REGARDS SUR LE PROBLEME

(Jean-Marie DIDRY – professeur à l'Ecole Normale de Nancy)

Les programmes de mathématiques de 1980 pour le cycle moyen accordent une large place à la notion de problème. Afin de mieux la situer, il est intéressant de regarder ce qui était écrit à ce sujet dans les instructions antérieures ou dans la littérature pédagogique de l'époque. Les premiers textes remontent à 1887 ; les instructions ultérieures (1923, 1938, 1945) n'ont fait en général que reprendre celles de 1887 pour en affirmer la pérennité. Les programmes de 1970 marquent une transition.

1 – CE QUE RECOUVRE LE MOT "PROBLEME".

Pour Laisant "les problèmes, très différents des exercices *, sont des questions d'un ordre quelconque, exigeant l'intervention du calcul. On donne un énoncé qui contient un certain nombre de renseignements ; en se servant de ces renseignements, il faut obtenir une ou plusieurs quantités, répondre à des interrogations contenues dans l'énoncé, et qui en général le terminent." (LAI 1920).

Les I.O. de 1970 ouvrent de nouveaux horizons :

– tout d'abord, pour la première fois, on mentionne l'existence de problèmes non numériques : " . . . cette activité privilégiée, qui est la résolution des problèmes, qu'ils soient numériques ou non numériques". Assez curieusement, on n'y donne pas un seul exemple de problème non numérique . . .

– d'autre part, la définition, en prenant la forme suivante : "il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement", contient en germe la notion de situation-problème.

---

* *LAISANT appelle exercice une simple opération de calcul ayant pour but d'habituer progressivement l'enfant à calculer avec sureté, le plus rapidement possible.*

On notera que ces définitions commandent le support des problèmes. Pour Laisant le support en est un énoncé contenant, et de préférence dans cet ordre, les renseignements et la ou les questions alors que les Aides pédagogiques pour le C.E. (COPI 1979) soulignent que "les informations peuvent être transmises sous la forme classique d'énoncés rédigés, ou sous la forme de documents bruts (livret de Caisse d'Epargne par exemple)", ce que réaffirment d'ailleurs les I.O. 1980. Dans ces conditions bien souvent : " . . . l'explicitation et la formulation des questions font elles même partie du problème." (COPI 1979).

De fait, le genre (nature des informations, qualité, habillage) d'un problème est directement lié au rôle qu'on lui assigne et le problème est alors défini par ses objectifs.

Il en va ainsi du programme de 1887 :

– Problèmes usuels – Exercices d'application – Solutions raisonnées.

(BOU 1890) nous permet de situer ces trois composantes (étude quasi exhaustive des exigences de la vie courante touchant au calcul, réinvestissement des connaissances, éducation au raisonnement) dans le contexte social de l'époque :

> L'arithmétique, devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre être du domaine de l'enseignement primaire. C'est là, il nous semble, une grave illusion. Il ne faut pas perdre de vue que l'enseignement donné dans nos écoles primaires s'adresse aux masses profondes des populations scolaires rurales, vouées de très bonne heure au travail des champs, et aux enfants des classes ouvrières des villes, que réclament aussi dès l'âge le plus tendre l'atelier, l'usine ou le comptoir. La loi dispense de toute fréquentation scolaire l'enfant âgé de treize ans; elle l'autorise même à quitter l'école à onze ans s'il a obtenu le certificat d'études primaires, et personne n'ignore combien peu d'élèves renoncent à ces bénéfices de la loi. La création récente des cours complémentaires et des écoles primaires supérieures retient bien déjà et retiendra bien plus encore à l'avenir les esprits les mieux doués dans les établissements scolaires; mais les conditions mêmes de l'existence ramèneront toujours vers l'âge de douze ou treize ans l'immense majorité de nos écoliers au travail physique rémunérateur. Il faut donc tirer le meilleur parti possible de ces quelques années de l'enfance dont nous disposons, et nos programmes doivent avoir en vue l'acquisition la plus prompte et la plus solide des éléments indispensables de chaque science.
>
> L'arithmétique ne peut pas faire exception. Avant tout, l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes à l'école primaire; et la marge est grande encore sans qu'on ait besoin de se jeter sur les curiosités de la science, sur les propriétés abstraites des nombres, sur les problèmes fantaisistes et compliqués à plaisir.

Ainsi donc, il y a des urgences. Si l'objectif fondamental de l'enseignement des mathématiques est l'éducation de l'esprit, on prétend qu'il est possible de l'atteindre par l'étude de situations de la vie courante et on commande de rester dans ce cadre.

A la vérité on relève très vite des débordements dûs pour une bonne part aux exigences du Certificat de fin d'études primaires.

