UNE UTILISATION DU LOGICIEL «GEOMETRE» EN 5ème

Danielle BERGUE
IREM de Rouen

L'objet de cet article est la description d'une séquence autour de *«orthocentre et centre du cercle circonscrit à un triangle ; découverte de quelques propriétés»*.

Introduction

Les programmes de 6ème et 5ème proposent une initiation progressive au raisonnement. En géométrie, le raisonnement est souvent considéré comme synonyme de démonstration et devrait être pris en compte selon trois phases :

1. une appropriation du problème qui se fait par l'intermédiaire de la construction et l'explicitation des données sous forme «d'hypothèses» ;
2. une recherche de la solution qui demande un tri parmi des propriétés connues pour déterminer celles pouvant être utiles : va-et-vient constant du regard et de l'esprit entre le cas particulier de la figure et l'expression générale des propriétés («cas particulier de la figure» qui ne doit pas l'être au sens habituel du terme) ;
3. une mise en forme écrite de la solution qui fait apparaître les étapes d'un raisonnement déductif.

Chaque phase doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. De plus, entre la première phase et la seconde, l'objet construit change de statut. De dessin concret sur une feuille de papier, il devient figure générale, objet idéal. Au niveau 6ème-5ème, ce concept est peu ou pas disponible.

Dans la brochure «De la figure vers la démonstration» de l'IREM de Rouen[1], nous avons présenté un certain nombre d'activités qui permettent de faire évoluer les conceptions des élèves. En particulier, la prise en compte des contraintes liées à la figure permet de donner du sens à l'étape de la recherche de la solution. Or, souvent, les élèves confondent contraintes spécifiques à l'exercice avec construction de cas particuliers et élimination de ceux-ci (triangles isocèles et équilatéraux, rectangles, carrés, etc.). Devant cette difficulté des élèves, la construction de plusieurs dessins peut aider à faire émerger les contraintes spécifiques du problème.

C'est à ce niveau qu'un logiciel tel que Géomètre peut être outil précieux. En effet, la figure étant construite, on peut, en continu, la faire évoluer sur l'écran. Les élèves vont donc avoir une vision concrète des différentes constructions possibles et

[1] IREM de Rouen, 1989, De la figure vers la démonstration.

non une juxtaposition de plusieurs dessins. Le changement de «point de vue» sur la figure peut se faire plus aisément.

La construction de plusieurs dessins est une des méthodes proposées pour que d'une part les élèves se construisent le concept de figure, et que d'autre part, les caractères invariants de ces figures apparaissent. Or dans la suite d'images créées à l'écran, il est possible de comprendre que, par exemple, les différents triangles n'ont été définis qu'une fois et donc sont représentants d'une même figure. Les élèves peuvent ensuite proposer des contraintes, *«2 côtés perpendiculaires ou de même longueur»*, et voir, grâce à l'évolution continue permise par «Géomètre», que la réalisation simultanée de deux séries de contraintes n'est possible que dans un cas particulier.

De plus, il ne s'agit pas de produire à l'aide de Géomètre un imagiciel qui permettait d'illustrer, de manière nouvelle, une partie du cours et de poursuivre ensuite un apprentissage avec l'environnement habituel, mais de l'utiliser pour aller plus loin : c'est une aide pour faire évoluer la recherche du problème par les élèves.

Pourtant, R. Gras affirme : *«les activités dialectiques de nature expérimentales qui se limitent au seul spectacle visuel des faits (mobilité des points...) sont d'effet illusoire sur l'apprentissage... Au niveau du produit logiciel,... il y aura nécessité de négociation régulière maître-élève, faute de quoi on pourrait assister à un vide audiovisuel»*. Le lien entre les hypothèses émises par les élèves pour faire évoluer la figure avec les propriétés de géométrie connues et leurs conséquences devra le plus possible être verbalisé, un apprentissage de pratiques du raisonnement étant visé. C'est un obstacle important en géométrie dès la 6ème-5ème. L'environnement créé avec Géomètre peut aider à le lever.

