JEUX ET MUSEE

(Raymond GUINET)

Dans le numéro 26 , nous vous avions proposé un jeu : deux problèmes anciens à résoudre.*

En revoici le texte.

> Un homme venant à mourir partage son bien consistant en certaine somme d'écus à ses enfants, en telle sorte qu'il ordonne que le premier prenne 1 écu et la septième partie du restant ; en après que le second prenne 2 écus et la septième partie du reste ; et cela fait que le troisième prenne 3 écus et la septième partie du reste, et ainsi consécutivement des autres. Or le partage fait en cette façon, il se treuve que chacun des enfants est également proportionné. On demande la somme des écus et le nombre d'enfants.

> Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus. Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun, en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun ; finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun : cela fait, chacun se treuve 8 écus. On demande combien chacun en avait du commencement.

* *Mars 1982 – page 79.*

La gagnante est :

Mme Simone SIBILLE
32, rue A. Gueymard
38400 – Saint-Martin d'Hères

qui s'est approchée le plus près de la solution souhaitée.

Qu'elle nous écrive le nom et l'adresse de la personne qui recevra ainsi l'abonnement gratuit qu'elle a gagné pour elle.

Vous trouverez ci-après les solutions aux deux jeux proposés.

PREMIER JEU.

Remarquons tout d'abord que si le premier reçoit 1 écu et le 1/7 du restant, que le deuxième reçoit 2 écus et le 1/7 du restant, etc., alors le dernier recevra un nombre d'écus égal à son rang puisque le reste est nul.

On désigne par p_1 la part du premier, p_2 la part du deuxième, p_3 la part du troisième, etc., par S la somme à partager.

La part du premier est donc :

$$p_1 = 1 + \frac{S-1}{7}$$

La part du deuxième est :

$$p_2 = 2 + \frac{S-p_1-2}{7}$$

La part du troisième est :

$$p_3 = 3 + \frac{S-p_1-p_2-3}{3}$$

etc.

Or, ces parts sont toutes égales, c'est à dire que l'on peut écrire que $p_1 = p_2$ soit :

$$1 + \frac{S-1}{7} = 2 + \frac{S-p_1-2}{7}$$

En remplaçant p_1 par $1 + \frac{S-1}{7}$, on obtient une égalité dans laquelle la seule inconnue est S, c'est-à-dire :

$$1 + \frac{S-1}{7} = 2 + \frac{S - \left(1 + \frac{S-1}{7}\right) - 2}{7}$$

en réduisant, on trouve que $S = 36$

La part du premier (qui est aussi celle de chacun) est donc :

$$1 + \frac{36-1}{7} = 6$$

Et comme le dernier reçoit un nombre d'écus égal à son rang, il y a 6 enfants.

Généralisation :

n désigne le nombre d'enfants.

D'après la remarque initiale le dernier reçoit n écus comme chacun des enfants.

La somme à partager est donc $S = n \times n = n^2$

C'est toujours un carré.

On désigne par p le nombre de parts dont le restant est partagé.

– le premier reçoit :

$$p_1 = 1 + \frac{S-1}{p}$$

$$p_1 = 1 + \frac{n^2-1}{p}$$

– le deuxième reçoit :

$$p_2 = 2 + \frac{S - p_1 - 2}{p}$$

– et puisque $p_1 = n$ et $S = n^2$

$$p_2 = 2 + \frac{n^2 - n - 2}{p} \qquad \text{etc.}$$

Puisque $p_1 = n$ comme chacune des parts d'ailleurs, on peut écrire :

$$n = 1 + \frac{n^2 - 1}{p}$$

$$n - 1 = \frac{(n + 1)(n - 1)}{p}$$

donc $p = n + 1$

Dans notre exemple : $n = 6$, $S = 6^2$ et $p = n + 1 = 7$

Si le nombre d'enfants était 8, on aurait : $S = 64$ et $p = 9$.

DEUXIEME JEU.

On désigne par a, b et c les sommes possédées par le 1er, le 2ème et le 3ème respectivement.

La somme totale est 24.

On peut écrire : $a + b + c = 24$

Au premier échange,

le 1er possède $a - b - c$

le 2ème possède $b + b = 2b$

et le 3ème possède $c + c = 2c$

Au deuxième échange,

le 1er possède $2(a - b - c)$

le 2ème possède $2b - (a - b - c) - 2c = 3b - a - c$

le 3ème possède $4c$

Au troisième et dernier échange

le 1er possède $4(a - b - c)$

le 2ème possède $2(3b - a - c)$

le 3ème possède $4c - 2(a - b - c) - (b - a - c) = 7c - a + b$

Chacune de ces sommes représente 8 écus.

On peut donc écrire :

$$4\,(a - b - c) = 8$$

$$2\,(3b - a - c) = 8$$

$$7c - a - b = 8$$

Par élimination on trouve que :

le 1er possédait 13 écus

le 2ème possédait 7 écus

et le 3ème possédait 4 écus.

Généralisation. *(donnée en prime)*

n est le nombre de personnes

a_1 est la somme appartenant à la 1ère personne

a_2 est la somme appartenant à la 2ème personne

etc. a_n celle appartenant à la nième personne

$a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n$ = Somme totale

Il est possible de montrer par récurrence qu'au nième partage,

la première possède $2^n a_1 - 2^{n-1}\,(a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n)$

la deuxième possède $2^n a_2 - 2^{n-2}\,(a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n)$

etc la n ième possède

$$2^n a_n - (a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n)$$

Si l'on désire que la somme possédée par chaque personne soit un nombre entier, il suffit de prendre $n \times 2^n$ pour somme totale.

Auquel cas on trouve que :

$$a_1 = 1 + n.2^{n-1}$$

$$a_2 = 1 + n.2^{n-2}$$

$$a_3 = 1 + n.2^{n-3}$$

etc.

$$a_n = 1 + n$$

Dans notre exemple $n = 3$

la somme totale est $n \times 2^n$ c'est-à-dire $3 \times 2^3 = 24$

a_1 possède $1 + 3 \times 2^2 = 13$ écus

a_2 possède $1 + 3 \times 2^1 = 7$ écus

a_3 possède $1 + 3 = 4$ écus.