Ainsi en témoigne (RAP - I.G. 1928) :

> Les problèmes du certificat d'études s'étaient peu à peu (surtout de 1880 à 1910) élevés à un niveau qui dépasse de beaucoup la faculté de raisonnement de la moyenne des candidats. Comment obtenir de nos élèves des solutions dont ils sont, en général, incapables de découvrir par eux-mêmes le développement?
>
> et encore :
>
> Les préoccupations ne vont pas assez aux questions que l'élève aura plus tard à résoudre dans la vie courante, — ces questions paraissant trop simples ; — elles vont trop aux sujets, souvent artificiels, dont nos errements au certificat d'études ont amplifié l'importance. Il faut accentuer le mouvement récent qui s'est produit en faveur d'exercices plus variés, plus pratiques, plus naturels.

Les I.O. de 1945 tentent d'affiner cette idée :

> *Les mots de* « vie courante », *employés dans le programme, marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui. Avant de faire traiter un exercice dans la classe, ou de le donner en devoir écrit, le maître se demandera si cet exercice peut se présenter raisonnablement dans la pratique. Pour connaître le diamètre d'une tête de clou, il est plus immédiat, plus commode et plus exact de mesurer directement ce diamètre avec un pied à coulisse. Par contre, il vaut mieux chercher d'abord la circonférence d'un gros arbre, puis calculer son diamètre. Dans le partage d'une succession, le premier nombre connu, sauf circonstances exceptionnelles, est le montant de l'héritage; on passe de ce montant aux parts et non de ces parts au montant. Par contre, un poids de confiture peut se calculer à l'avance, d'après le poids de jus de fruit, le poids de sucre, et la réduction approximative de poids à la cuisson.*

. . . ce qui n'empêche pas les manuels de proposer nombre de problèmes purement spéculatifs, fut-ce sous un habillage de la vie courante.

A titre d'exemple voici les énoncés de problèmes proposés en décembre 1959 à des élèves de C.M.2 (faisant partie de tests destinés à figurer dans le dossier d'entrée en 6ème.)

D. Posez et effectuez l'opération qui vous permettra de répondre par une phrase complète à la question posée dans chacun des 5 problèmes suivants :

16. Jacques qui possède 3.230 F a 525 F de plus que René. Combien René possède-t-il ?

Phrase réponse complète :

René possède de l'argent:
3 230F + 525F = 3755F

Opération

3230F
+ 525F
3755F

3 pts | 0

17. On a acheté 37,5 kg d'oranges à 120 F le kg. Quelle somme doit-on ?

Phrase réponse complète :

Somme du :
120F X 37,5 = 4500F

Opération

120F
X 37,5
600
840
~~360~~
4500 F

3 pts | 3

18. Après avoir payé les 3/5 du prix d'un poste de radio, on doit encore 6.500 F. Quel était le prix de ce poste ?

Phrase réponse complète :

Le prix de ce poste est:
$\frac{6500F \times 3}{5}$ = 39 000F

Opération

6500 | 5
15 | 1300
00 | X 3
 | 3900F

3 pts | 0

19. Une facture de librairie porte: manuels de géographie, prix de l'unité : 860 F ; prix total : 31.820 F. Combien a-t-on acheté de ces manuels ?

Phrase réponse complète :

On a acheté
31820F - 860F = 30 960F

Opération

31820F
- 860F
30960F

3 pts | 0

20. Un jardin rectangulaire a une surface de 336 m². Quelle est sa largeur si la longueur est de 28 m. ?

Phrase réponse complète :

Largeur du jardin rectangulaire
336m² ~~x~~ 28m = ~~9408~~m 12m

Opération

336 m²
x 28
2688
672
9408

336 | 28
056 | 12
04

3 pts | 0

Total D | 3

On remarquera que sur les cinq énoncés seul le deuxième n'est pas spéculatif (et c'est d'ailleurs le seul réussi par l'élève dont nous reproduisons la copie). Ce n'est pas un hasard. Un instant de réflexion montre que, contrairement à ce qu'affirmait (BOU 1890), la marge des raisonnements offerte par les problèmes de la vie courante "vraisemblables", et relevant du programme de l'école élémentaire, n'est pas si grande que cela : elle ne recouvre pas l'ensemble des questions gravitant autour d'une même structure mathématique. Par exemple, l'énoncé : "Paul a joué deux parties de billes, à la première il a gagné 3 billes, en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la deuxième partie ?", bien que formulé globalement dans un contexte de préoccupation enfantine, n'est pas un problème qui se posera réellement à l'enfant dans sa vie extra-scolaire.