I. Objectifs

* Objectifs cognitifs (propres à la séquence) :
- réinvestir des droites particulières d'un triangle ;
- définir l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit à un triangle ;
- étudier dans le cas particulier du triangle rectangle le point de concours des hauteurs, des médiatrices ;
- réinvestir la propriété de la somme des angles d'un triangle.

* Objectifs cognitifs généraux :
- comprendre la nécessité d'une preuve ;
- mettre en œuvre différents niveaux de validation.

* Objectifs méthodologiques :
- rédiger, formuler des résultats ;
- poursuivre l'apprentissage de certaines règles de logique (différence entre «un» et «tous», «les» et «des» ; utilisation d'expressions du style «si... alors ») ;
- apprendre à passer de l'expérience sensible à l'objet idéal (notion de figure).

II. Prérequis

- Définition de la hauteur d'un triangle, de la médiatrice d'un segment, du triangle rectangle ;
- Notions d'angle obtus, aigu ;
- Somme des angles d'un triangle (énoncé de la propriété).

III. Description de la séquence

1. Matériel utilisé, disposition de la classe

La séquence se déroule avec l'ensemble de la classe (24 élèves). Les élèves travaillent individuellement. L'ordinateur unique (avec souris) est relié à une tablette rétroprojectable. Les figures obtenues sont projetées sur un tableau blanc (sur lequel il est possible d'écrire). On peut donc aussi utiliser la figure projetée comme on le fait ordinairement d'un dessin au tableau.

Au cours de la séquence, c'est la modification progressive qui a été utilisée : ce sont le plus souvent les élèves qui sont venus manipuler eux-mêmes en réponse aux conjectures qui étaient proposées par eux-mêmes ou par l'ensemble de la classe. Les élèves ont effectué les dessins sur leur cahier d'exercices et on noté les résultats obtenus au fur et à mesure (institutionnalisation).

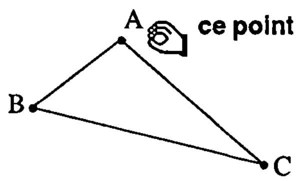
L'ensemble du travail avec l'ordinateur a duré environ 2h30 (mi-février 1991).

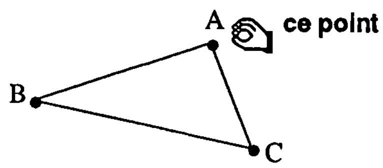
2. Première étape

a. Définition d'un triangle

Géomètre définit un triangle à partir de 3 points. Le logiciel permet de les nommer A, B, C (cela sera utile dans la partie 6 de cette étape).

A l'aide de «Géomètre», on «saisit» l'un quelconque des sommets et on le déplace.





Cela permet de pointer le fait qu'un triangle n'est pas le dessin obtenu, mais un «objet» défini par trois points (au sens outil-objet de R. Douady)[2].

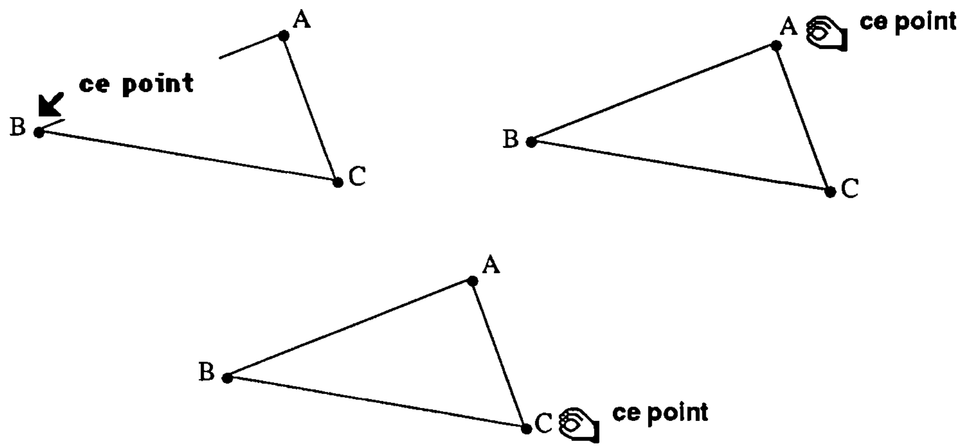
Par le déplacement, on cherche à obtenir des triangles isocèles, équilatéraux, rectangles. Les élèves dans le même temps rappellent oralement les caractéristiques de ces figures. C'est sur l'image projetée que les élèves viennent mesurer les côtés ainsi que les angles (les erreurs de mesure permettent de souligner la différence entre l'objet idéal et le dessin obtenu).

