement de la géométrie au collège est bien *l'étude de l'espace sensible*. Cette étude est censée *prendre appui sur l'étude (expérimentale) des objets* qui sont dans l'espace.

Pour les objets qui sont dans l'espace sensible « à trois dimensions », les confusions que nous avons repérées amènent les auteurs à pencher du côté des objets *matériels*, que l'on construit avec des ciseaux et de la colle (puisqu'ils n'est pas possible d'atteindre la matérialité de ces objets dans le laboratoire graphique de la feuille de papier indépendamment d'une technique permettant de les représenter). Les mêmes confusions les amènent à pencher du côté des objets *géométriques* lorsqu'il est question des objets de l'espace plan (le travail expérimental sur les objets matériels que sont les tracés sur la feuille de papier étant identifié avec un travail géométrique sur les figures de l'espace géométrique).

Ainsi, en un immense effet de glissement de sens dû au partage didactique des tâches, les enseignants doivent donner à voir des propriétés de l'espace, les classer selon que les transformations les conservent ou non, « habituer les élèves à *conjecturer*, à *caractériser* une figure, à *construire* un quadrilatère en mettant en oeuvre droites et cercles, dégager *des propriétés* générales, etc. », tandis que les élèves doivent manifester des compétences bien matérielles : ils « *représentent* un prisme droit, *fabriquent* un prisme droit, *construisent* le symétrique d'un point, d'une droite, d'une ligne polygonale, par demi-tour ou pliage, *reconnaissent* dans une figure un

---

2 Il semble en effet que l'importation de la géométrie euclidienne classique (sans autre forme de procès, c'est-à-dire comme si cette importation allait de soi parce que son usage était classique il y a quelques décennies) par le biais de l'introduction des objets géométriques dans la pratique matérielle de l'espace sensible ait pour effet de dépouiller cette pratique matérielle de toute effectivité. Nous y reviendrons.

centre ou un axe de symétrie, *reproduisent* sur papier quadrillé ou blanc, un parallélogramme donné, *tracent* le cercle circonscrit à un triangle, *tracent* un triangle quand ils connaissent les longueurs des trois côtés, etc. ». Que, de ces activités, se dégagent des propriétés du parallélisme ou de l'orthogonalité est un résultat aussi aléatoire que l'émergence d'un texte en prose dans l'activité quotidienne de Monsieur Jourdain. Son professeur de philosophie n'y suffisait pas plus que les enseignants d'aujourd'hui. L'injonction d'agir ainsi est pourtant inscrite dans les commentaires du programme.

L'empirisme est la position épistémologique qui permet de penser que l'activité scolaire proposée aux élèves dans ce cadre peut les conduire aux savoirs mathématiques attendus : il donne en effet à penser que le savoir s'obtient par « abstraction » de la pratique, en un processus qui tient d'une alchimie de la pensée : l'extraction de la quintessence de l'action. Nous savons que les connaissances géométriques ne se construisent pas ainsi, pour en avoir analysé l'émergence dans les cas où nous pouvions disposer de documents analysables : les cas historiques. C'est ce que nous le montrerons d'abord.

Les élèves de Collège, en attendant que l'alchimie scolaire transmue leur activité en savoir, restent dans la position d'avoir à tracer « des traits, des traits, encore des traits », selon le mot de l'un d'entre eux à qui l'on posait la question « Qu'est-ce, pour toi, que la géométrie ? ». D'autres, en 6° et 5° notamment, pensent que la géométrie, c'est le calcul des longueurs et des surfaces : les autres activités qu'ils ont pu mener dans le cadre de la classe de géométrie ne leur sont pas repérables, elles ne sont pas pour eux des activités relevant d'un savoir nommable, comme le calcul. L'enquête peut se répéter aisément, elle produit assez systématiquement les mêmes réponses, et les élèves échouent tout autant à nommer « un phénomène géométrique ».

Pour prendre ici un exemple, la confusion entre preuve de constructibilité et procédé de tracé est à l'œuvre dans nombre d'exercices proposés dans les manuels actuels (ainsi que dans d'autres ouvrages destinés aux professeurs de collège comme, par exemple, le « Suivi scientifique 1985-1986 » des IREM), parce que, dans l'ensemble de ces travaux, l'oubli des phénomènes produits par la transposition didactique et en premier par le libellé des commentaires des programmes induit cette confusion. Le premier signe s'en trouve dans l'utilisation synonymique des verbes « tracer » et « construire ». Utiliser indifféremment ces deux termes pour indiquer la consigne de tel ou tel exercice ne permet pas à l'élève de reconnaître ce qu'on attend de lui. Ainsi verra-t-on coexister les énoncés suivants, dans la même série d'exercices du même ouvrage[3] :

> *Construis un segment de longueur 2,7 cm et le cercle qui admet ce segment pour diamètre.*
>
> *Trace trois points non alignés A, B et C, puis le cercle passant par ces points.*

Une telle distinction manifeste-t-elle une attente différente, ou est-ce un effet de style, l'emploi d'un synonyme pour éviter la répétition d'un terme ? Est-ce que dans

3 Il s'agit du manuel *Mathématiques 6e*, Collection Didamath, Didier, Paris, 1986, pp. 89-90.

le deuxième exercice, le mot « Trace » sous-entend qu'une figure obtenue par essais et erreurs - par approximations successives - sera acceptée par le professeur ? Et est-ce que le mot « Construis » implique que l'on devra donner un algorithme de construction à la règle et au compas, puis, justifier que l'algorithme produit bien ce qu'il annonce ? (Ces exercices suivent une leçon sur la médiatrice). La réponse à ces questions dépend essentiellement des exigences habituelles du professeur dans sa classe et l'élève, face à tant d'implicite dans la consigne, a pour seul guide de conduite ces habitudes, qui apparaissent comme les caractères personnels de tel enseignant : ses caprices.

En de telles occasions, ce que l'élève risque surtout d'apprendre c'est à deviner ce qui lui apparaît comme *le désir* du professeur à son endroit. Cela instaure une relation didactique qui sera nécessairement une relation à forte charge affective : une relation du type « maternage »[4]. Par ce moyen, les enfants deviennent propres, apprennent à marcher et à manger seuls, mais c'est un procédé bien peu « classique » pour des savoirs scolaires, et la gratification possible est bien abstraite, dans ce cadre. Si, même, l'enseignant réussit à éviter l'écueil du maternage au terme du glissement de sens de l'activité demandée aux élèves, il a peu de chances d'arriver à ne pas confondre ces trois registres de l'activité géométrique qui cherche à rendre compte de phénomènes spatiaux (j'ai nommé le tracé du schéma, la réalisation de l'expérience graphique, le tracé ou la construction de la figure de géométrie), et à engager l'étude des problèmes qui se posent à propos d'objets qui sont dans l'espace.

Le risque est alors bien grand, de ne plus être capable d'articuler si nécessaire les trois niveaux de l'activité graphique en géométrie, par exemple, au moment du travail de la rationalité à l'oeuvre dans activités géométriques, au moment où seront demandées les premières démonstrations, en Quatrième ou en Seconde.

2. La question de l'étude des objets de l'espace

> Socrate : *La musique et l'architecture seules savent user de moyens sensibles qui ne soient pas des ressemblances de choses sensibles, et des doubles des êtres connus ; donner des figures aux lois, ou déduire des lois elles-mêmes leurs figures (...) Les figures, ces êtres à demi concrets, à demi abstraits sont des êtres singuliers, véritables créatures de l'homme, qui participent de la vue et du toucher, mais aussi de la raison, du nombre, et de la parole (...)*
> Phèdre : *Mais toutes les figures ne sont-elles pas géométriques ?*
> Socrate : *Pas plus qu'un bruit n'est un son musical (...) Pas de géométrie sans la parole. Sans elle, les figures sont des accidents ; et ne manifestent, ni ne servent, la puissance de l'esprit. Par elle, les mouvements qui les engendrent étant réduits à des actes, et ces actes nettement désignés par des mots, chaque figure est une proposition qui peut se composer avec d'autres ; et nous savons ainsi, sans plus d'égards à la vue ni au mouvement, reconnaître les propriétés des combinaisons que nous avons*

---

4 Dans la relation dite « de maternage », l'apprentissage est la manifestation de l'amour de l'enfant pour la mère : l'anticipation du désir qu'elle a, de le voir manger, marcher, être propre, etc. La mère attend que cet amour se traduise par des comportements, et lorsque l'enfant a manifesté ces comportements, la mère montre son plaisir en gratifiant, en retour, l'enfant de son amour. En lui permettant par exemple un geste de réunion : elle le prend dans ses bras et il se serre contre elle.

faites ; et comme construire ou enrichir l'étendue, au moyen de discours bien enchaînés
Car qu'est-ce, la raison, sinon le discours lui-même, quand les significations des termes sont bien assurées de leur permanence, et quand ces significations immuables s'ajustent les unes avec les autres, et se composent clairement ? Et c'est là une même chose avec le calcul. (...) [5]

2.1. Le schéma, le croquis, les représentations

Dans la culture mathématique scolaire, on rencontre à peu près exclusivement un seul type d'objet graphique, les figures. Le schéma que l'on trouve parfois est considéré comme un *brouillon de figure*, dont la production serait l'effet d'un manque (de temps, de travail, etc.) et, dans certaines classes techniques où l'enjeu est de tracer la représentation d'un objet industriel, on trouve des *épures*. Afin de montrer les différences fonctionnelles entre figures « à la règle et au compas », « à main levée », et « schéma » ou « épure », nous allons remonter le temps - non parce que « c'était mieux, ou pire, avant », mais pour prendre de la distance avec les habitudes de la classe de mathématiques. Nous vivons ses pratiques en enseignants, en première personne, sans pouvoir prendre suffisamment de recul. Nous allons donc observer plus particulièrement ce qu'il en est des enjeux respectifs du schéma et de la figure.

Nous nous proposons de partir d'un « dessin » de Léonard de Vinci, qui représente une « pince serrante[6] » (figure1). On sait qu'il était un ingénieur, un inventeur, et qu'il possédait toutes les techniques du dessin en perspective, c'est pourquoi nous pouvons affirmer que dans un de ses tableaux, Léonard de Vinci n'aurait pas représenté ainsi une pince réelle, parce qu'il aurait respecté la perspective de l'objet : il est en effet l'un des tout premiers peintres à avoir systématiquement « saisi » tous les objets et personnages d'un tableau dans la même construction perspective et à avoir unifié par cette construction l'espace de la représentation, l'espace du tableau.

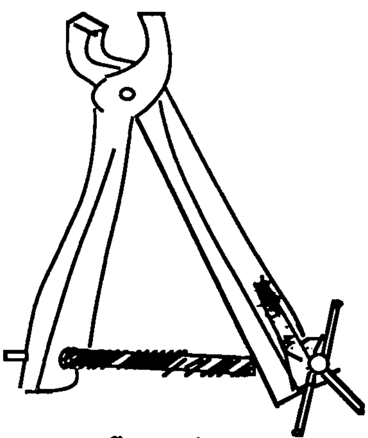


figure 1

Chacun peut cependant remarquer les « erreurs de perspective » dont cette « représentation » est truffée. Les articulations qui permettraient le fonctionnement effectif de l'objet, manquent. Il ne s'agit certainement pas du dessin qui représenterait une pince réelle, comme le peintre pourrait en tracer : Léonard de Vinci n'y aurait pas laissé ces « erreurs » descriptives.

5 Ces citations sont extraites d'un dialogue fictif écrit par Paul Valéry pour parler du travail de l'architecte. Valéry P. (1924), *Eupalinos*, (réédition 1944, Paris, Gallimard).

6 Dessin d'après Gille B. (1964), *Les ingénieurs de la renaissance*, Paris, Hermann.

Si la perspective avait été utile au travail technique, l'auteur ne se serait pas privé de faire appel à ses connaissances en la matière comme nous le voyons pour ces paliers anti-usure sur lesquels repose l'axe d'une meule[7] (figure 2). Que trouve-t-on sur la présentation de la pince, que nous appellerons un *schéma* contrairement à l'*objet* graphique de la figure 2, qui *représente l'effet technique d'un objet réel* ?

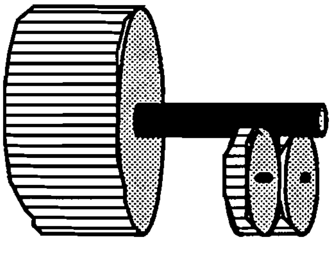


figure 2

Les crocs sont *dessinés*, pour qu'on reconnaisse qu'il s'agit d'une pince, mais ce dessin importe peu comme tel : il s'agit d'une simple *esquisse*. Les bras sont, eux aussi, esquissés. Les pièces importantes sont dans une représentation perspective mieux contrôlée : la vis de serrage, l'écrou qui maintient le bras, la manivelle en croix qui manoeuvre la vis, et l'évidement qui permet le jeu de la vis dans le bras mobile. Analysons la pince du point de vue de sa mécanique, nous comprenons que la vis est saisie dans le premier bras, avec lequel elle fait un angle constant, ce qui nécessite la longue ouverture que l'on peut voir dans le second bras.

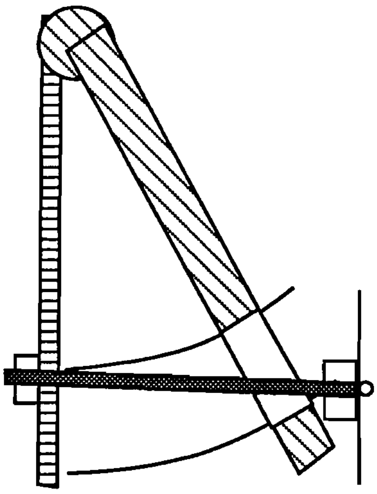


figure 3

L'étude géométrique (menée par le moyen de l'épure technique de la figure 3) montre la nécessité de cette ouverture pour assurer la mobilité des bras de la pince. A l'actif de cette étude, nous pouvons affirmer qu'une telle pince n'a pas existé. Nous pourrions nous en convaincre en cherchant une pince actuelle de même type : nous n'en trouverons pas de semblable. Un raisonnement mécanique immédiat nous en montre l'impossibilité : la réaction du bras sur l'écrou et sur la vis qui porte l'écrou tordrait immédiatement celle-là. Une pince serrante manoeuvrée par une vis existe sans doute dans l'arsenal des objets techniques, mais la vis doit s'y trouver prise entre *deux points articulés* aux bras qu'ils manœuvrent, afin que les articulations ne transmettent que des efforts de tension : la vis tire les écrous l'un vers l'autre.

Les recherches sur les utilisations possibles de la vis fleurissent dans les carnets techniques de la Renaissance, depuis sans doute que l'on commence à fabriquer des machines à tarauder et des tours à décolleter les filetages (pour les vis de bois, mais il est possible de commencer à rêver : nous trouverons bientôt des vis de laiton), ainsi que des machines à tailler les engrenages. Il est ainsi possible de penser mécanique, parce que l'on commence à maîtriser les idées sur les mécanismes qui guident ou transforment les mouvements et les forces, en même temps que l'on maîtrise mieux le travail du métal pour les éléments matériels de ces mécanismes. Léonard de Vinci lui même est connu pour avoir inventé plusieurs d'entre eux, dont certains ont été réalisés. Mais, sa statique était-elle trop rudimentaire pour qu'il puisse, dès le stade de la conception de l'outil, analyser la résultante de torsion s'exerçant sur la vis ? Sans doute. En tous cas, son schéma ne représente que ce qui, de l'idée de pince serrante, est, dans le premier moment du travail, sous contrôle : ce qui est graphiquement nécessaire à la compréhension de l'idée de l'objet, à la reconnaissance de sa fonction.

7 Léonard de Vinci, *Codex Madrid I.* il s'agit de la description d'un dispositif, observé en Allemagne par un de ses assistants.

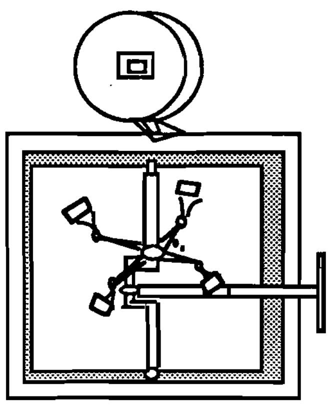


figure 4

La manivelle de manoeuvre de la vis (ou de l'écrou) par exemple, n'est pas représentée en perspective, de manière réaliste : ceci n'est décidément pas le dessin d'un objet. Observons encore le « moulin à bras »[8] de la figure 4 : c'est la première représentation certaine de ce mécanisme, un *système bielle-manivelle associé à un* volant d'inertie (un *régulateur à masses mobiles*), un mécanisme particulièrement original, qui transforme un mouvement alternatif en mouvement rotatif suffisamment régulier. La représentation de la partie « moulin » (conventionnelle) suffit tout juste à montrer une fonction de ce mécanisme et n'a pas été travaillée plus en détail.

Au delà des exigences de style, il ne s'agit de représenter que des *idées de machines*. Car lorsqu'un peintre fait des *esquisses* et des *croquis* préalables à un *dessin*, il est bien plus précis : les grues représentées par Peter Bruegel l'Ancien dans les tableaux représentant la construction de la Tour de Babel, le montrent à l'évidence. Mais il ne s'agit plus de l'étude d'un objet possible mais de la représentation (le dessin contrôlé par la technique du dessin perspectif) d'un objet mécanique qui est un des éléments du décor. Nous retiendrons l'exemple de ce tableau de B. Poccetti *Fabrication de la poudre à canon*, Florence (figure 5).

la couverture des ingénieurs de la renaissance

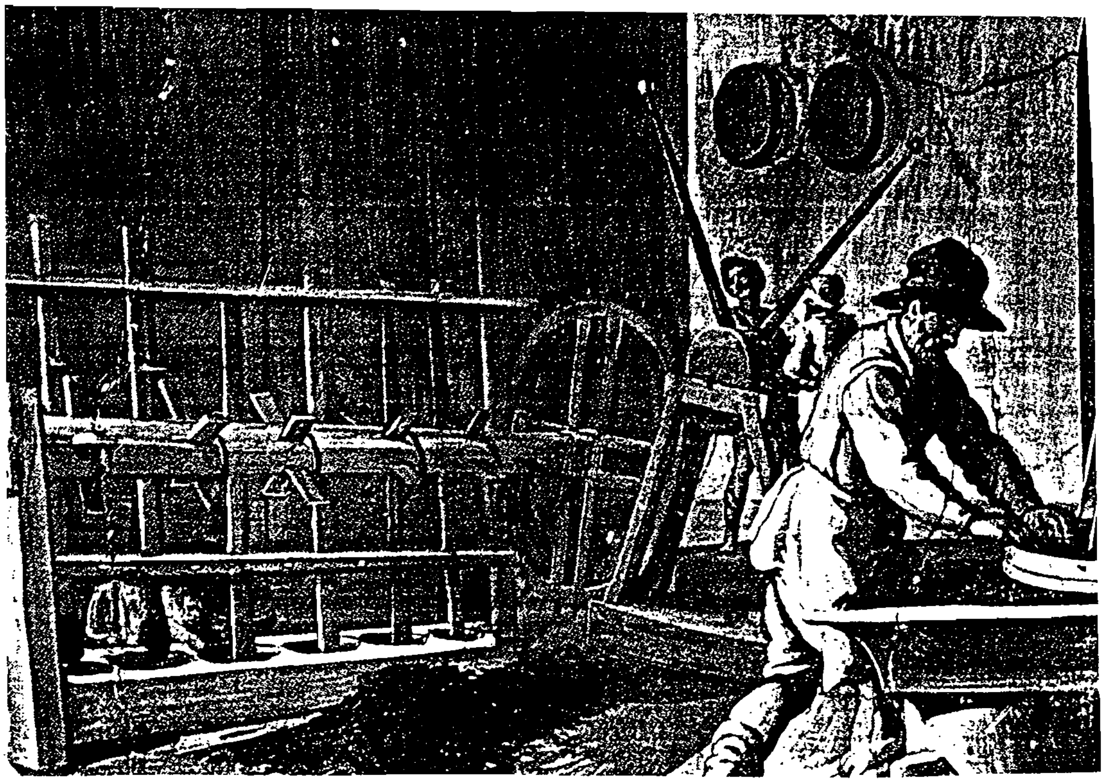


figure 5

8 Il provient d'un manuscrit (anonyme) que les érudits allemands ont appelé « de la guerre hussite ». Daté du début du 15ème siècle (postérieur à 1421), il a dû être réalisé dans la région située entre Munich et Nüremberg.

Nous pourrions dire alors que le dessin perspectif a pu, dans le dessin des peintres, unifier l'espace perceptif par le moyen de la représentation avant d'être l'outil d'un travail sur les caractères techniques des objets techniques. Léonard de Vinci est sans doute l'un des premiers ingénieurs de la Renaissance à engager cette évolution, qui trouvera son point culminant avec Stevin. Lorsque cette évolution sera accomplie, à la fin de la Renaissance, il n'y aura plus de travail possible sur la technique des objets mécaniques sans le dessin de ces objets dans un espace perspectif unifié : sans *l'épure technique* (qui évoluera pour donner la représentation en trois vues que nous connaissons).

2.2. Le schéma, outil d'étude des problèmes spatiaux

Nous appellerons dorénavant *schéma* l'objet graphique dont la fonction est *la représentation d'une idée* à propos d'un objet de l'espace ou d'un objet dans l'espace. Nous avons étudié l'exemple du schéma d'une vis de serrage pour une pince, d'un système bielle-manivelle régulé par un système à boules, etc. Nous allons étudier comment les schémas peuvent devenir des outils pour l'étude de problèmes spatiaux, et en particulier comment ils définissent un cadre où mener le travail sur le système de signes qu'ils forment - c'est la géométrie - et comment on passe ainsi du *schéma* à la *figure*. De l'outil d'étude des objets (ici, des objets mécaniques) qui sont dans l'espace à l'outil d'étude de l'espace où sont les objets (ici, l'espace de la mécanique).

Ce qui rend nécessaire le changement de cadre et le passage au cadre géométrique proprement dit, c'est que le schéma ne permet pas de *travailler* une idée, il permet seulement de la représenter, de la mettre spatialement en scène, parce qu'il n'est pas partie prenante d'un *système de signes*. La souplesse qui s'ensuit en fait tout l'intérêt, dans le premier moment du travail : s'il n'est pas *lui-même* outil sémiotique élaboré, il permet l'accès à un tel outil en introduisant au cadre théorisé de la géométrie. Nous pourrions bien sûr, pour montrer ce phénomène, revenir à Léonard de Vinci qui, dans ses études techniques sur les frottements et l'usure, a utilisé l'espace de la feuille de papier comme espace géométrisé pour la modélisation des questions mécaniques qu'il abordait ; nous pourrions aussi prendre un exemple contemporain ; mais nous disposons d'un exemple plus intéressant encore avec la *Statique*, de Simon Stevin, récemment rééditée[9].

L'étude en est particulièrement instructive, parce que les problèmes que Stevin se pose sont des problèmes qui se posent dans l'espace, mais ne sont pas des problèmes de l'espace. En étudiant la *Statique*, nous pourrons observer comment l'auteur se heurte à des obstacles dûs aux techniques de géométrisation des problèmes qu'il met au point : en surmontant ces obstacles il mathématise les problèmes de forces et il invente une science nouvelle[10] (qui se travaille dans le cadre d'un modèle géométrique). Stevin en effet construit la Statique comme une théorie : à la manière des « Eléments » d'Euclide, qui sont le modèle de la rationalité à son époque, c'est-à-dire sur le modèle de ce qui est pour lui la théorie mathématique de l'espace ; à la manière de « De l'équilibre des figures planes » d'Archimède. Il construit la Statique comme théorie mathématisée, non pas à l'image de la géométrie mais à l'aide de la géométrie. L'ouvrage qui nous intéresse ici est donc l'un des tout premiers traités de

9 1987, Paris, ACL-éditions.

10 La théorie des centres de gravité d'Archimède est une théorie des « centres géométriques ». Archimède, De l'équilibre des figures planes, (1971, Texte établi et traduit par Charles Mugler), Tome II, pp. 75-125, Paris, Les Belles Lettres.

physique moderne : de physique mathématique. L'auteur part de « définitions » et de « pétitions » pour fabriquer des « propositions » qui se divisent en « théorèmes » et « problèmes ». Nous reproduisons ci-dessous *l'argument* du premier livre, *Des Eléments de Statique*, avec la plupart des *définitions* et quelques extraits des *déclarations* initiales, puis nous étudions le premier *théorème* de ces Eléments en commentant sa démonstration. Nous suivons le travail de construction de la théorie, tout au long de l'évolution du *schéma* à la *figure*, qui caractérise ce travail.

ARGUMENT DU PREMIER LIVRE

Les Eléments de Statique (lesquels traitent des pesanteurs entendues en l'idée être sans matière) se divisera en deux parties, dont l'une sera de 14 définitions, et la seconde de 28 propositions, de la qualité des poids, qui sont de deux sortes, comme droits et obliques. Les droits ont deux espèces, à savoir élevants et déprimants, décrits dans les 18 premières propositions. Les obliques sont aussi de deux espèces, comme élevants et déprimants, décrits consécutivement, comme il se verra plus clairement en la table suivante.

La théorie des pesanteurs a deux parties, contenant :	la première 14 définitions		
	la seconde 28 propositions	droits et iceux	élevants déprimants
		obliques et iceux	élevants déprimants

PREMIERE PARTIE
Définition I.
Statique, est une science qui déclare les raisons, proportions et qualités des poids et pesanteurs des corps.
Déclaration.
Tout ainsi que la Géométrie considère les grandeurs des figures, et non pas leurs pesanteurs (...) de même la Statique considère leurs pesanteurs et non pas leurs grandeurs (...)
Définition II.
La pesanteur d'un corps, c'est la puissance qu'il a de descendre, au lieu proposé. (...)
Définition III.
Pesanteur connue est celle dont le poids se peut exprimer certainement. (...)
Définition IV.
Centre de gravité est celui, auquel si on imagine le solide être suspendu, il se tiendra en toutes les positions qu'on lui peut donner. (...)

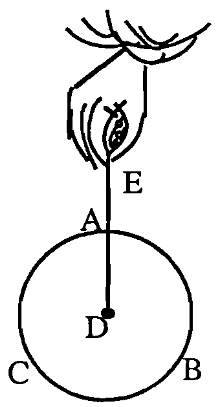


figure 6

Déclaration.
Soit ABC un globe de matière et pesanteur semblable de tout côté, suspendu en son centre D, par la ligne ED ; il apparaît qu'il se tiendra en toute sorte de position qu'on le tournera (...) Il faut comprendre qu'il y a un centre de gravité en tous corps, tant réguliers ou irréguliers (...) Le centre de gravité des figures ordonnées comme Colonnes, Globes, Sphéroïdes, et les cinq corps réguliers, et de matière uniforme, est le même centre que celui de leurs figures et grandeurs, qui s'appelle autrement centre géométrique. Quant aux solides qui n'ont pas la matière uniforme, il n'est pas nécessaire qu'ils aient ces deux centres en un même point (...)

On voit une pesanteur, représentée par un « globe » « suspendu » à un « fil » tenu par une main dessinée (figure 6). La difficulté est celle-ci : Stevin doit, pour réussir la géométrisation de son problème, *exprimer graphiquement la pesanteur*, puisque c'est une des grandeurs qui entrent dans la relation qu'il cherche. Ce problème nous permet de montrer un schéma au travail : il ne fonctionne ni comme représentation ni comme objet géométrique, d'autant que la pesanteur n'est pas une grandeur géométrique (une propriété de l'espace) et ne saurait être dessinée. Mais l'objet graphique proposé décrit graphiquement une expérience de pesée qui suppose une force opposée à la pesanteur, une force qui sert à la suspension de l'effet de pesanteur (qui suspend ...la descente du corps). L'intensité particulière de cette force n'est pas objet de calcul, ni même de théorie. C'est pourquoi le graphisme qui l'indique n'est pas géométrique : *la main la représente*, en « tenant » l'ensemble comme au bout d'un fil tendu. L'aspect « réaliste » de la main signifie que la force correspondante n'est pas modélisée, qu'elle n'est pas prise en compte dans l'étude du système. Cependant, le système est fermé grâce à sa présence : la main montre l'ouverture du système des forces qui serait réalisée en son absence.

L'objet graphique proposé n'est donc pas un dessin. S'il fallait encore nous en convaincre, remarquons que Stevin n'a pas *dessiné* un « globe », puisque le fil de suspension est tracé jusqu'au centre du trait circulaire qui désigne le globe ; l'ensemble ne forme pourtant pas une figure géométrique, la main dessinée le montre. Il s'agit de ce que nous avons appelé un schéma, de *la représentation d'une idée*, et non d'une description. L'effort de Stevin pour arriver à la saisie théorique du problème ne se donne pas à voir seulement dans le texte, mais jusque dans ce schéma, dont les éléments qui vont devoir être géométrisés sont nommés dès à présent selon les principes en vigueur dans le texte géométrique d'Euclide, D le centre, ABC le globe, ED la ligne selon laquelle se fait la suspension. La composante géométrique prendra de l'ampleur dans les schémas suivants, dont certains sont presque complètement épurés de l'idée même de pesanteur.

Définition V.
Diamètre de gravité d'un corps, est une ligne droite indéfinie, passant de quel côté que ce puisse être par le centre de gravité : Et tel diamètre étant perpendiculaire à l'horizon, s'appelle centre de gravité. (...)
Définition VI.
Plan de gravité d'un corps, est un plan tel qu'il puisse être, qui passe par le centre de gravité d'icelui (...)

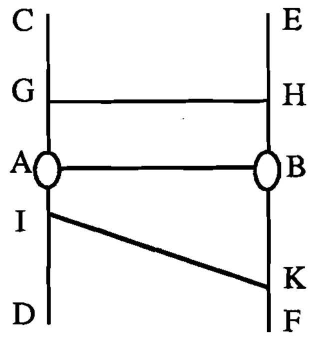


figure 7

Définition VII.
Toute ligne droite, comprise entre deux perpendiculaires de gravité, nous la nommerons verge, ou barre de gravité.
Déclaration.
Soient A et B deux corps, et leurs perpendiculaires de gravité CD et EF, entre lesquelles soient menées quelques lignes, comme GH, AB, ou IK, toute ligne tirée de même s'appelle verge ou barre de gravité des pesanteurs A, B, comme si c'était la verge d'une balance au dessous de l'examen.

Définition VIII.
Etant la verge ou barre divisée, (ayant les perpendiculaires de gravité) où les corps se peuvent tenir en équilibre, nous nommons les parties de la verge, rayons.
Déclaration.
Soient A et B deux corps, et CD une verge divisée en E, par la perpendiculaire de gravité FG, où sont les deux pesanteurs pendantes en équilibre, les deux parties de la verge CD, sont nommées, rayons (figure 8).

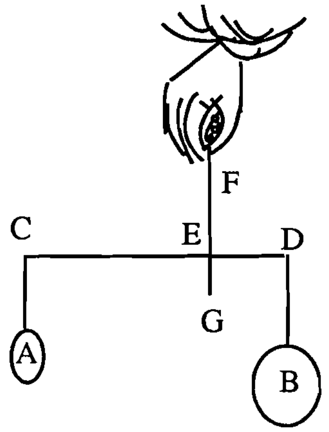


figure 8

Définition IX.
Et la perpendiculaire de gravité des deux pesanteurs est nommée une anse.
Définition X.
Et le point de l'anse, dans la barre, point stable.(...)
Définition XI.
Et les deux pesanteurs sont nommées équilibres, ou contre-poids.
Déclaration.
Comme A et B, en la 8° définition, soit que les pesanteurs soient égales ou inégales (...) car A démontre autant de force à la verge CD, que B (...) ils semblent être de pesanteur égale, mais ce n'est pas leur pesanteur seulement, mais aussi leur disposition (...)

Pétition I.
Que les pesanteurs égales aux rayons égaux soient équilibres.
Pétition II.
Qu'aux lignes mathématiques on puisse attacher ou poser quelque pesanteur que ce soit, sans qu'elles puissent rompre, ou plier.
Pétition III.
Et que la pesanteur, suspendue plus haut ou plus bas, demeure toujours de même poids.
Pétition IV.
Que par le plan qui coupe le colonne le long de l'axe, on entende la colonne.

Pétition V.
Que toutes les lignes à plomb (à savoir perpendiculaires à l'horizon) soient prises pour parallèles.