---

[2] R. DOUADY, 1984, Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.*Thèse d'état, Université Paris VII.*

b. Mesure des angles

A la suite de la manipulation précédente, les élèves demandent à mesurer les angles. Géomètre définit l'angle par trois points ordonnés, exactement comme on le fait en écrivant.



Le professeur montre sur un exemple le procédé, deux élèves viennent définir les deux autres angles du triangle (surveillés avec attention par la classe !).

Les élèves viennent «faire» dessiner des triangles particuliers en s'intéressant cette fois aux propriétés des angles du triangle.

c. Construction des hauteurs

«Géomètre», pour construire une hauteur, suit pas à pas la définition : c'est une droite perpendiculaire, passant par un point (le sommet), perpendiculaire à une droite (le côté opposé).

Cette rigueur dans la définition exigée par l'ordinateur sous-tend celle exigée par la géométrie : c'est l'obligation de réfléchir de **façon successive** et **non globalement** qui va permettre le succès des constructions réalisées par les élèves de cette classe sur leur cahier dans la phase d'institutionnalisation.

Deux élèves viennent dessiner les deux autres hauteurs. L'orthocentre apparaît. On le définit comme l'intersection des hauteurs. Géomètre ne considérant pas les lignes comme des ensembles de points, il ignore donc l'intersection des hauteurs tant qu'elle n'a pas été définie comme intersection de deux droites (que l'on peut faire nommer H).

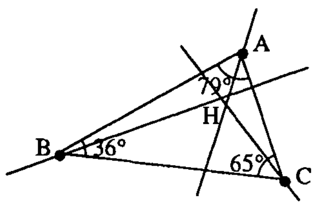
d. Phase d'institutionnalisation

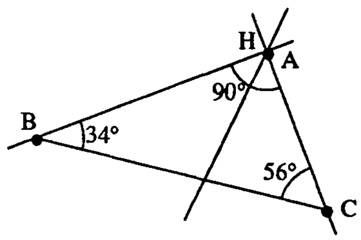
Les élèves reproduisent le dessin dans leur cahier et écrivent : *«les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, leur point de concours s'appelle l'orthocentre»*.

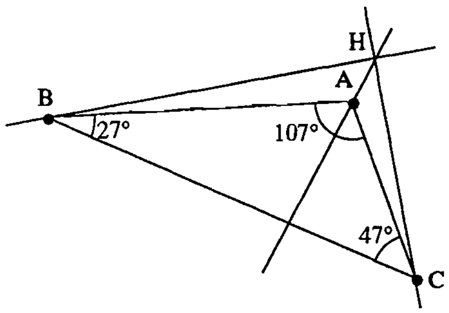
Ils n'ont aucune hésitation pour réaliser les constructions à la main, même pour ceux qui sont le plus en difficulté.

e. Variation de la position de l'orthocentre

Le cas où l'orthocentre se trouve à l'extérieur du triangle est toujours une difficulté pour de nombreux élèves. Géomètre permet en faisant varier la position de l'un des sommets du triangle de faire varier celle de l'orthocentre dans le triangle.







En utilisant une dynamique de la figure, l'observation faite par la classe ressemble à l'utilisation d'un dessin animé : après quelques variations successives de l'orthocentre, les élèves se font leur opinion et après discussion entre eux par petits groupes, proposent les règles suivantes :

«si l'angle est aigu, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ; quand l'angle devient obtus, l'orthocentre passe à l'extérieur».