Stevin explique pourquoi il choisit ce modèle, et qu'il ne faut pas tenir compte du concours au centre de la terre des perpendiculaires de gravité (figure 9) :

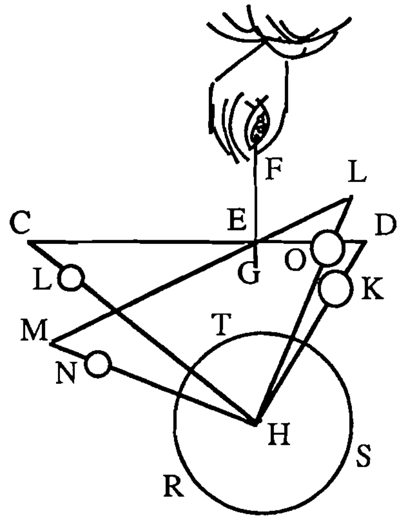


figure 9

« les équilibres ne seraient plus stables, et il n'y aurait plus que le globe à pouvoir répondre à la définition du centre de gravité ; ensuite, la raison du poids le plus pesant au plus léger ne serait pas celle du plus long rayon au plus court (...) Ce serait d'un inconvénient majeur(...) Enfin, éviter ce menu épluchement ne donnerait pas d'avantage pour la Statique-pratique ».
Le rapport du levier se démontre en effet grâce au parallélisme des perpendiculaires de gravité, il devient inexact dans un modèle où le parallélisme ne figurerait plus. Ce sont les éléments d'une démonstration possible d'une propriété du domaine de réalité étudié, mais il n'est pas encore du propos de l'auteur d'entrer dans le vif de son sujet. C'est l'objet du premier théorème.

Théorème I.
De deux pesanteurs équilibres, la plus pesante a telle raison à la plus légère, comme le long rayon au court.

Il lui faudra sept réalisations graphiques différentes pour s'expliquer sur ce premier théorème, avec les trois « exemples » (nous dirions des cas, ou des lemmes) dans lequel il subdivise le travail et les démonstrations correspondantes. C'est au travers des diverses formes données à ces objets graphiques que l'on peut suivre les effets de la volonté d'obtenir une démonstration située dans le cadre des mathématiques et plus particulièrement dans celui du système de signes le plus performant à l'époque de Stevin : la géométrie, ses figures, sa rhétorique démonstrative. Il va réussir par un artifice extrêmement ingénieux et assez complexe. Il part de l'idée suivante : « pour une colonne homogène de section carrée constante, la pesanteur de deux parts de même longueur est égale », et il transforme par là la pesanteur d'un corps quelconque en pesanteur d'une « colonne équivalente » c'est-à-dire d'une longueur équivalente de colonne, dont il fait coïncider la perpendiculaire de gravité avec celle du corps considéré. Comme il représente la colonne par un de ses plans médians et que le centre de gravité de la colonne est le centre géométrique du rectangle qui le représente, Stevin peut alors réaliser une *équivalence géométrique de la pesanteur, en position comme en grandeur.*

Comme l'on sait, depuis le Livre I des *Eléments*, d'Euclide, « ajouter les rectangles » c'est-à-dire obtenir « un rectangle équivalent (en aire) à deux rectangles donnés », Stevin a maintenant le moyen de « calculer » graphiquement les pesanteurs : il dispose d'un « modèle mesurable ». Il sait placer en tout point de l'espace des représentations graphiques (et de l'espace géométrique) une poutre de longueur (un rectangle d'aire) équivalente à une pesanteur donnée. C'est moins commode qu'un vecteur, car il y manque la direction : les possibilités d'addition en sont *a priori* réduites, mais des systèmes de poulies judicieusement placées font une technique presqu'aussi efficace, et Stevin arrivera à résoudre des problèmes que nous traiterions par la « règle du parallélogramme »[11].

Il réalise l'expérience de pensée suivante : il coupe la poutre en un point - ce qui ne change pas la position du centre de gravité de l'ensemble des deux morceaux - et il en déduit la loi de formation du centre de gravité de « deux pesanteurs liées par une verge » : le premier théorème de sa Statique. Nous l'étudions ci-après.

2.3. Le schéma, objet de l'étude géométrique

Dans les schémas, une force est d'abord une pesanteur (même lorsqu'elle s'exercera en oblique, grâce à des poulies). Elle est alors représentée par une « colonne », suspendue à un fil tenu par une main (qui ne sera bientôt plus objet de curiosité). Le premier schéma du premier théorème s'attaque de front à la difficulté principale : exprimer graphiquement la force, par la pesanteur. La colonne associée à la main en représente l'idée, dans le cadre d'un système physique fermé grâce à la main.

Le système de signes mis en place peut maintenant se comprendre par ses usages : le schéma de l'idée originale évolue en s'adaptant à l'expression de l'expérience de pensée qui nous est proposée. Nous allons quitter l'outil de représentation d'une idée pour étudier ce schéma en tant qu'*objet graphique*, bientôt *figure de géométrie* : entrer au coeur du fonctionnement d'un modèle géométrique des pesanteurs. La colonne en effet est mesurable (figure 10). Elle est divisée en six parties égales, par plans verticaux.

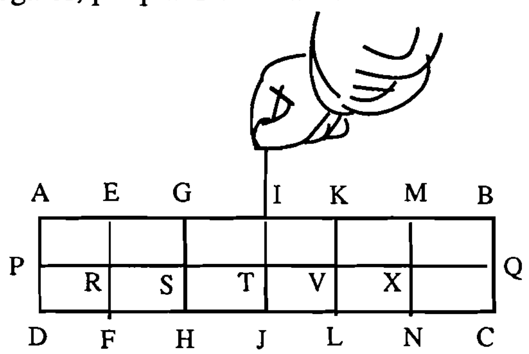


figure 10

Imaginons-la coupée en parts inégales suivant le quatrième des six plans, imaginons alors la coupure effective : l'équilibre demeure, le centre de gravité total reste en place pourvu que la rigidité de l'ensemble soit assurée. ADLK représente « la plus pesante pesanteur », de centre de gravité S, au centre de la sous-colonne de quatre sixièmes. LKBC représente « la plus légère », de centre de gravité X, au centre des deux sixièmes qui la constituent.

11 Pourtant, bien sûr, la formalisation obtenue ne permet pas le passage au *calcul*, elle n'offre pas une algèbre des pesanteurs.

Alors, dit Stevin, « La pesanteur majeure AKLD est à la moindre KBCL comme le long rayon TX est au court TS, cela peut se vérifier figure 10. Afin que l'on ne pense point qu'il en est ainsi par accident, nous en ferons une démonstration mathématique ». Le travail en ce sens fait, du schéma, une figure : nous allons l'observer. Les pesanteurs sont, par l'artifice des colonnes, représentées en même temps *en grandeur et en position*, leur somme aussi (figure 11).

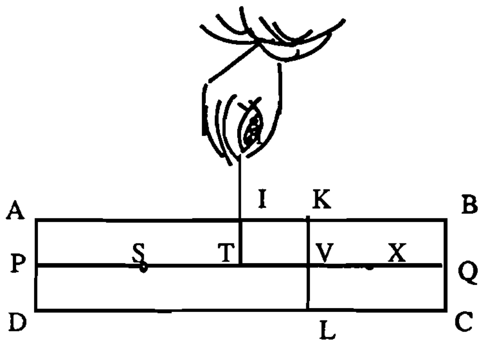


figure 11

Le centre de gravité général est en T - il n'a pas varié puisqu'aussi bien, rien n'a bougé. Les « rayons » sont donc mesurés respectivement par TS et TX, tandis que les « pesanteurs » sont mesurées par ADLK et LKBC. Dans cette sous-figure de ce qui est maintenant la figure primitive et qui pouvait jusqu'ici être considéré comme le schéma d'une colonne suspendue, aucune différence apparente, sinon que le trait KL est pensé comme séparant « la colonne » c'est-à-dire la pesanteur totale en deux éléments pesants distincts. Ainsi, il n'est plus besoin de parler de poids. La relation, telle que nous l'écrivons algébriquement aujourd'hui, est alors :

$$(KL \cdot PV) \cdot TS = (KL \cdot VQ) \cdot TX$$

Elle exprime une relation géométrique exclusive. La géométrie offre ainsi l'espace théorique, le cadre, pour modéliser le problème de statique. Dans ce cadre géométrique, le travail de Stevin consiste à mettre en oeuvre les définitions et pétitions particulières au modèle, et à assurer le contrôle de la pertinence matérielle des théorèmes démontrés dans la Statique théorique, qui se construit par là (Dans un autre temps, l'auteur se proposera de montrer l'intérêt pratique des savoirs produits).
Voici donc la modélisation qui s'engage.

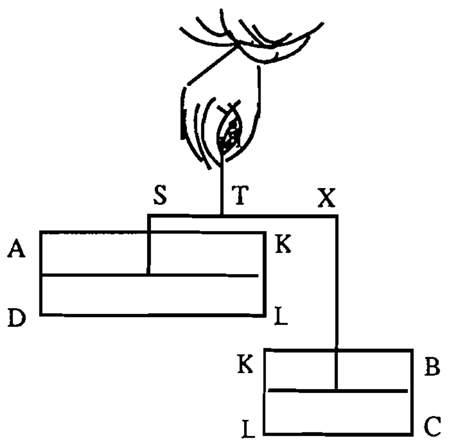


figure 12

L'expérience de pensée progresse, avec le travail du schéma initial, comme on peut le voir sur la figure 12. Si l'on abaisse (inégalement, sur le graphique c'est-à-dire en pensée) les deux parties qui font ensemble ABCD, en laissant la barre KL en place, chaque partie est suspendue à son centre de gravité. « Lorsque le corps était suspendu à l'anse SX, AKLD et KBCL ensemble étaient en équilibre, mais en étant abaissées elles ne causent aucune altération à SX par la pétition 3. Les parties de la colonne demeurent dans le même équilibre, et les rayons demeurent en même raison ».

Nous évoquerons seulement la suite, car il n'est pas de notre propos d'étudier plus avant *La Statique* : « Soient alors les corps changés en autres figures (...) l'équilibre demeurera comme devant, les pesanteurs demeurant égales, comme les rayons (...) De même si les pesanteurs sont pendues à une barre solide pesante (...) » Des *Problèmes* peuvent dès lors être abordés, l'outil de leur *mise en signes* géométriques est maintenant assuré, c'est aussi l'outil de leur traitement mathématique.

2.4. Du schéma à la figure, l'origine de la géométrie

Le travail de création d'un système de signes apte à modéliser un problème qui se pose dans l'espace, Stevin n'est pas le premier à l'engager, nous l'avons observé à l'oeuvre en d'autres temps, sur d'autres problèmes. Nous étudierons aussi bien, à l'aide des mêmes outils, (dans la troisième partie de ce travail) le cas actuel d'une élève de 4^{e} à propos d'un problème matériel de pièces découpées dans une feuille de bristol, mais nous pouvons continuer à étudier des moments de l'histoire du travail géométrique.

Examinons, par comparaison, le moment premier de la géométrie même, ou du moins ce que, Tannery nous rapporte (puisque nous ne connaissons pas les procédés réellement employés) des procédés les plus primitifs par lesquels Thalès aurait pu accomplir les actes que la légende lui prête[12] : *mesurer la distance à la côte d'un bateau en mer, mesurer la hauteur d'une pyramide*, soit, « rapporter en une position mesurable une grandeur hors d'atteinte ». Selon sa propre analyse, Tannery agit ainsi comme Eudème (Mathématicien grec auteur des premiers Eléments dont ayons entendu parler, aujourd'hui perdus), qui attribue à Thalès les théorèmes nécessaires à la mesure des distances inaccessibles - puisqu'on sait qu'il a su mesurer de telles distances. On connaît des énoncés *pour le tracé d'arpentage*, à peu près contemporains de Thalès :

« Quand deux droites se coupent, les angles opposés sont égaux » (figure 13)

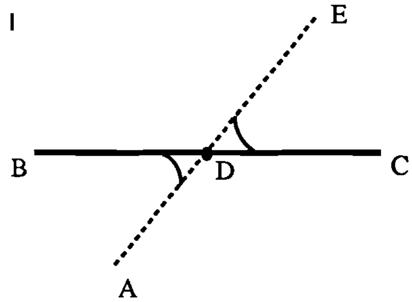


figure 13

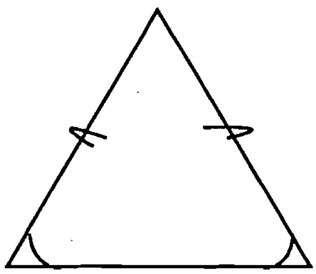


figure 14

« En un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux. » (figure 14)

« Deux angles égaux sur un segment égal donnent des triangles égaux » (figure 15)

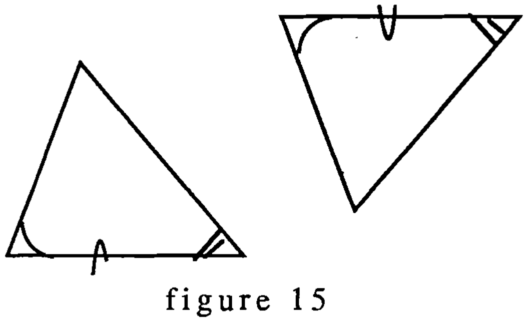


figure 15

Ces énoncés se soutiennent d'un schéma tracé au sol, il faut les compléter du triangle rectangle des arpenteurs (de côtés 3,4,5) donnant la construction d'un angle droit (l'angle d'une perpendiculaire à une droite en un point, soit, le demi angle plat). Ainsi, les problèmes dont la solution est attribuée à Thalès ne sont pas nécessairement résolus « géométriquement » (par similitude, et transport du problème dans un espace autre que celui du problème : l'espace théorisé de la géométrie ; c'est-à-dire par modélisation). Ils peuvent être résolus par « report de distances égales » dans

12 Tannery P. (1887), *La géométrie grecque*, Paris, Gauthier-Villars (rééd. Jacques Gabay).

l'espace de la grandeur à mesurer, un procédé qui suppose seulement ***le schéma*** (perfectionné, mais historiquement attesté, au contraire du modèle géométrique) qui présente *l'idée du procédé.* Les trois propriétés ci-dessus et les schémas correspondants peuvent, avec l'angle droit, produire les solutions attribuées à Thalès par les dispositifs suivants :

1) La distance du navire en mer est égale à la longueur obtenue à terre par report à terre du triangle rectangle formé sur une base donnée (figure 16) :

EC = AB dans la mesure où D est le milieu de la base BC, et où le navire est vu en même temps dans la direction FB, perpendiculaire à BC (il suffit d'attendre le moment adéquat) et dans la direction ED (il suffit pour cela de se déplacer sur CE, qui peut être tracée d'avance, perpendiculaire à BC).

Ce procédé offre l'avantage, grâce aux angles droits donnés par construction, de régler la question de l'égalité des angles en B et en C indépendamment de l'idée du schéma (Il n'est pas question bien sûr d'étudier la faisabilité réelle de l'opération). Cette égalité nous évite d'avoir à nous demander si les droites (BF) et (EC) sont bien parallèles, puisque l'égalité des triangles suffit à garantir l'égalité des côtés homologues AB et EC.

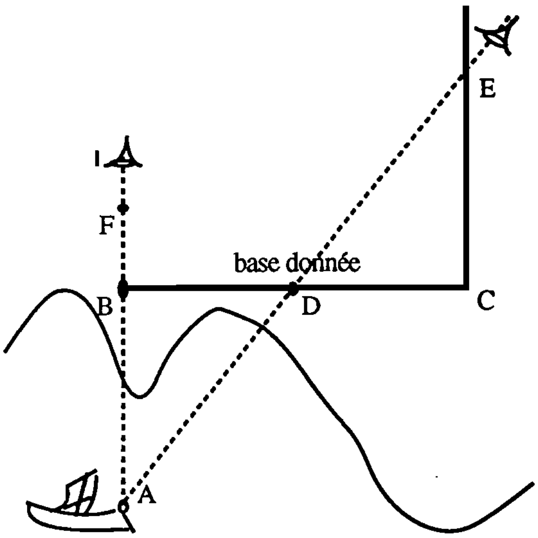


figure 16

Nous pouvons, appuyés sur le savoir euclidien, imaginer des solutions d'apparence aussi simple et élémentaire. Par exemple, sur la base de deux triangles équilatéraux opposés par un sommet : une corde et deux piquets suffisent à obtenir les quelques cercles nécessaires à ces tracés (figure 17).

Pourquoi donc supposer l'angle droit ? Tout d'abord, parce que l'on sait que Thalès a étudié en Egypte, et que les égyptiens connaissaient le triangle 3,4,5, des millénaires avant Thalès. Ensuite, parce que le procédé précédent peut sans peine se penser tout en se réalisant. Il est formé - par exemple, s'il est représenté même grossièrement (par un tracé effectué sur un sol uni) - d'une combinaison simple des quatre éléments en principe connus de Thalès : une combinaison, par juxtaposition, de deux triangles égaux au moyen de leur angle (non droit) égal. Le procédé est économique en pensée géométrique, et le schéma de la figure 16 devient une démonstration du procédé, car il permet de tenir, pour qui connaît les quatre propriétés attribuées à Thalès, un discours argumentatif (organisé par la description du schéma) de l'opération d'arpentage. Sans même nommer les points comme nous l'avions fait spontanément (en géomètres ayant appris auprès d'Euclide), l'égalité des triangles peut en effet se voir et se dire : « Les triangles sont rectangles (ils ont un premier angle égal), ils ont un angle aigu opposé par le sommet (donc, un deuxième angle égal). Leur côté compris entre ces deux angles est égal (puisque c'est ainsi que nous avons tracé la base des trois points de visée). Alors, les côtés correspondants sont égaux, et la distance mesurée à terre est égale à la distance à la base du navire en mer ».

Nous trouvons là une preuve « par ostension »[13], parce que la figure est en elle-même un discours suffisant, sa syntaxe étant suffisamment explicite pour ne pas nécessiter l'argumentation par l'écriture en « langue naturelle » du raisonnement tenu.

Considérons en revanche la solution montrée par la figure 17. Cette solution par des triangles équilatéraux (simples à construire) suppose une modélisation géométrique efficace, c'est-à-dire un schéma qui s'appuierait sur des connaissances géométriques indépendantes du tracé d'arpentage. C'est-à-dire que *cette solution suppose une figure.* On peut le voir, la base est plus complexe à « lire », puisqu'elle se compose (comme précédemment) de cinq points de visée, mais que cette fois les triangles égaux ne sont pas immédiatement visibles. Ainsi, nous devrons nommer les points, pour décrire un schéma qui ne se donne plus à lire.

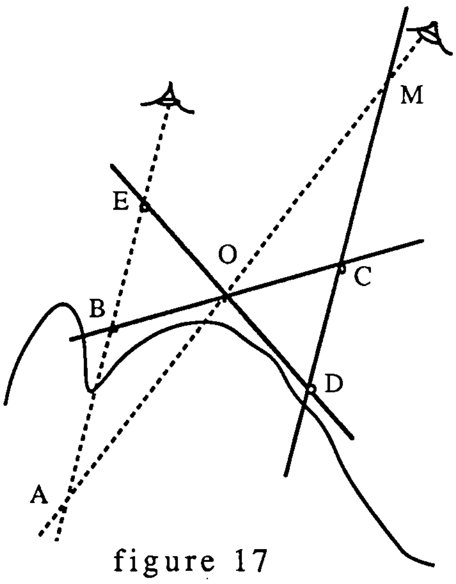


figure 17

« La « sous figure » des triangles OEA et ODM répond bien au cas d'égalité donné puisque DM = EA dans la mesure où, ces triangles ayant un côté égal (OE = OD) entre deux angles égaux (en E et D, ainsi qu'en O puisqu'ils y sont opposés par le sommet), OEA = ODM et EA = DM ».

On peut donc mesurer ainsi la distance du bateau A à la base (EC), égale à la distance (à terre) du point M à la base (DB). Encore faut-il être assuré de ce que les bases sont perpendiculaires aux directions de mesure, pour être assuré que l'on a mesuré les plus petites distances. Encore faut-il (là, le schéma devient autre chose que le moyen de décrire un procédé matériel) avoir montré que les angles AEO et MDO sont égaux. Cela suppose un raisonnement sur les triangles équilatéraux OEB et ODC, dont l'égalité est donnée par construction mais dont l'égalité des angles est à démontrer, si l'on ne connaît pas la constance de la somme des angles d'un triangle.

Ce premier problème pose, pour la première fois semble-t-il, le principe de la nature commune des espaces, en mer et à terre, inaccessible et accessible. Un problème posé par l'opération du report de la distance, opération que le schéma décrit en une syntaxe simple, sans être encore un objet de la géométrie (qui n'est pas constituée, à l'époque de Thalès, et qui se constituera justement sur les fondements qu'il pose) c'est-à-dire, sans être une figure, ni une représentation de l'espace (Celles que les artistes réalisent depuis longtemps ne permet ni le contrôle du report ni le calcul argumentatif qui le justifie).

L'autre problème se résout par le même procédé de « report de la distance à mesurer », mais le raisonnement est encore plus simple : « La hauteur de la pyramide est égale à la longueur de son ombre portée, le jour ou à l'heure où notre propre ombre portée est égale à notre hauteur ». Un procédé dont le schéma est constitué de deux triangles rectangles isocèles dont un côté montre l'objet et l'autre montre l'ombre, le

13 Une preuve qui fonctionne donc comme les calculs algébriques, lorsque l'on montre que la différence de deux carrés peut être un carré parce que $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2 = 4a^2b^2 = (2ab)^2$.

raisonnement consistant à affirmer que les deux triangles sont isocèles en même temps.

Le raisonnement de ce second problème marque le second moment où se pense l'espace : l'espace à terre était identique à l'espace en mer, voici que l'espace dans lequel s'inscrit la pyramide s'y montre identique (au moins pour ce qui est de la relation d'égalité des distances) à celui dans lequel s'inscrit l'homme. Maintenant, la conception du monde a changé, et le schéma va pouvoir devenir à l'homme ce que l'homme était à la pyramide : le moyen de traiter des relations d'égalité indépendamment de la taille de l'objet sur lequel on expérimente. Ainsi, l'entrée en géométrie se fait par cette mise en rapport des espaces de dimensions différentes, provenant de lieux différents : l'espace à mesure humaine, l'espace hors d'atteinte matérielle, l'espace à mesure monumentale. Et *les égalités peuvent s'expérimenter dans l'espace du schéma* : ce qui est vrai ici est vrai encore là-bas ; l'égalité qui est vraie à ma mesure, l'est à la mesure de la pyramide ou à celle de la feuille de papier, parce que les propriétés de l'espace qui se manifestent en tous lieux sont homologues. *La feuille de papier peut donc être le laboratoire de l'arpenteur* et la géométrie peut commencer à émerger.

La géométrie comme modèle de l'espace serait dès lors nécessaire, alors qu'il suffisait, pour résoudre les problèmes dont la solution est attribuée à Thalès, d'opérer les tracés dans l'espace même où l'on pose le problème et où se feront les mesures : au sol.

Il faut en effet évoquer ici (figure 16, toujours) les tracés et les mesures en un schéma qui n'opère plus comme une simple *représentation de l'idée qui permet la solution du problème* ou encore comme *une description de l'opération matérielle par laquelle on résout le problème,* mais en un schéma qui organise la présentation de l'idée du tracé en une composition de schémas élémentaires : un schéma qui fonctionne comme un discours, comme un système de signes (organisables selon leurs lois propres) dont une organisation particulière produit la solution cherchée[14].

Le schéma permet par conséquent mettre à distance l'action dans l'espace sensible et de créer un commencement de modèle par la mise en signes des relations spatiales repérées (tout au moins dans ce premier moment, les égalités d'angles et de mesures). En ce sens, dans le moment où il montre l'idée, le schéma montre les opérations à faire de telle manière qu'il les *démontre* c'est-à-dire qu'il en justifie la pertinence : une forme de « preuve » que les Grecs appelaient *δικνυμε* (diknume) ou *preuve par ostension.*

Cela suffit aux solutions des problèmes attribuées à Thalès. Mais les preuves par ostension ne sont acceptables comme preuves que parce qu'elles démontrent la pertinence d'une opération matérielle que le schéma a permis d'organiser d'une manière rationnelle en montrant cette opération (dont l'effet peut se voir, et, par là, se comprendre). Le fonctionnement ostensif du schéma et l'organisation de la démonstration qu'il propose font qu'il devient progressivement comme *un texte de géométrie, pour qui sait lire la géométrie qui se montre* dans le schéma. Sans l'existence de quelques schémas-type dont la combinaison peut se retrouver dans le schéma proposé, et sans la relation du schéma à un problème de l'espace sensible qui, par ce moyen, trouve une solution matérielle, le même graphisme ne ferait pas preuve.

---

14 Le tracé sera réalisé ailleurs : dans l'espace où seront faites les mesures véritables.

Lorsqu'il commence à fonctionner ainsi, le schéma devient donc l'outil de la mise en relation des propriétés pertinentes à la solution du problème, et il se travaille comme un outil géométrique.

Utiliser la géométrie pour l'étude des questions et problèmes qui se posent dans l'espace, ou à propos des objets qui se trouvent dans l'espace n'est donc pas une opération qui « va de soi », même si la culture commune fait dire aux élèves, lorsqu'ils veulent trouver l'utilité de l'enseignement qui leur est fait, que « la géométrie ça sert, surtout aux architectes ». Il y faut, on l'a compris, ce moment premier de la création du schéma et de son travail en direction d'un système de signes pouvant constituer un modèle du problème que l'on attaque. Il faut travailler le problème pour mettre en place le modèle, avant de travailler les relations que le modèle « met en signes ».

2.4. Modélisation et expérimentation géométriques

« Comment *s'utilise* le savoir géométrique, dans l'étude de quels problèmes ? ». La question est pertinente pour aborder cette autre question : « Comment se construit le savoir géométrique ? » et en particulier, comment se construisent les savoirs sur la géométrie utiles au travail des modèles spatiaux dont l'enseignement nous intéresse ?

En principe, cela commence comme pour tout domaine scientifique : par l'exploration d'une classe de phénomènes. Une telle exploration est nécessairement *expérimentale,* elle se fait par la mise en rapport de la théorie avec l'espace sensible, par le biais d'un montage expérimental. Cette idée peut être le point de départ d'une articulation entre les différents aspects des travaux de construction géométrique et les différents niveaux du travail graphique. Car, en géométrie comme ailleurs, l'expérience est une expérience de laboratoire qui utilise la matérialité d'un objet de laboratoire (une feuille de papier). C'est une *expérience graphique* qui fait appel au tracé.

Prenons un exemple. Considérons le *phénomène géométrique* : « les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes ». Avant que d'être un phénomène, c'est tout d'abord un *fait* que l'on va observer[15]. Traçons donc un triangle et, par un procédé quelconque, traçons les médiatrices de ses trois côtés. A ce stade, une première remarque s'impose : de la même manière que nous ne prenons pas un dessin (une représentation) de l'expérience de Michelson et Morley permettant de mettre en évidence l'absolu de la vitesse de la lumière pour la réalisation effective de cette expérience, de la même manière nous devons prendre garde de ne pas considérer un dessin représentant une expérience graphique pour la réalisation de cette expérience. Nous appellerons *schéma* la présentation de *l'idée* que l'expérience réalise, et *épure* sa réalisation. Le risque de confusion vient du fait que les outils sémiotiques employés dans les deux cas paraissent les mêmes : des traits sur une feuille.

Schéma et épure sont des objets graphiques que l'on prend pour eux-mêmes, ce qui n'est pas le cas du dessin et de la figure qui *représentent* des objets absents, le

15 Pour des précisions sur l'articulation faits-phénomènes en didactique, voir Chevallard, *On didactic transposition theory : some introductory notes*, communication au International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, 3-7 août 1988.

premier représentant un objet matériel, la seconde des relations mathématiques : les relations spatiales théorisées qui forment la géométrie.

Un schéma de l'expérience décrite ci-dessus pourra donc se montrer pour ce qu'il est en restant sous la forme graphique d'un simple tracé *à main levée*. Il en va autrement de l'épure qui est la *réalisation effective* de l'expérience graphique et devra être réalisée avec beaucoup de *soin* - sous peine de produire une expérience ratée (On peut voir là que la figure géométrique telle qu'elle est généralement utilisée dans l'enseignement traditionnel fonctionne suivant les besoins comme l'un ou l'autre, ce pourquoi elle peut être « fausse » lorsqu'elle est le schéma d'un raisonnement et devoir être « soignée » lorsqu'elle réalise l'expérimentation de propriétés à démontrer). Outre le soin, une expérience graphique doit se garantir d'être véridique, c'est-à-dire qu'un *protocole expérimental* doit garantir le plus qu'il est possible contre les effets de la volonté ou de la maladresse de l'expérimentateur : les enseignants de physique le savent, qui ne peuvent pas choisir n'importe quelle expérimentation pour les séances de travaux pratiques qu'ils proposent aux élèves d'une classe (les élèves sont des expérimentalistes inexpérimentés). La garantie d'un protocole expérimental, n'est jamais prise par les enseignants, parce qu'ils ne réalisent jamais vraiment d'expériences. Le plus souvent, il leur suffit de les évoquer : leur activité est sous le contrôle de leur connaissance de la théorie, pas sous le contrôle du réel, ils ne se confrontent à l'expérimentation que lorsqu'ils doivent établir la solution d'un exercice d'un type nouveau, pour lequel ils n'ont pas d'idée *a priori*.

Dans le cas des trois médiatrices il est possible, par exemple, de partir de trois copies d'un même triangle, sur papier calque, et de réaliser une des médiatrices sur chacun des triangles (à l'aide d'une règle graduée pour déterminer le milieu et d'une équerre pour la direction, ou de tout autre moyen bien repéré et maîtrisé par les opérateurs) avant de superposer les tracés, que l'on pourra épingler sur une planchette plane afin de fixer précisément la situation obtenue. Mais si l'on accepte plus de technicité, il est possible de tracer d'abord, sur le triangle original lui-même, tous les cercles centrés aux sommets qui aident au tracé des médiatrices, de marquer alors seulement les points d'intersection utiles et, dans un dernier temps, de tracer les trois droites. Il faut noter déjà que nous réalisons bien une activité graphique, en ce sens que le mode de tracé des médiatrices n'est pas imposé : que celles-ci soient tracées « à la règle graduée et à l'équerre », « au bissecteur » ou, bien sûr, « à la règle et au compas », les instruments ne sont ici pertinents que dans la mesure de leur plus ou moins grande précision : ce sont les outils plus ou moins techniques d'une réalisation graphique et il va de soi qu'à ce stade un outil imprécis bien maîtrisé peut être plus pertinent qu'un outil perfectionné dont l'expérimentateur ne contrôle pas l'usage.

Cela étant, supposons que nous demandions à des élèves (ignorants de la propriété) l'exploration graphique de la figure des trois médiatrices des côtés d'un triangle. Ils sont amenés à réaliser, selon le protocole expérimental choisi, l'expérience décrite plus haut.

On sait très bien que, comme pour toute expérience, l'obtention d'un point d'intersection unique est le fait d'un hasard malheureux : les trois droites ne se couperont pas exactement au même point et leurs intersections prises deux à deux formeront les sommets d'un triangle, plus ou moins grand selon l'habileté et la chance de l'expérimentateur. Il est possible de ne pas se contenter d'une telle approximation comme *preuve expérimentale* de l'intersection et, toujours dans le domaine des faits, il est possible soit de confirmer l'idée qui peut être venue de l'intersection commune des médiatrices, soit de faire naître cette idée si elle n'est pas venue. Cela s'obtient par le raisonnement suivant : « S'il est exact que les trois médiatrices se coupent en un point, alors, lorsqu'on augmente de manière homothétique les dimensions du triangle ABC de départ, les dimensions du petit triangle A'B'C' obtenu par les intersections des médiatrices ne devraient pas augmenter dans le même rapport ». Ce raisonnement engage le processus d'expérimentation proprement dit en donnant l'idée d'une expérimentation graphique, que nous empruntons à Guy Brousseau[16] : « Travailler les formes ou les dimensions du triangle de départ ABC pour que le tracé réalisé selon la technique standard (suffisamment maîtrisée des élèves pour qu'ils puissent en contrôler la technique d'exécution), donne un triangle A'B'C' plus grand qu'un triangle déjà obtenu, si c'est possible ».