L'un d'entre eux souhaite préciser la position pour laquelle l'orthocentre sort du triangle. Il vient donc manipuler la souris. Par essais successifs, il obtient un triangle rectangle. Ce triangle apparaît donc aux élèves comme un triangle particulier non plus à cause de son angle droit, mais parce que un de ses sommets est l'orthocentre du triangle (ceci est écrit dans le cahier et sera utilisé lors des calculs d'aires des triangles).

f. Les angles obtus d'un triangle

Lorsqu'on veut institutionnaliser les résultats obtenus, les élèves proposent d'écrire :

«si les angles d'un triangle sont aigus, alors l'orthocentre et à l'intérieur du triangle ; si les angles d'un triangle sont obtus, alors l'orthocentre est à l'extérieur du triangle».

L'utilisation de la formulation «si... alors...» avait déjà été rencontrée au début de l'année et est réinvestie convenablement. Par contre, l'énoncé de la deuxième partie, symétrique du premier, montre comment l'énoncé des propriétés se fait par mimétisme indépendamment de leur sens. La logique de construction des élèves est du type «modification à moindre frais».

On va donc expérimenter grâce à Géomètre la phrase *«Si les angles d'un triangle sont obtus»*. Oralement le professeur fait préciser le sens donné à *«les angles du triangle»*. Les élèves se mettent d'accord sur le fait que cela signifie que les trois angles sont obtus. Un élève vient donc manipuler : il part d'un triangle ABC ayant l'angle A obtus (B et C sont donc aigus). Il déplace le point pour obtenir l'angle B obtus.(B et C sont donc égaux). Il déplace le point pour obtenir l'angle B obtus. La classe observe et l'encourage. La déception est grande lorsque B étant obtus, les élèves s'apercoivent que A est devenu aigu mais cela ne convainc pas encore qu'un triangle ne peut avoir plusieurs angles obtus.

Un autre élève propose de choisir l'angle C et de recommencer. Nouvelle déception. Les élèves voient bien qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus mais n'en sont pas convaincus.

La nécessité d'une preuve mathématique non liée à l'observation fait son chemin : c'est un réel pas en avant pour tous les élèves de cette classe. Il faut l'aide de propriétés «sélectionnées» ci-dessous pour que la preuve soit exprimée clairement : - définition d'un angle obtus ;
- somme des angles d'un triangle.

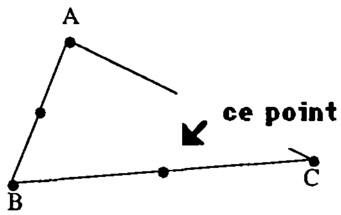
Tous vont se mettre d'accord pour dire ou écrire : «si deux angles sont plus grands que 90°, leur somme fait plus que 180° donc il n'y a plus de place pour le troisième». Finalement, on écrit dans le cahier : «un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus», puis les règles concernant la position de l'orthocentre. Les élèves insistent bien sur l'écriture correcte *«si un triangle a UN angle obtus, alors son orthocentre est à l'extérieur du triangle»*.

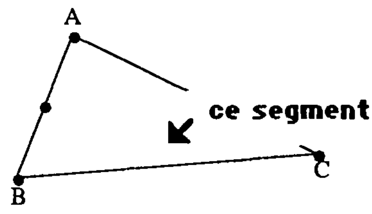
3. Déroulement

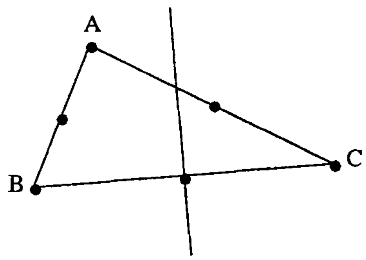
Un travail de même type est mené à propos des médiatrices.

a. Construction des médiatrices (sans la procédure médiatrice)

Le triangle ABC est construit comme dans la première étape. Géomètre demande pas à pas, comme pour les hauteurs, les éléments nécessaires à la construction de la médiatrice, c'est : la droite







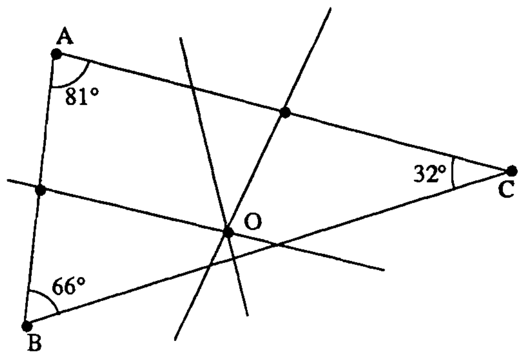
- perpendiculaire ;
- passant par le milieu du segment ;
- perpendiculaire au segment.

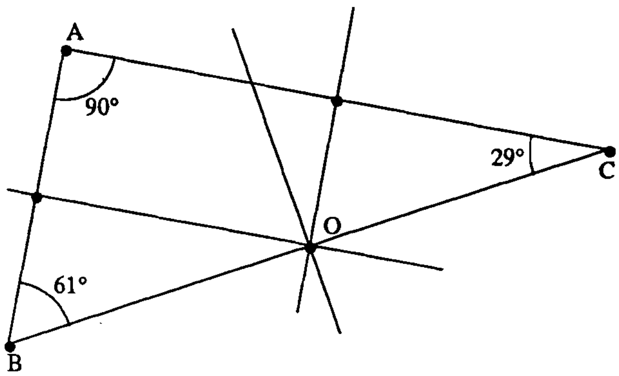
Certains élèves sont étonnés : les médiatrices ne passent par les sommets. Ils vont donc venir modifier le triangle pour faire passer une médiatrice par un sommet. La condition : *«ce n'est possible que si le triangle est isocèle»* est énoncée. Est-ce suffisant pour retirer de leur esprit la confusion médiane-médiatrice ?

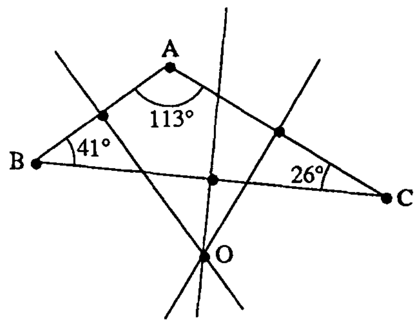
On en profite pour rappeler oralement la propriété de l'équidistance des points de la médiatrice.

b. Variation de la position du point de concours

Cette manipulation est demandée par les élèves par imitation de celle de l'orthocentre.





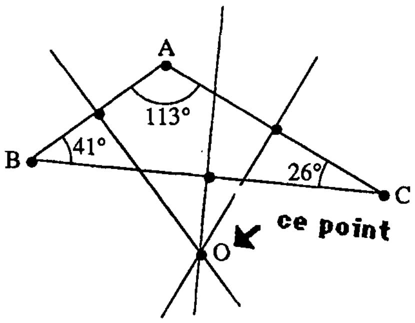


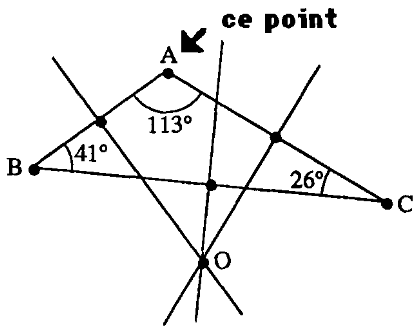
Les variations «angle aigu - angle obtus» sont réinvesties avec succès, mais cette fois le triangle rectangle «apparaît» lorsque le point de concours est sur l'hypoténuse (ce mot de vocabulaire est rappelé à cette occasion). Préciser qu'il s'agit du milieu de l'hypoténuse ne posera pas de difficulté : le lien entre milieu et médiatrice est très fort dans la tête des élèves (plus que celui de perpendiculaire-médiatrice d'où les confusions médiane -médiatrice probablement).