La difficulté qu'il y a à faire grandir le triangle A'B'C', la dimension aléatoire de l'action réalisée dans ce but (il arrive que la tentative « rate » complètement et que A'B'C' soit « tout petit » malgré tous les efforts) donnent la conviction expérimentale qu'en fait, A', B', C', correspondent à un seul et même point et que l'on s'est affronté à une *nécessité géométrique* : le triangle est nécessairement « tout petit », puisqu'il ne peut être rendu « grand » qu'au hasard mais qu'il est relativement semblable au triangle d'origine (suivant les hasards expérimentaux, dans une « similitude » directe ou inverse). Le triangle A'B'C' est donc formé au même hasard qui, parfois, le rend effectivement ponctuel : les trois médiatrices d'un triangle sont nécessairement concourantes, du point de vue expérimental. Ce sera maintenant au discours de prendre en charge l'expression de cette nécessité, sous la forme d'un théorème.

Mais ce travail nous amène à poser des questions nouvelles, comme c'est le cas lorsque l'on retourne au système que l'on étudie armés d'outils performants que nous avons construits. Voici l'une d'elles. Ainsi, la classe d'objets « famille de triplets de cercles centrés en trois points A, B, C donnés et de même rayon r, le rayon pouvant varier de zéro à l'infini » définit un triplet de points d'intersection intérieur à la portion d'espace délimitée par les disques correspondants, pour chaque triplet de cercles de la classe effectivement sécants. Un de ces triplets est réduit à un point unique : leurs sommets en effet sont alignés sur les médiatrices des côtés du triangle des centres. Alors, le problème : « Existe-t-il un nombre r (positif) tels que trois cercles de rayon r centrés en trois points (non alignés) $M_1M_2M_3$ aient un point commun I ? » admet une réponse positive. Il doit donc être possible, connaissant les trois points par leurs distances respectives, de calculer ce rayon (sa construction, elle, est évidemment obtenue par celle du point commun aux trois cercles, soit, le point d'intersection des médiatrices) sachant que l'on a $r = IM_1 = IM_2 = IM_3$ (c'est un nombre constructible).

Les questions des relations des nombres aux objets géométriques peuvent être posées dans un cadre solidement formé, où l'on trouve la sûreté du travail que donne une connaissance théorique des propriétés qui fondent l'activité qui se déploie.

Outre le concours des droites, l'alignement des points est une propriété expérimentale aisément vérifiable. Nous en évoquerons un seul exemple. Soit l'opération suivante : « Tracer un triangle ABC. Le décalquer, puis le reproduire sur la même feuille de papier, en retournant le calque. Si on appelle A', B' et C' les sommets correspondant (se superposant) respectivement à A, B et C, déterminer les milieux respectifs I, J, K, des segments [AA'], [BB'] et [CC'] ». Nous pouvons voir et vérifier, à la règle par exemple, ce *phénomène géométrique* : les trois milieux sont

16 Brousseau G. (1983) *Etude de questions d'enseignement un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble, IMAG.

alignés (il est tout aussi difficile que tout à l'heure d'obtenir des points qui ne le seraient pas vraiment). C'est une propriété de l'espace, que l'on pourra comme tout à l'heure tenter de comprendre, d'expliquer, de démontrer. Dans ces exemples, on assiste à une « exploration » de l'espace de la feuille de papier au moyen des instruments de tracé et des graphismes qu'ils permettent.

Mais voyons un cas un peu différent. Nous pouvons maintenant envisager de monter une *expérimentation dans l'espace sensible* lui-même, pour nous persuader de la pertinence de la théorie géométrique dans laquelle se situent les raisonnements précédents. Nous pouvons vérifier qu'ils ne « portent » pas exclusivement sur l'espace graphique, l'espace des tracés sur une feuille de papier. A cet effet, nous considérerons que la feuille de papier était un élément matériel de l'espace sensible qui l'englobe, qu'elle était une partie de l'espace général, dont elle partageait les propriétés étudiées, qu'elle fonctionnait donc bien comme un *laboratoire*, un lieu d'expérimentation commode.

Donnons-nous alors l'*opération matérielle* suivante, *le pliage* d'un papier transparent, point sur point[17], dont voici la description :

« Marquez deux points sur une feuille de papier transparent, repliez la feuille et placez ces deux points l'un sur l'autre (en regardant par transparence), bloquez le papier dans cette position en pressant fortement le papier en ces points, entre deux doigts d'une main. Vous allez maintenant utiliser cette propriété qu'a le papier de se déformer sans que les distances entre points (mesurées en suivant la surface) ne changent : le papier est inextensible et déformable. En partant des points en contact, vous suivez de l'autre main la pression jusqu'à marquer votre feuille d'un pli, en un point. Recommencez l'opération dans plusieurs directions : lorsque les plis partiels se rejoignent, ils forment une droite, la médiatrice des deux points de base. Cette droite est *par fabrication*, l'ensemble des points de la feuille équidistants des deux points de base ; elle sera, *par définition*, perpendiculaire à la droite qui joindrait ces deux points si nous savions la plier, ou si nous l'avions précédemment pliée ».

Car nous nous interdirons le pliage de première espèce, trop imprécis. Dans le pliage que nous avons donc réalisé, tout endroit où vient se marquer une portion de pli est équidistant des points superposés Un tel geste matériel est un instrument d'expérimentation, dans « l'espace des objets matériels plats manipulables ». Nous pouvons vérifier aisément, dans cet espace matériel et par ce procédé, l'intersection commune des trois plis « médiateurs » d'un triangle - un triplet de points. Nous pouvons en conclure que l'expérience matérielle confirme, ou plus exactement *n'infirme pas*, l'adéquation de l'embryon de géométrie que nous avons décrit (avec son théorème sur l'intersection des médiatrices) à l'espace dans lequel se trouve prise la matérialité d'une feuille de papier - le *micro-espace* selon la classification proposée par Guy Brousseau.

17 C'est le *pliage de deuxième espèce* (le pliage de première espèce consistant à plier une feuille de papier de manière que le pli passe par deux points donnés). Pour une description rapide des pliages dans le cadre de la théorie des constructions géométriques, voir Carrega J-C. (1981), *Théorie des corps, la règle et le compas*, 156-163, Paris, Hermann.

3. L'empirisme, la modélisation

3.1. L'empirisme scolaire, solution et problème

Notre but étant le travail des questions d'enseignement, nous devons regarder comment l'espace de liberté qu'ouvrent les programmes[18] permet de définir une place pour le type de questions que nous nous posons.

En effet, le travail mathématique sur la notion de construction, comme le travail sur le schéma ou sur la modélisation des problèmes qui se posent dans l'espace, ne nous intéressent pas seulement parce qu'ils « enrichissent notre culture générale ». Il s'agit, à partir de l'étude - même rapide, comme nous l'avons menée dans ce cadre - d'un *savoir savant* dont nous avons repéré le nom et les relations à d'autres savoirs mathématiques, et d'un *savoir pratique* dont nous avons étudié plusieurs occurrences, d'arriver à donner un contenu cohérent à un enseignement de la géométrie qui doit comprendre simultanément des « constructions géométriques » et des « représentations d'objets de l'espace »[19].

Il est en particulier nécessaire de distinguer jusque dans les textes d'enseignement les trois aspects des constructions géométriques (preuve de constructibilité, algorithme de construction, procédé de tracé) et les trois aspects du travail graphique (schéma d'une idée, figure de géométrie, épure d'une expérience graphique), afin de mieux les articuler. Non pas pour en faire les nouveaux objets d'enseignement, mais pour mieux contrôler la nature et la cohérence des enseignements proposés. Car si, pour différentes raisons - au nombre desquelles la faiblesse des élèves et la trop grande hétérogénéité des classes seront sans nul doute évoquées -, le primat est donné dans les classes, à la figure dans son seul aspect matériel, sans articulation aucune avec d'autres problématiques[20], on s'acheminera vers deux types de difficultés :

- d'une part, la prépondérance du tracé fonctionnera en obstacle épistémologique dès lors que, plus tard (dans l'année ou dans le cursus), l'on voudra faire l'apprentissage du raisonnement déductif (même par « de courtes séquences déductives » comme le stipulent les commentaires des programmes de Sixième[21]) et en particulier lorsqu'il sera question d'engager l'apprentissage de la démonstration en géométrie ;
- d'autre part, il est à craindre que cette façon de procéder n'engendre bien vite l'ennui chez la plupart des élèves y compris - et peut-être même surtout - chez ceux qui réussissent le moins[22].

Pour permettre de réaliser une articulation des trois registres repérés dans le terme de « constructions géométriques » et des trois registres repérés dans le terme de

18 Chevallard Y. (1986), Les programmes et la transposition didactique : illusions, contraintes et possibles, Bulletin de l'APMEP, 352, février 1986.

19 Pour les enseignants qui n'ont pas eu l'occasion de la retravailler, la géométrie est, soit la géométrie euclidienne scolaire d'avant la réforme de 1970, soit un sous-produit graphique de l'algèbre linéaire des années suivantes.

20 Autrement dit si les seuls problèmes résolus par les élèves sont des problèmes de tracés matériels.

21 B.O.E.N., numéro spécial 4 du 30 juillet 1987, page 12.

22 L'ennui créé par un enseignement de la géométrie réduit, pour certains élèves, à l'exécution de tracés soignés, se montre déjà par leurs réponses à la question : « Qu'est-ce que la géométrie, pour toi ? ».

« représentations d'objets de l'espace », dans l'enseignement, au collège, il nous faut examiner plus précisément les possibilités que nous offrent les programmes de ces classes, les commentaires de ces programmes, et les ouvrages d'enseignement qui sont finalement les outils de l'activité d'enseignement. Soit par exemple la page suivante, d'un ouvrage pour la sixième[23] :

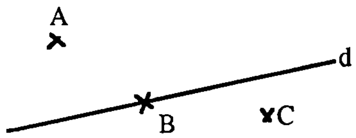
11 Constructions

activités pour s'initier

1 Perpendiculaires à l'équerre

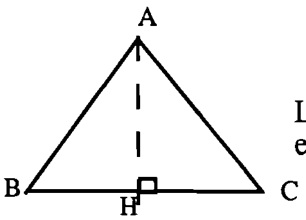
a) Tracer à l'équerre

1) Reproduire ce dessin



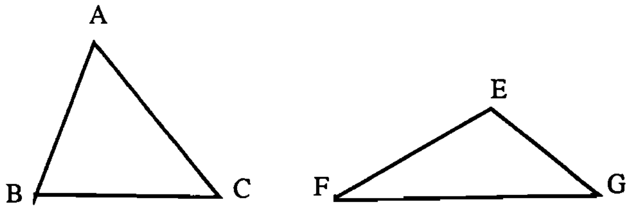
2) Tracer la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite d.
3) Tracer les droites passant par B et C et perpendiculaires à la droite d.
4) Que peut-on dire de ces trois droites ?

b) Hauteurs d'un triangle



La droite (AH) est une hauteur du triangle ABC ; elle est issue du sommet A.

1) Ecrire une définition de la hauteur du triangle ABC, issue de A.
2) Combien un triangle a-t-il de hauteurs ?
3) Voici deux dessins de triangles :

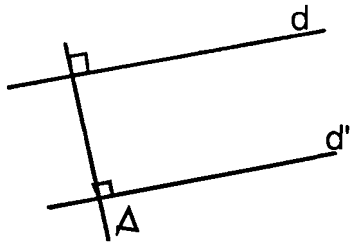


Dans chaque cas :
— *reproduire un triangle ayant la même forme,*
— *tracer les hauteurs du triangle.*
4) Que constate-t-on ? Qu'appelle-t-on orthocentre d'un triangle ?

23 C'est l'introduction des *Travaux géométriques* du *Mathématiques 6°*, Collection Pythagore, Paris, Hatier (avril 1986).

2 Droites parallèles

a) Un résultat



Observer ce dessin

Compléter avec les signes ⊥ et // :

d......Δ, d'......Δ, d......d'.

Compléter avec les mots ***perpendiculaire(s)*** *et* ***parallèle(s)****, en regardant le dessin :*

Deux droites .... à une même troisième sont ....

.Lorsque deux droites sont **parallèles**, toute .... à l'une est .... à l'autre.

b) Tracer deux parallèles

Placer un point A et tracer une droite d ne passant pas par le point A.

Nous allons construire la droite **parallèle** à la droite d et qui **passe** par le point A. Pour cela, avec l'équerre :

Tracer une droite perpendiculaire à la droite d.

Appelons cette droite Δ.

Tracer la droite passant par A et perpendiculaire à la droite Δ.

Que peut-on dire de cette dernière droite ?

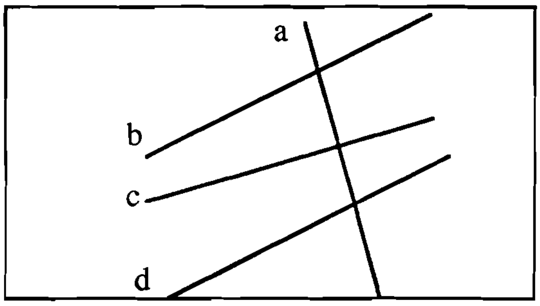
Sauf à être le « Monsieur Jourdain » des mathématiques, et à être considéré comme pouvant « utiliser un axiome d'Euclide sans le savoir », ce que l'on peut dire a priori (dans l'activité 1,a)) des trois droites perpendiculaires à d passant par A, B, C, est bien peu de chose. Cette première activité de tracé ne propose pas l'observation d'un phénomène graphique, puisque l'élève n'a pas ici les moyens théoriques ou graphiques de vérifier ce qu'il est censé « voir », (s'il voit que les trois perpendiculaires sont parallèles entre elles). C'est donc au professeur de dire ce qu'il y avait à voir : des parallèles (c'est-à-dire, comme « la prose » que faisait Monsieur Jourdain, « une propriété euclidienne » de l'espace sensible, un « axiome sans le savoir »).

Les auteurs du manuel sont par conséquent amenés à reprendre aussitôt la question et à faire appel, dès la troisième *activité pour s'initier,* à la connaissance que les élèves ont de ce qu'on peut leur demander : les relations qu'il fallait dire, les voici presque tout écrites et il suffit (?) de « compléter » des écritures lacunaires avec l'un des signes ou des mots proposés : « parallèle » et « perpendiculaire ». Mais comme le constat du « résultat » peut encore avoir raté et que les auteurs s'interdisent toujours de donner une définition ou un axiome, ils finissent par proposer explicitement (activité 2 b) la construction de la parallèle à une droite d par le tracé, à l'équerre, de Δ perpendiculaire à d, puis d'une perpendiculaire à Δ. Ils demandent alors à l'élève ce qu'il peut dire de cette dernière droite. Un élève de 6° ordinaire devrait avoir compris que la réponse lui est chaque fois soufflée un peu plus fort, et que l'on s'interdit évidemment de la lui dire tout du long (l'énoncé est proposé un peu plus loin, dans la double page où traditionnellement le cours s'énonce, sous le titre « L'essentiel »). Dans ces conditions, que font les élèves ? Comme on l'a vu en commençant d'imaginer leurs moyens de répondre, les résultats produits dans les « activités pour s'initier » sont le produit de l'activité des enseignants. Que leur faut-il faire, que doivent-ils apprendre ? Etudions leurs exercices :

Exercices *pour savoir faire...*

Reconnaître des parallèles et des perpendiculaires

1. Citer



- deux droites parallèles
- deux droites perpendiculaires
- deux droites sécantes sans être perpendiculaires.

Les droites c et d sont-elles sécantes ?

(...)

Construction de parallèles et de perpendiculaires

7. a) Tracer une droite d et marquer un point A extérieur à d.
b) Tracer la droite h passant par A et perpendiculaire à d.
c) Marquer un point B extérieur aux droites d et h.
d) Tracer la droite k passant par B et perpendiculaire à h.
e) Que constate-t-on ?