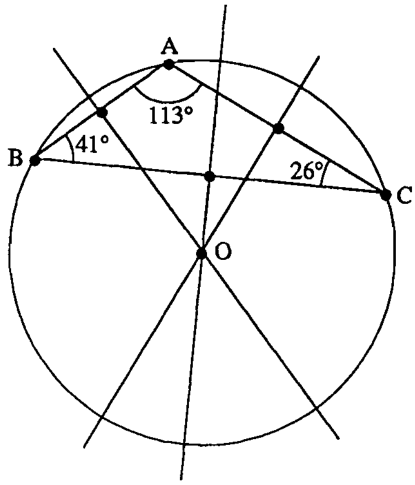
c. Le centre du cercle circonscrit

C'est le professeur qui propose de construire le cercle circonscrit au triangle précédent ayant pour diamètre l'hypoténuse. On utilise la procédure «cercle défini par deux points». Les élèves constatent que le cercle passe par le troisième sommet du triangle. On écrit dans le cahier cette propriété du triangle rectangle.

La variation de la forme du triangle permet de montrer qu'un triangle quelconque est inscrit dans un cercle. Le centre est précisé au tableau, des mesures permettent de le confirmer.







Ce résultat écrit dans le cahier sera ensuite démontré (sans vouloir atteindre un niveau de formalisation type 4ème), les élèves cherchent surtout à se convaincre d'un résultat en utilisant des règles mathématiques admises par tous.

IV. Conclusion

L'utilisation de la dynamique de l'image grâce au logiciel a permis une confrontation entre les conjectures des élèves et la «réalité» :

- non-existence de plusieurs angles obtus dans un triangle.
- levée de la confusion entre médiane et médiatrice.

Le débat instauré alors dans la classe a montré comment l'essai de construction de figures répondant aux hypothèses émises permet de se faire une opinion. Faire de nombreux dessins pour résoudre un problème, ne pas émettre une hypothèse seulement à la vision d'une figure, est une méthodologie que les élèves ont réinvestie dans d'autres recherches.

Par ailleurs, la construction des divers objets nécessite la connaissance de définitions (ou de propriétés) précises et rigoureuses. D'autant plus que l'ordinateur ne se contente pas d'un énoncé plus ou moins incantatoire : il exige que l'on décortique chacun des éléments de l'énoncé (exemple : médiatrice, droite passant par un milieu perpendiculaire à un segment donné).

Le logiciel permet de dégager l'élève des difficultés de constructions plus ou moins maladroites. Ce dernier type d'activité n'est certes pas à rejeter, mais ici, c'est l'activité raisonnement qui est objet de l'apprentissage.

Enfin, et c'est le plus intéressant, ces séquences permettent «plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par les exigences de la situation dans laquelle se trouve l'élève». (Balacheff 1982)[3]. En effet, quand, ayant fini de construire l'orthocentre, les élèves observent son déplacement, ils ne vont pas se contenter de constatations, ils vont essayer d'organiser leurs résultats : c'est cela qui les conduit à préciser le rôle particulier de l'angle droit.

Lorsque les élèves veulent construire un triangle ayant plusieurs angles obtus, ce problème n'apparaît que comme réponse au triangle ayant trois angles aigus. La mobilité des points et la lecture immédiate des angles va leur permettre de chercher à valider leur hypothèse par la construction d'une «figure-exemple» qui puisse être exhibée comme une preuve. L'impossibilité d'obtenir deux angles obtus se constitue en obstacle tellement gênant que c'est à partir de là que la nécessité d'un **raisonnement déductif** s'impose. La figure, parce qu'elle ne se plie pas aux hypothèses, devient tout à coup inutile, négligeable. Les élèves souhaitent travailler à un autre niveau de validation.

Il faut rechercher la multiplication de telles structures conjecturelles pour donner une autre représentation de problèmes de raisonnement à nos élèves.

Enfin, le travail sur les médiatrices montrent comment dépasser le cadre de l'expérimentation pour arriver à celui de la démonstration.

---

[3] N. BALACHEFF, 1982, Preuves et démonstration au collège, *RDM Vol. 3.3, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.*