Cette fois, l'élève attentif sait qu'il doit constater le parallélisme de deux perpendiculaires à une même droite : k est perpendiculaire à h et h est perpendiculaire à d, par construction. Mais, quel est l'intérêt du tracé ? Sans doute, d'éviter l'appel à la propriété (donnée à pratiquer en activité, énoncée dans la page sur « l'essentiel ») et même, d'éviter l'appel à la connaissance de l'histoire de la classe, au cours de laquelle une question semblable a été posée : tout devrait décidément être **constaté.**

Comment obtenir alors que les élèves mettent en oeuvre la connaissance d'une propriété, sans que cette exigence n'apparaisse comme l'expression du caprice de l'enseignant ? Comment l'enseignant pourra-t-il oser l'exiger, s'il a fonctionné selon ce que l'ouvrage officiel lui propose ?[24] Afin que l'on ne croie pas que nous étudions un manuel particulier, nous rappellerons par exemple que Armand Colin a produit l'année suivante un manuel pour la 5^{e} (collection *Acti-math*) dont le tout premier chapitre, intitulé « Retrouvons la géométrie », commence par l'exercice suivant :

Tracez une droite D sur votre cahier, construisez à l'aide d'une équerre deux droites D' et D" perpendiculaires à D, que constatez-vous ?

---

24 Il n'y a pas officiellement d'ouvrage d'enseignement qui soit « officiel », mais, outre le fait que le manuel de la collection « Pythagore » est un des ouvrages les plus diffusés, comme chaque classe dispose d'un ouvrage unique, acheté pour une durée minimum de quatre ans et choisi par l'ensemble des enseignants même s'il n'a pas l'agrément de certains d'entre eux, comme enfin les enseignants se doivent d'utiliser le manuel, cet ouvrage a dans de nombreux cas les caractères d'un ouvrage officiel.

Nous avons montré là un phénomène tout à fait général : le poids des contraintes produites par le choix d'une solution empiriste pour l'étude de l'espace sensible, et les effets de ces contraintes au début de l'enseignement de la géométrie.

Nous ne plaidons pas, en tenant ce discours, pour la solution ancienne - celle des deux siècles qui ont précédé la réforme « des mathématiques modernes » de 1970. Les choix qui avaient produit cette solution avaient donné une autre forme d'empirisme scolaire (particulièrement virulente dans les classes où la distance d'avec la géométrie savante pouvait s'afficher sans vergogne : les classes techniques et les classes de filles en sont deux exemples nets). Plus l'enseignement cherchait à « faire concret », plus la dégradation de la problématique euclidienne était forte et plus la seule chose qui restait était l'ossature raisonnante, et enfin, la géométrie paraissait une rhétorique vidée de sens.

Dans un ouvrage de seconde conforme aux programmes de 1931, on trouve par exemple le schéma suivant (figure 18), qui sert à montrer qu'une perpendiculaire est plus courte que toutes les obliques menées du même point, accompagné du commentaire « On voit bien que l'échelle est plus longue que le mur n'est haut ». Mais la démonstration qui suit est « classique », et complète.

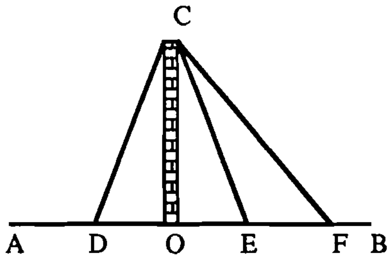


figure 18

Dans un ouvrage pour les écoles de filles figurant dans une « Bibliothèque des Ecoles Primaires Supérieures et des Ecoles Professionnelles » de 1909, ce mouvement de « vulgarisation » de la géométrie est poussé à sa limite[25]. Ainsi, la *ligne brisée* « Est une ligne composée de plusieurs lignes droites. Le mètre pliant, la lettre Z nous en fournissent des exemples. On l'emploie fréquemment en lingerie sous les noms de point de chausson, point d'épine, etc. » Quand nous rencontrons la question d'une perpendiculaire et des obliques associées, le théorème évoqué plus haut - qui est seulement le quatrième théorème de ce cours, les autres propriétés ayant été justifiées d'une observation invoquée - a le même énoncé :

Si d'un point pris hors d'une droite on mène à cette droite la perpendiculaire et différentes obliques :
1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;
2° Deux obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire sont égales ;
3° De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est plus grande.

Mais dans ce cas, aucune figure ne suit et le raisonnement proposé est le suivant :

Soit la droite CO perpendiculaire à AB
1° Si nous considérons CO comme représentant un mur vertical reposant sur le sol figuré par AB, une échelle CD allant du point D au haut du mur

---

25 Hue Th., Vagnier N. (1909), *Géométrie (Ecoles de filles), Paris, Delagrave. Nous disposons de la 13° édition, datée de 1919.*

sera plus grande que la hauteur de ce mur ; donc on aura CD > CO ou CO < CD.
D'ailleurs si on a à soutenir une pièce de bois ou de fer, on fait économie de matière (bois, fer, pierre, etc.) en employant des supports placés d'équerre au lieu de supports obliques. De plus, une couturière sait bien qu'un biais taillé dans une étoffe et allant d'une lisière à l'autre est plus long qu'une bande de cette même étoffe coupée en travers de la largeur d'une lisière à l'autre.
2° Si nous mettons maintenant une autre échelle (...)

Ici, si la rhétorique est vide, l'empirisme est assumé par l'enseignant lui même, puisqu'il produit à la fois la démonstration et toutes les ostensions qui la précédent dans le domaine de l'espace matériel : l'enseignant agit et discourt comme si cet espace était identique à l'espace géométrique. L'espace mathématique est ici l'espace d'un langage scolaire, spécialisé dans la description argumentée des observations faites dans l'espace sensible. Les élèves, tout comme aujourd'hui, doivent tracer des traits : (exercice 32) « Construire un triangle équilatéral de 27 millimètres de côté, mener deux hauteurs, les mesurer et dire où se trouve le point de rencontre de ces hauteurs ».

Dans un ouvrage bien plus ancien pour les écoles chrétiennes qui s'annonce comme un « Abrégé de géométrie appliquée au dessin linéaire, à l'arpentage, au nivellement et au lever des plans, suivi des principes de l'architecture et de la perspective[26] » en revanche, les problèmes géométriques sont séparés des problèmes graphiques et le discours géométrique trouve un peu de place pour vivre en première personne : ainsi, le théorème que nous avons pris pour objet d'étude - et dont l'énoncé est identique en tous points à celui que nous avons cité ci-dessus - s'y trouve démontré aussi géométriquement que possible pour un enseignement qui ne dispose pas, à ce stade, du premier cas d'égalité des triangles. La démonstration se fait donc dans le cadre du *laboratoire* que constitue la feuille de papier.

> *Prolongez la perpendiculaire AB d'une quantité BC = BA, et joignez CE ; les angles CBD, CBE sont droits comme adjacents aux angles droits ABD, ABE : donc, EB est perpendiculaire sur AC ; d'après cela :*
> 1° Si l'on fait tourner la figure ABE autour de BE comme charnière il est évident qu'à cause des angles droits en B et de BC = BA, cette figure s'appliquera exactement sur EBC, et l'on aura EC = EA. Or la droite AC est plus petite que la ligne brisée AEC : donc AB, moitié de AC, est plus petite que AE, moitié de AEC. (...)

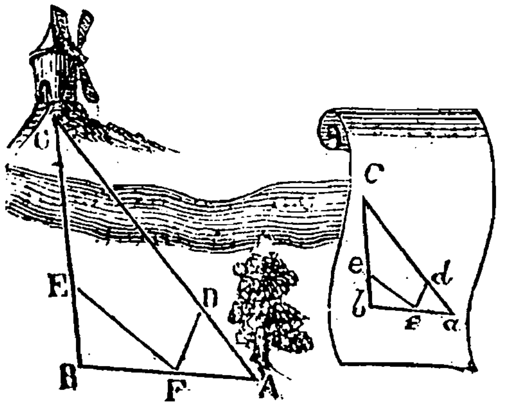
Lorsqu'il s'agira d'arpentage, on pourra alors trouver les problèmes suivants : « Evaluez, à l'aide de la chaîne seulement, la superficie d'un terrain ayant la forme d'un polygone irrégulier » ; « Divisez un terrain en parties équivalentes par des

---

26 F.P.B. (1875), *Abrégé de géométrie appliquée au dessin linéaire, à l'arpentage, au nivellement et au lever des plans, suivi des principes de l'architecture et de la perspective*, Tours, Alfred Mame et Fils, et Paris, Poussielgue Frères.

droites issues d'un même point intérieur » ou un chapitre traitant de l'usage de la similitude des triangles où l'on apprend à « mesurer la distance d'un point inaccessible, sans graphomètre ni équerre d'arpenteur » (à l'aide de jalons convenablement disposés sur une partie accessible du terrain, puis, en reportant la configuration « à l'échelle », sur une feuille de papier). Ce sont des problèmes de modélisation de l'espace nettement posés, qui seront traités clairement, le modèle géométrique étant représenté sur une sorte de petit carnet de croquis à côté d'un dessin du paysage où se pose le problème d'arpentage, et où les lignes de la mise en signes du problème sont tracées, comme on peut le constater sur l'illustration ci-dessous.

766. PROBLÈME 4. — *Mesurez la distance d'un point inaccessible, sans graphomètre ni équerre d'arpenteur.*



Soit à mesurer la distance de l'arbre A au moulin C. Faites planter un jalon en B, à une certaine distance de l'arbre; un autre en D dans la direction de l'arbre et du moulin; un troisième en E dans la direction du point B et du moulin, et un quatrième en un endroit quelconque F sur la direction de AB; mesurez les distances AF, AD, FD, FE, FB, BE; tracez sur le papier une droite *ab*, d'autant de parties d'une échelle adoptée qu'on a trouvé de mètres à AB; construisez sur cette ligne des triangles *a d f*, *f b e* semblables à ceux qu'on forme sur le terrain en imaginant les droites qui joignent les jalons. Ensuite prolongez les côtés *ad* et *be* de ces triangles jusqu'à ce qu'ils se rencontrent; et le nombre de parties de l'échelle que contient *ac* est égal au nombre de mètres que contient la distance de l'arbre A au moulin C; car, à cause de la similitude des triangles, on a *ab* : AB :: *ac* : AC.

N. B. — Par les moyens précédents, on peut mesurer la largeur d'une rivière, d'un fossé, etc.

une illustration du manuel d'arpentage, page 215

3.2. Etude de la relation de modélisation

Nous nous proposons ici d'étudier un problème qui a été réellement posé et résolu par un maçon et sa cliente, afin de montrer comment se fait le travail de modélisation géométrique d'un problème concret, et les difficultés d'un tel travail dès que le modèle n'est pas donné immédiatement dans la culture scolaire. Voici les faits, tels qu'ils ont été rapportés par la cliente elle-même[27].

> « Lors de la rénovation de la vieille maison que j'habite, dans un hameau à la campagne, il a fallu refaire la toiture de la maison : charpente en bois, panneaux isolants et couverture en tuiles. Les murs porteurs extérieurs font 80 cm d'épaisseur, la surface au sol de la maison est de 50 m^2. La projection de la maison au sol a la forme d'un trapèze rectangle, la poutre faîtière étant parallèle à la hauteur du trapèze, les deux murs sur lesquels s'appuient la charpente n'étant pas parallèles entre eux : le toit est à deux pentes.
> L'artisan maçon qui travaillait à la rénovation de ce toit avait disposé la poutre faîtière horizontalement, ainsi que le faîte des deux murs porteurs de la charpente. Or, il est venu me voir en disant : « Je ne comprends pas pourquoi, sur un des murs j'arrive à disposer la charpente de manière à ce que toutes les solives soient parallèles (pour obtenir un pan de toiture plane et poser les panneaux isolants) et sur l'autre, je n'y arrive pas ! ».
> Pourquoi était-il possible de construire une charpente plane par rapport à un des murs et était-ce impossible par rapport à l'autre ? ».

Suite à cela, la cliente, dont la formation en géométrie dans l'espace, « classique », est apparemment solide, résout le problème (la solution qu'elle propose est donnée au fur et à mesure du commentaire que nous en faisons) et l'étudiante demande s'il s'agit bien là d'une « enquête sur les mathématiques répondant à un besoin professionnel » et si la relation de la solution au problème du maçon est bien « une relation de modélisation ».

La difficulté qu'elle rencontre est particulièrement intéressante pour nous, parce qu'elle est au centre des questions que nous avons traitées. Nous pourrions la formuler ainsi : une enquête déjà faite n'est plus à faire. *Un modèle (mathématique) culturellement proposé n'est plus à construire.* Le savoir peut alors sembler le produit naturel de l'étude de la réalité matérielle. Nous allons montrer qu'il n'en est rien. Cependant, nous devrons pour cela « dé-naturaliser le savoir » et l'envisager à nouveau comme le produit d'une activité humaine. Nous devrons prendre les savoirs mathématiques à l'oeuvre dans les activités matérielles observables comme un ensemble d'objets de culture et non comme un ensemble d'objets donné par la nature. Nous allons étudier un phénomène de *naturalisation des modèles culturellement standard.*

---

27 Les étudiants en didactique des mathématiques de la maîtrise de sciences de l'éducation (Université de Provence) devaient, pour illustrer la notion d'enquête sur le savoir (ici, les mathématiques) répondant à un besoin en savoir de la vie courante ou professionnelle, proposer une première observation. Nous travaillons ici à partir de l'observation réalisée sur elle-même par une étudiante. Elle est « la cliente du maçon », et elle propose la narration de cet épisode personnellement vécu comme exemple problématique d'enquête sur les savoirs mathématiques nécessaires à l'exercice d'un métier.

La note de la cliente, qui a pour titre *Construction d'une toiture,* commence, après la narration de l'épisode et l'exposé du problème, par une page intitulée *Définition*, que nous reproduisons ci-dessous.

> Définition
>
> Plan : ensemble de points tels que si on prend une droite passant par deux points quelconques, tous les points appartenant à cette droite appartiennent au plan.
>
> Propriétés
> 1) 3 points non alignés définissent un plan
> 2) 1 droite et 1 point hors de cette droite définissent un plan
> 3) l'intersection (la partie commune, qui appartient aux deux plans) de deux plans est une droite
> 4) 2 droites parallèles sont dans un même plan

On croirait y lire un ouvrage reprenant l'exposition classique de la géométrie. Voilà le modèle d'un problème de toiture : il est constitué de ces quelques énoncés (c'est un modèle culturellement reçu depuis Euclide jusqu'à nos jours ou presque). Il va de soi, il est « socialement naturel[28] ». Que vous connaissiez personnellement la géométrie ou pas, cela ne fait rien à l'affaire : le modèle vous est culturellement donné, ou refusé ; nous le partageons.

Pour voir qu'il s'agit d'un phénomène culturel - d'un donné de la culture - il faut savoir que le texte euclidien est né d'un effort de construction théorique[29]. Que le corpus d'énoncés ainsi obtenu puisse modéliser « l'espace des maisons et de leurs toits à deux pentes » est une autre affaire : question de choix judicieux d'un système d'axiomes, nous y reviendrons en temps utile.

Soit, donc, le modèle euclidien. Sa pertinence reconnue sans autre forme de procès, voilà encore que *le travail du modèle est, toujours, déjà fait.* Il l'est pour nous si nous l'avons rencontré (en général, à l'école). Sinon, la manipulation du modèle n'est pas un objet de notre culture, et nous nous en remettrons aux spécialistes reconnus. Dans un cas comme dans l'autre nous ne ferons pas nous-mêmes le « travail du modèle » : le travail, s'il n'est pas déjà fait, n'est pas *à faire* ; division sociale du travail et des compétences oblige. Ainsi, la cliente, dont nous regardons le travail, a consulté son livre de géométrie (qu'elle avait conservé) pour rechercher les propriétés pertinentes à la question qui lui était posée, en un geste qu'elle n'a pas éprouvé la nécessité de dire : un premier geste qui lui était naturel. Admettons alors

28 Nul ne se posera la question de sa pertinence, de l'existence d'un modèle plus efficace - mettons, un modèle algébrique - pour ce type de problème, ou de la manière de procéder des civilisations qui construisent des toits plans à deux pentes sans connaître la géométrie euclidienne comme modèle : ne construit-on alors que des maisons à murs parallèles, ou « fait-on monter les murs jusqu'aux toits » ? Plus près de nous, les Compagnons du Devoir par exemple, utilisent-ils un tel modèle, ou bien ont-ils conservé des pratiques alternatives ?

29 Les mathématiciens qui se sont intéressés à cette question d'histoire en ont débattu près de deux siècles. Ce n'est qu'au début du vingtième siècle que Tannery a définitivement montré que c'est bien ainsi qu'il fallait lire Euclide ; depuis, Lebesgue - je le cite ici comme un parmi d'autres mathématiciens de renom - a montré l'intérêt et l'originalité de l'approche euclidienne des problèmes géométriques, en reprenant pour son compte certains des grands problèmes qu'elle traite : auparavant, ces problèmes que traite Euclide n'étaient pas suffisamment avancés dans la pensée mathématique commune, pour que l'on puisse interpréter unanimement ce qu'il avait fait.

avec elle que le « travail du modèle » (l'étude géométrique du problème) est déjà fait, dans un livre de géométrie, dès que nous disposons de ce livre. Il reste encore au moins un geste à réaliser - un geste qui, lorsqu'il n'est pas, lui aussi, donné par la culture (de l'institution scolaire, ou du métier), est bien difficile à accomplir, parce qu'il consiste à *éprouver la pertinence d'un savoir pour la résolution d'un problème.*

Nous ne savons pas, le plus souvent, pourquoi « ceux qui savent » - ceux dont le métier est de savoir produire les réponses, même lorsqu'ils ne savent pas précisément la réponse au problème dont il est question - donnent, à ceux qui ne savent pas - ceux qui ne savent même pas où chercher une réponse possible - des indications aussi (apparemment) évasives et peu pertinentes[30]. Ce n'est pas qu'ils voudraient cacher quelque chose, interdire l'accès à la réponse, c'est d'abord que ces indications ne sont pas utiles au novice, parce qu'elles ne portent pas sur les savoirs dont dépend la réponse, mais sur les moyens pour celui dont c'est le métier de produire la réponse lorsque la question est bien posée. Autrement dit, la difficulté c'est alors que ce qui fait « point de repère naturel » dans la culture n'est ailleurs qu'une information parmi tant d'autres. Vous êtes comme le campagnard qui vient en ville et n'arrive pas à suivre le chemin qui lui a été décrit parce qu'il n'a pas réussi à s'insérer sur la file de gauche et qu'il n'a pas non plus vu passer le panneau indiquant la direction à suivre, étant d'abord attentif aux voitures qui le serrent...

Le geste, naturel dans la culture géométrique scolaire « classique », c'est *la saisie du problème (ici, le problème du toit) dans le système de signes que le modèle (ici, le modèle géométrique) propose.* Son côté « naturel » assure sans que la question n'ait été posée que le modèle donné modélise le problème.

C'est un geste complexe qui mérite que l'on s'y arrête, car les gestes élémentaires que nous allons ainsi découvrir sont *les gestes professionnels de la modélisation* géométrique, ceux qui assurent la réussite du changement du cadre d'étude du problème : des gestes que nul ne décrit jamais, sinon peut-être les anthropologues - et les enseignants, quand la culture scolaire a trouvé le temps de se stabiliser et les moyens de les repérer et de les nommer. Ces gestes restent toujours des *gestes du métier* - du métier d'architecte par exemple, ou du métier d'élève - c'est à dire des gestes que l'on vient « faire vivre » en pratiquant le métier. Des gestes que l'on acquiert par l'apprentissage, en regardant faire celui qui sait et qui vous montre comment il fait. Des gestes que l'on acquiert avec la pratique, avec l'âge et l'expérience, et que l'on appelle pour cela fort précisément *les gestes du métier* (les gestes que l'on possède lorsque l'on a « du métier »).

Il y a bien problème, c'est la première réponse que donne la géométrie. Cette réponse tient dans l'usage des premières définitions, *rappelées*, comme nous l'avons remarqué : « Trois points non alignés définissent un plan. », ou mieux, « Une droite et un point extérieur à cette droite définissent un plan. », ce qui permet de dire que « S'il y a plus d'un plan dans notre espace et si nous nous donnons quatre points, ils ne sont pas automatiquement dans le même plan. », mais cela va sans dire puisque le modèle fonctionne tout seul, d'avance.

Nous avons, dans le problème qui nous occupe, quatre points ou plutôt une droite - la poutre faîtière peut être considérée comme droite - et deux points - les « coins » du mur - ou une deuxième droite - le sommet du mur. Nulle raison *a*

---

30 Pour imaginer ce dont il s'agit, mettons-nous un instant à la place du maçon à qui la cliente répondrait en lui tendant un livre de géométrie dans l'espace et en lui disant : votre réponse est dans ce livre, voyez en particulier le chapitre « Plans et droites » !

priori pour que les points soient tous deux dans un plan contenant la droite, à moins que le sommet du mur ne soit parallèle à la poutre faîtière, puisque « Deux droites parallèles sont dans un même plan. » ; ce n'est justement pas le cas, puisque la poutre faîtière est parallèle au sommet du premier mur qui, lui, n'est pas parallèle au sommet du mur d'en face - la maison n'étant pas rectangulaire.

3.2.1. Le modèle fournit une explication

Le problème a une raison d'être, le modèle géométrique la donne - le modèle rend *raison* du problème, on dit qu'il fournit une explication au phénomène constaté - car « Deux droites non parallèles coplanaires sont sécantes. », ce qui fait que : *deux droites non parallèles ne sont dans un même plan que dans le cas où elles sont sécantes.* Pour que deux droites non parallèles soient coplanaires il est donc nécessaire qu'elles soient sécantes, et les solives que le maçon cherche à placer parallèles les unes aux autres ne peuvent l'être que si elles sont coplanaires, soit, si la poutre faîtière et le sommet du mur sont parallèles, ou sécantes.

Voici donc l'explication : le sommet du second mur et la poutre faîtière, qui ne sont pas parallèles, ne sont pas non plus (portés par deux droites) sécant(e)s, puisque les sommets des deux murs sont dans le même plan horizontal et que la poutre faîtière, qui n'est pas dans ce plan et qui est parallèle au sommet du premier mur, est parallèle à ce plan. Avec l'explication, le modèle fournit presque immédiatement la démonstration de l'existence possible d'une solution[31] - le sommet du mur et la poutre faîtière doivent être portés par deux droites sécantes - et il donne la solution elle-même : « Il faut bouger la poutre faîtière pour la placer le long d'une droite sécante aux deux sommets des murs qui, on peut le constater, sont coplanaires et sécants ; ou bien, il faut garder la poutre en l'état et refaire le sommet du mur dans le plan défini par la poutre et un de ses angles, ce qui a l'avantage de conserver en l'état l'autre pan du toit et de donner à la maison l'aspect d'une maison rectangulaire lorsqu'on la regarde du bon côté ». Le modèle indique en effet les contraintes à satisfaire, et la possibilité de le faire.

3.2.2. Le modèle culturel n'est pas l'objet du discours euclidien

La solution au problème du toit à deux pentes est maintenant donnée par le retour au système. Les sommets des murs doivent être soit parallèles à la poutre faîtière, soit sécants à celle-ci. On peut le vérifier en demandant comment le maçon a résolu le problème, la solution réalisée à partir d'une poutre et de sommets de murs portés par des droites sécantes n'est pas la solution retenue, l'émergence d'une solution aussi atypique est peu probable, parce que le maçon a résolu le problème sans l'avoir étudié au préalable, et que de ce fait la position de la faîtière était déterminée d'avance. Il a donc rehaussé le mur aux points où devaient porter les solives, suffisamment pour

---

31 Nous avons deux cas à traiter : si les sommets des murs sont parallèles entre eux - ou s'ils peuvent être rendus tels - alors, la poutre faîtière doit leur être parallèle ; si en revanche les sommets des murs ne sont pas parallèles entre eux, alors, la poutre faîtière doit être, ou bien sécante à l'un d'eux et parallèle à l'autre, ou bien sécante commune aux deux ; ce qui fait que, dans le cas où les sommets des deux murs, non parallèles entre eux, seraient sécants, la poutre faîtière devrait être sécante en ce point, ou parallèle au sommet de l'un d'eux. Elle ne peut en effet être dans ce dernier cas parallèle à un des sommets de mur et sécante à l'autre, parce qu'elle serait alors dans le plan commun de ces deux sommets, et qu'elle ne définirait plus un faîte puisque le toit serait, dans un tel cas de figure, plat.

réaliser de proche en proche le parallélisme de chaque solive nouvelle avec l'ancienne, et il a ensuite.« lissé » le sommet de mur ainsi obtenu.

Cette solution n'a pourtant pas été envisagée par la cliente : les rappels de définitions ne parlent pas de droites sécantes, celles-ci ne figurent pas dans le modèle retenu. C'est que le modèle mathématique mis en oeuvre n'est pas le modèle euclidien complet : la culture propose, pour la manipulation des problèmes de l'espace, des objets intermédiaires qui satisfont à des contraintes que nous pouvons analyser comme « de bonne distance » avec la culture commune, et de négociation avec celle-ci de la pertinence de la solution. Une telle négociation est nécessaire : rappelons les mots du maçon devant son sommet de mur oblique : « Je le vois (je vois que c'est la solution), mais je ne l'aurais pas cru ! ».

Entre le modèle (mathématique) et le problème (dans l'espace matériel), il y a traditionnellement *le modèle graphique-*. C'est un outil de négociation mais, nous le montrerons, il masque le travail géométrique sous-jacent. Il est irremplaçable, sa place se justifie par cela, qu'il produit des objets plus aisément reconnaissables par la culture : ce sont *comme des dessins* de maison - et la culture ne les verra pas comme des figures de la théorie géométrique, la culture pourra éviter de s'affronter au questionnement sur le savoir que véhicule l'idée d'un rapport de modélisation.

Cette ambiguïté du statut épistémologique des représentations graphiques des problèmes de géométrie, qui ressemblent aux représentations graphiques des objets de l'espace, offre au travail technique du modèle graphique la légitimité sociale que donnent des produits aisément reconnaissables, des produits que l'on peut à la demande transformer en dessins représentant les objets matériels modélisés, alors qu'ils étaient les représentants graphiques des objets mathématiques manipulés.

Nous devons étudier plus précisément cette fonction de *visibilité* culturelle, que toute technique doit assurer pour exister de façon stable : c'est une fonction que l'idée de *représentation* graphique assure pour la géométrie. Nous devrons étudier la manière dont le travail géométrique *sur les figures de la feuille de papier* assure une triple fonction :

- dispositif *technique d'étude* produisant les gestes pertinents pour le travail d'un problème de l'espace matériel,
- dispositif assurant *la visibilité* culturelle du travail technique,
- dispositif assurant la *régulation* et le contrôle interne des gestes techniques par la visibilité-pour-le-manipulateur des gestes qu'il est amené à accomplir - nous appellerons cette fonction *la sémioticité* des gestes techniques.

Le modèle intermédiaire (graphique) et les règles de sa manipulation sont donnés, comme était donné le modèle euclidien des axiomes et propriétés (géométriques).

3.2.3. Le modèle graphique comme objet intermédiaire

Ce modèle assure la saisie du problème dans un discours proche du discours géométrique, avec l'ensemble des fonctions qu'il nous faut maintenant rendre visibles. Il n'est pas même, comme le modèle euclidien qui méritait un exposé particulier, présenté par ses règles de fonctionnement. Dans l'usage qui en est fait et comme on peut le voir en annexe, la première figure montre immédiatement comment le modèle se saisit du problème : cette apparition ne semble nécessiter aucun commentaire.

Voici pourtant ce qu'il en serait si la maison était simplement *représentée* (sous un point de vue quelconque, choisi ici simplement pour garder la plus grande cohérence possible avec la figure donnée dans ce document) : c'est la figure 19. Les arêtes ne sont pas tracées : elles délimitent les zones planes.

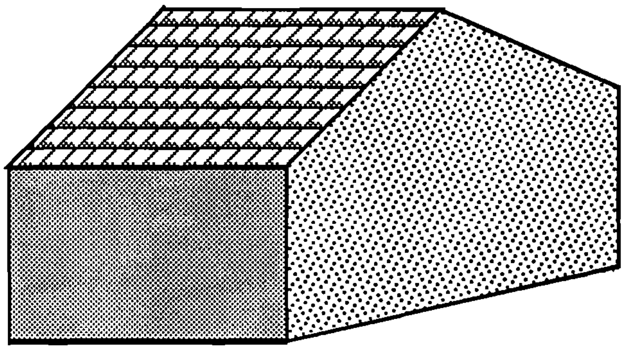


figure 19

Afin de nous rapprocher du point de vue géométrique, c'est-à-dire, afin de « voir une figure derrière le dessin », comme le dirait la culture, nous passons bientôt d'une représentation des plans à une représentation des droites. C'est le geste premier du travail de *saisie du problème* dans un modèle graphique (figure 20).

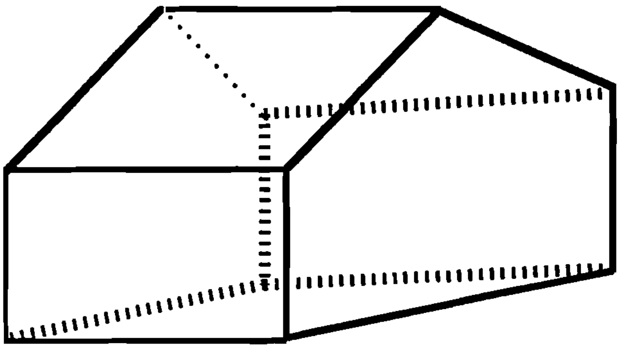


figure 20

En ce premier temps, ce qui fait problème n'est pas encore visible sur ces représentations : le problème doit être construit. Pourtant, déjà, l'objet graphique comprend beaucoup de nouveaux objets ; en particulier, *toutes* les arêtes y sont représentées : qu'elles soient invisibles du point de vue de l'observateur n'y change rien. Des pointillés aideront à garder un contrôle visuel de la bonne exécution de ce qui commence à devenir une figure, dont seule la partie en trait pleins évoquera le dessin précédent.

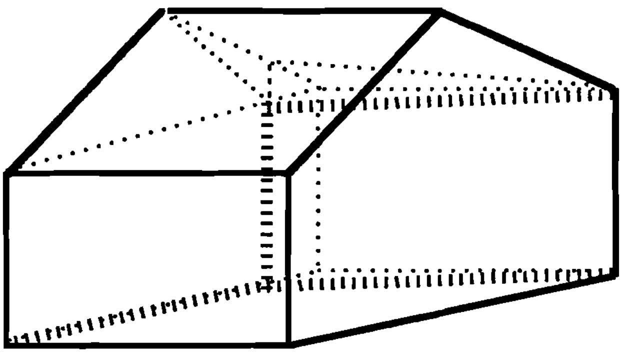


figure 21

La figure 21 est en revanche une sur-figure, puisqu'on y montre des traits qui ne correspondent à aucune arête réelle : les arêtes de la « maison complète » sont évoquées (en pointillés fins) et on trouve même un trait qui ne correspond à aucune arête virtuelle : il montre des propriétés géométriques de l'objet que la modélisation construit.

Il ne s'agit plus de tracer des arêtes - invisibles, mais existant « dans l'objet », serait-il un objet fictif -, nous trouvons les éléments d'*une sur-figure.* Celle-ci correspond bien en partie à un sur-objet virtuel : à des arêtes qui n'ont aucune existence matérielle et sont des constructions de la pensée (ici, des arêtes qui correspondent à une maison ordinaire, à murs parallèles, dont les pans de toit sont des plans et dont les sommets des murs sont parallèles), mais aussi à une droite dont l'unique intérêt est de montrer l'idée qui permettra le calcul. La sur-figure ne correspond pas à un objet matériel, ou virtuel, mais à un objet de la géométrie : elle représente un objet mathématique, *un objet réel... de la géométrie*, ce que l'on appelle un « trait de construction ». Pour la vision culturelle, non technique, la maison « réelle » apparaît maintenant comme « extraite » (ou abstraite) d'une maison imaginée grâce à la « représentation graphique », qui correspond à une maison « idéelle » : le toit de la maison réelle sera tout aussi bien abstrait du toit idéal imaginé (J'utilise ici, volontairement, le vocabulaire culturellement reçu pour ce type de rapports de système à modèle, afin de mieux montrer comment l'acception culturelle péjore le geste de production théorique, ce qui a pour effet principal de l'interdire - dans le cadre de la culture -, c'est à dire de le réserver aux spécialistes).

Le travail n'est pas terminé. D'abord, il faut terminer la saisie géométrique du problème, en passant des droites aux points, qui sont presque toujours les objets élémentaires à partir desquels se fait le travail géométrique proprement dit.

Cela suppose que l'on nomme les points sur lesquels on va discourir (figure 22) : les droites sont alors des couples de points, les plans des triplets de points ou des couples de droites (sécantes ou parallèles), etc. Il faut *extraire de la figure complète les sous-figures pertinentes* à l'explication et au calcul des dimensions des murs et du toit.

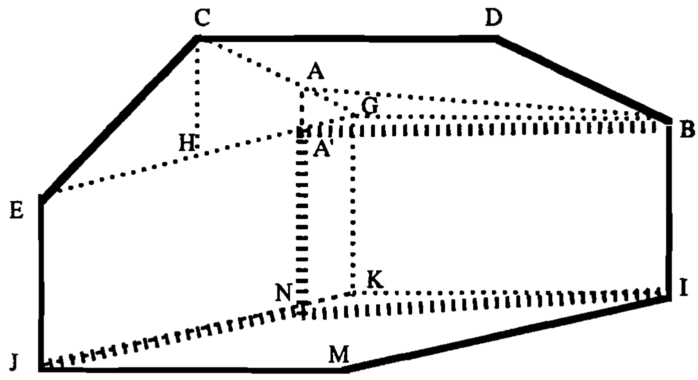


figure 22

En particulier il faut montrer l'existence, et l'allure, de la solution choisie. Par exemple, il faudra peut-être « rabattre » les plans correspondant aux grandeurs que l'on veut mesurer. Cela nécessitera encore de nombreux gestes techniques. Déjà, il ne reste ici presque plus aucune des arêtes initiales, l'état actuel de la maison n'est pas visible.

Voici par exemple la figure 23, qui sert à évoquer le problème complet et qui permet en particulier de nommer les grandeurs dont nous donnerons les mesures. Cette figure indique en particulier les parties à mesurer afin de placer le point A : sa position détermine à la fois la valeur du rehaussement (BAA') du mur BINA' et celui (CAA') de la façade CEJNA'

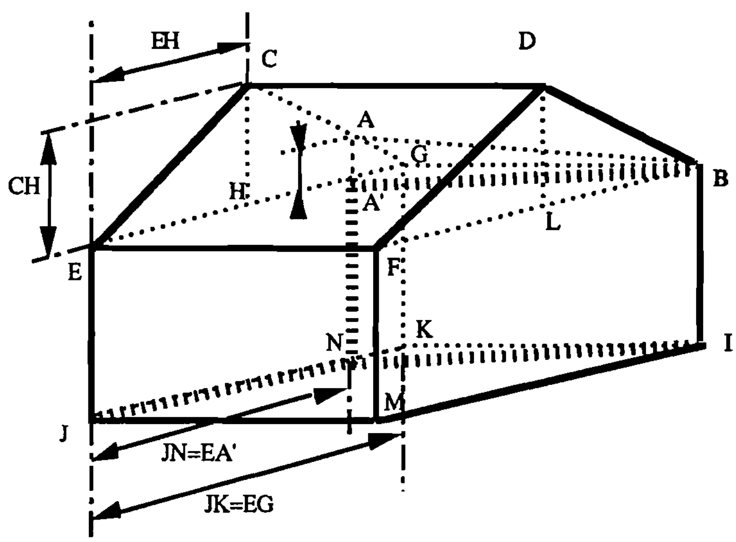


figure 23

...d'où la sous-figure pertinente (figure 24) :

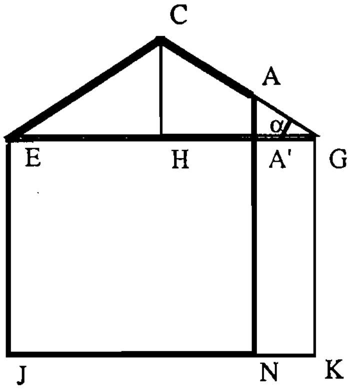


figure 24

Elle suffit maintenant à la résolution du problème, car les propriétés utiles y sont transportées (sur d'autres lignes, parallèles aux lignes où nous devrons aller les chercher quand nous voudrons revenir à la maison matérielle) pour placer un repère au point de jonction du mur à rehausser et de la façade à terminer : pour placer le point A dans l'espace matériel (à la hauteur AA' au dessus de A' qui avec C, E, J, N, correspond à la maison actuelle).

Il nous resterait à suivre les deux dernières pages du travail, mais nous sommes maintenant dans un travail plus strictement mathématique. Nous n'irons pas plus loin et nous renverrons le lecteur à l'annexe, où la solution proposée est donnée in extenso. En revanche, il est un travail que nous pouvons fournir à partir de ce point, et qui caractérise les études de modélisation : nous pouvons en effet *proposer à un maçon un procédé pratique de construction directe du point A*, un procédé qui évite le recours à la culture géométrique savante mais qui repose sur les gestes professionnels d'attaque des problèmes d'alignement ou de parallélisme - comme ce que doit être, pour un cas de ce type, la technique des compagnons charpentiers (qu'on pourrait maintenant aller, avec grand profit, interroger à ce propos).

> *« Le point A doit être dans le plan déterminé par (CD) et B, ce qu'il est commode de réaliser par visée directe : soit un observateur au niveau du sol, qui s'éloigne du pied de la maison de manière à voir le point B en coïncidence exacte avec un point de la faîtière ; cet observateur a ainsi placé ses yeux dans le plan (BCD), et il doit encore voir le point A sur la faîtière ; un manipulateur n'a donc qu'à placer une règle verticale le long de l'arête (PO) de telle manière que l'extrémité de la règle paraisse, pour l'observateur convenablement placé, coïncider avec la faîtière pour que le point de l'espace ainsi obtenu soit le point A cherché ».*

4. Une conclusion provisoire

Nous nous arrêterons ici : il nous faut maintenant attaquer en propre les problèmes d'enseignement, ce que nous ferons dans la troisième partie de ce travail, puisque nous avons posé à la fois ce que pouvait être la géométrie (dite élémentaire) comme théorie en acte de la rationalité, système de signes graphiques soutenant le premier discours mathématique (axiomatisé), le premier calcul sur d'autres termes que les nombres particuliers, et comme physique (élémentaire) de l'espace sensible, dont le laboratoire privilégié serait la feuille de papier. Nous pourrions encore prendre les laboratoires particulièrement riches que proposent les logiciels comme Euclide ou Cabri Géomètre, ce qui nécessite des études particulières pour chacun de ces cas. Des études que nous commençons à peine d'imaginer maintenant.

Les programmes actuels nous ouvrant, par leur formulation, tous les possibles qui vont d'un de ces extrêmes à l'autre, nous pouvons pourtant commencer à proposer des embryons de textes d'enseignement, dont nous devrons étudier la faisabilité didactique.

Mais nous avons posé le problème qu'il nous faut résoudre, celui de l'enseignement de la géométrie comme modèle de l'espace. Les problèmes didactiques rencontrés sont nouveaux, parce que ce domaine mathématique qu'est la géométrie est traditionnellement le lieu de l'enseignement de la pensée rationnelle, et qu'il ne peut sans danger pour sa survie perdre cette spécificité.

Nous avons ensuite mis en place les outils mathématiques du travail didactique qu'il reste à faire. En particulier nous avons construit l'outil d'entrée dans la modélisation géométrique qu'est le schéma. Nous avons montré comment se fait le travail du schéma, et comment la construction d'un système de signes apte à traiter les questions posées est au cœur des problèmes de tout enseignement de la modélisation.

Nous pouvons alors aborder le travail de constitution d'un texte d'enseignement et l'étude des scénarios didactiques correspondants, ce que nous ferons dans les 4ème et 5ème section de cette série. Ce sera le deuxième moment du travail d'étude des possibles que les programmes actuels ouvrent à notre initiative.

Dans la perspective que nous dégageons ici, c'est seulement dans un troisième moment du travail didactique que nous rencontrerons certaines questions cruciales, qui viendront lors du mouvement de retour des modèles géométriques locaux produits pour l'étude de problèmes géométriques particuliers, en direction des problèmes généraux rencontrés dans l'étude des espaces. C'est-à-dire, lorsque nous entreprendrons, forts de notre connaissance des objets qui sont dans l'espace, les études expérimentales des propriétés générales qui se réalisent dans un espace. C'est dans ce même moment que nous rencontrerons les questions qui viendront de ce que la géométrie devra rester la terre d'élection de l'enseignement de la rationalité : des questions que tout enseignement de la géométrie, quel qu'il soit, ne saurait éviter.

Quelques indications bibliographiques, pour la première partie et pour celle-ci.

Bibliographie

BERGER M. (1990), La géométrie de Riemann. Aperçu historique et résultats récents, Images des mathématiques, *Le courrier du CNRS*, supplément au n° 76.

BESSOT A. et RICHARD F (1979), *Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma,* Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1983), *Etude de questions d'enseignement un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble, IMAG, LSD.

CARREGA J-C. (1981), *Théorie des corps, la règle et le compas*, Paris, Hermann.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition 1991).

CHEVALLARD Y. (1986), Les programmes et la transposition didactique, illusions, contraintes et possibles, *Bulletin de l'APMEP, 352*, (février).

CHEVALLARD Y. (1988), *On didactic transposition theory : some introductory notes*, (communication) International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, 3-7 août 1988.

EUCLIDE (v. 300 av. J.C.), *Les Eléments*, traduction F. Peyrard, 1809, (réédition 1966, Paris, Blanchard).

GILLE B. (1964), *Les ingénieurs de la Renaissance*, Paris, Hermann (réédition 1974, collection Points Sciences).

GONSETH J.F. (1945), *La géométrie et le problème de l'espace*, Neuchâtel, Editions du Griffon.

GOYARD-FABRE S. (1968), Preuve (épistémologie), *Encyclopædia Universalis*, Paris.

KC. (1968), Géométrie algébrique, *Encyclopædia Universalis*, Paris.

I.R.E.M., Groupe épistémologie et Histoire, Dhombres J., Dahan-Dalmedico A., Bkouche R., Houzel C., Guillemot M., (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars.

LELONG P. (1968), Géométrie différentielle classique, *Encyclopædia Universalis*, Paris.

LEBESGUE H. (1950), *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, (réédition 1987, Paris, Jacques Gabay).

PLATON (v. 428-v. 348 av. J.C.), *La République, VII*, Paris, Garnier-Flammarion.

ROUCHE E. et de COMBEROUSSE Ch (1880?), *Traité de géométrie*, Premier Livre, Géométrie plane, (8ème édition 1912, Paris, Gauthier-Villars).

RUSSO F. (1968), Géométrie, *Encyclopædia Universalis*, Paris.

STEVIN S. (1584), *La Statique*, trad. française Girard A.(1610), (réédition 1987, Paris, ACL-éditions).

TANNERY P. (1887), *La géométrie grecque*, Paris, Gauthier-Villars (réédition 1988, Paris, Jacques Gabay).

VALERY P. (1924), Eupalinos, Préface à *Architectures*, Paris, Sue et Mare (réédition 1944, Paris, Gallimard).

Annexe

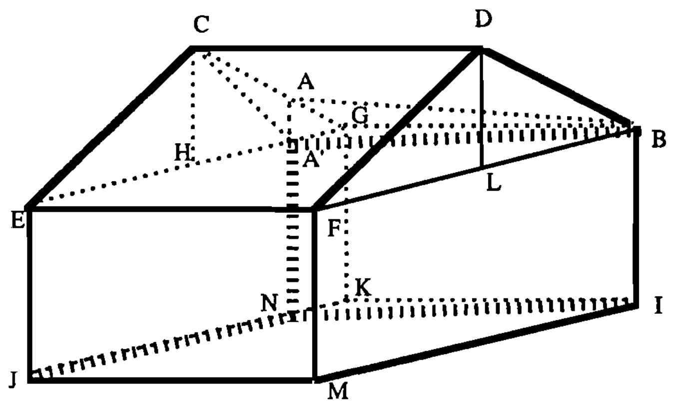
La solution proposée

Définition

Plan : ensemble de points tels que si on prend une droite passant par deux points quelconques, tous les points appartenant à cette droite appartiennent au plan.

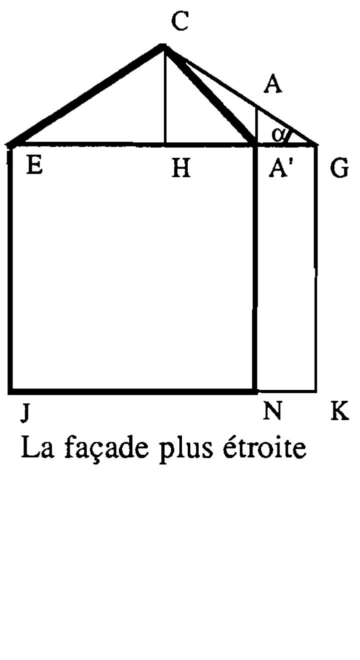
Propriétés

1) 3 points non alignés définissent un plan
2) 1 droite et 1 point hors de cette droite définissent un plan
3) l'intersection (la partie commune, qui appartient aux deux plans) de deux plans est une droite
4) 2 droites parallèles sont dans un même plan

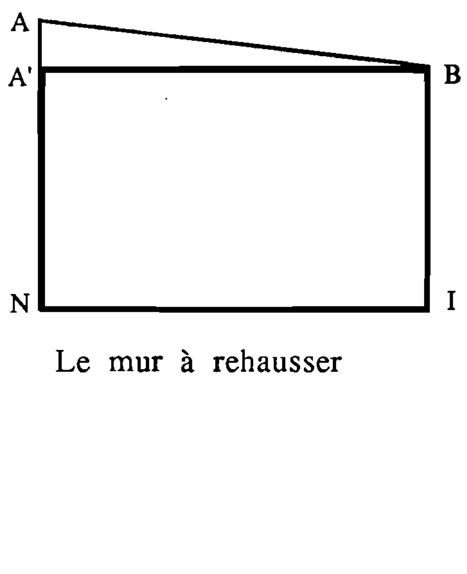


Sont représentés
En gras :
les arêtes existantes,
En fin :
les trait fictifs,
En pointillés :
les traits correspondant à des parties (réelles ou fictives) cachées.

La maison vue depuis l'arrière

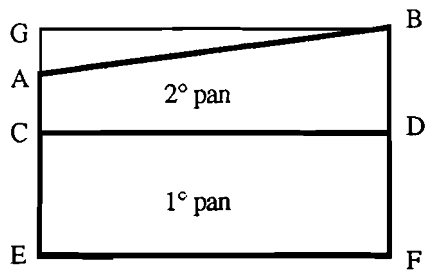


La façade plus étroite



Le mur à rehausser

Toit vu de dessus



GE // BF,
CD // EF,
AB non// CD,
CE // DF
Le toit est composé de deux pans ou parties : ABDC et CDFE, chaque partie doit être plane, parce que couverte en panneaux industriels plans.

Comment faire pour que chaque pan de toit soit plan ?
Comment faut-il monter le mur ANIB ?

Cas du premier pan de toit CDFE
CDF constitue un plan (3 points). Les droites DF et CE sont dans un même plan (Parce que //), le plan (CDF). Le point E appartient à la droite (CE), donc il est dans le plan CDFE (qui constitue bien une surface plane).

Cas du deuxième pan de toit ABDC
Où se trouve le point A ? Il se trouve dans le plan (BCD), plan du toit, et dans le plan (EJK), plan du mur, donc il se trouve à l'intersection de ces deux plans, qui est la droite (CG) (G est un point fictif)

A quelle hauteur se trouve la point A, par rapport à la droite horizontale (EA') ? (Ou, à quelle hauteur par rapport au plan (BEFG) ?)
AA' = h

α = ECG, angle du pan de toit (ABCD) avec le plan (BFEG)

$$tg = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent (autre que l'hypothénuse)}}$$

ou : $tg\ \alpha = \dfrac{h}{A'G}$ $h = A'G\ tg\ \alpha$

ou : $tg\ \alpha = \dfrac{CH}{HG}$ $h = A'G\ \dfrac{CH}{HG}$

comme $A'G = HG - HA'$, $h = (HG - HA')\ \dfrac{CH}{HG}$

comme $HG = LB$, $h = (LB - HA')\ \dfrac{CH}{LB}$

$$= LB\ \frac{CH}{LB} - \frac{HA'}{LB}CH$$

soit, $\boxed{h = CH(1 - \frac{HA'}{LB})}$

on peut mesurer CH, HA', LB, il faut donc remonter les murs A'BIH à l'angle A', d'une hauteur AA' = h.