Les I.O. de 1970 passent à côté de cette réflexion et on n'a pas de mal à reconnaître l'influence des grands courants pédagogiques du moment dans cette recommandation :
" . . . les situations retenues dans ce domaine (initiation des élèves à la vie courante de leur époque) correspondront aux préoccupations et aux intérêts réels des enfants". Ces I.O. assignent alors deux fonctions aux situations de la vie courante : "elles seront, suivant les cas, soit des motivations pour l'introduction de notions nouvelles, soit des applications de relations préalablement étudiées par l'élève".

Les textes officiels de 1980, en adaptant au niveau du C.M. ceux de 1978 sur le C.E., placent résolument le débat sur le plan plus général de la construction du savoir mathématique :

> D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur les expériences dont disposent les élèves.
>
> Les problèmes peuvent être envisagés selon trois points de vue :
> Situations-problèmes utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques ;
> Situations-problèmes permettant aux enfants de réinvestir des acquis antérieurs, d'en percevoir les limites d'utilisation (situation contre-exemple) et au maître d'en contrôler le degré de maîtrise ;
> Situations-problèmes plus complexes, plus globales dans lesquelles l'enfant devrait pouvoir mettre en œuvre son pouvoir créatif et affiner la rigueur et la sûreté de son raisonnement.

2 – RESOUDRE UN PROBLEME.

2.1 Sens des opérations et algorithmes opératoires :

Force est de constater que si les indications fournies concernant la construction des algorithmes sont abondantes dans les textes actuels, c'est au détriment d'une réflexion sur l'acquisition du sens des opérations concernées (c'est-à-dire l'aptitude à reconnaître l'occasion de s'en servir) (VER 1976 et 1978).

Alors que les travaux de Vergnault ont permis de pointer avec quelque précision les difficultés liées à l'acquisition des structures additives et multiplicatives (l'erreur enregistrée au premier problème de la copie ci-dessus, les hésitations –durement sanctionnées ! – au quatrième en sont des illustrations), on ne lit rien sur ce sujet dans les I.O. 1980 où l'on s'étend par contre volontiers sur les algorithmes.

Tout se passe comme si l'on postulait que la construction d'un algorithme opératoire dans un contexte donné assurait la disponibilité de l'opération dans un contexte quelconque. C'est transformer un peu rapidement en équivalence logique le "il faut" de cette conclusion (déjà bien catégorique) de Guy Brousseau sur algorithme et raisonnement : "Si les conditions l'exigent, l'élève peut lui-même résumer en automatismes des activités complexes, en retirant du sens ou des possibilités de choix à son activité. Mais pour que ces automatismes puissent être utilisés, il faut qu'ils soient mis en place par le sujet lui-même." (BROU 1976).

Par ailleurs, il est clair que le choix des situations conduisant à la mise en place d'un algorithme opératoire va dépendre de l'exigence que l'on a quant au degré de perfectionnement de cet algorithme.

Par exemple (COPI 1979) décrire sur vingt pages un ensemble de situations conduisant à une technique écrite de la multiplication, rapide et fiable, exigence requise par le programme du C.E. Il faut néanmoins que le contrat didactique passé implicitement entre le maître et les élèves soit bien solide pour que ceux-ci acceptent de s'investir pendant deux mois dans des dénombrements de quadrillage, alors qu'il existe à portée de main un algorithme autrement plus performant : taper ON, 378 , X , 47 , = sur une calculatrice pour y lire le résultat. Et qui oserait prétendre à l'heure actuelle que d'ici dix ans la calculette ne sera pas complètement banalisée, de la même façon que l'a été le stylo à bille il y a vingt ans ?

Qui affirmerait encore aujourd'hui nécessaire de mettre en place dans le premier cycle un algorithme performant de l'extraction de la racine carrée sous prétexte qu'on a besoin de connaître certaines racines dans quelques problèmes ?

Le sens d'une opération, comme la division par exemple, commande à lui seul un algorithme opératoire qui est certes long (soustractions successives ou multiples du diviseur) mais immédiatement significatif . (et pour cause). Se priver d'une réflexion sur cet algorithme, sur ses possibilités d'amélioration compte tenu de notre numération décimale, est certes dommageable (c'est ainsi que, mutatis mutandis, on voit des élèves de seconde complètement démunis quand on leur demande comment on pourrait bien calculer à la main $\sqrt{1981}$). Mais consacrer un temps forcément long à la construction d'un algorithme performant de la division euclidienne l'est-il moins quand on songe que c'est alors souvent au détriment d'exercices variés qui, soigneusement choisis en fonction des apports nouveaux de sens qu'ils comportent, sont mieux à même de mobiliser l'enfant dans une attitude de recherche parce qu'ils apparaissent dans un contrat didactique transparent, et pour le maître, et pour l'élève ?

Ces préoccupations ne sont pas nouvelles : Jules Tannery les développait déjà dans un article sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école, datant de 1904, et dont nous reproduisons des extraits ci-après. Mais l'arrivée prévisible des calculettes sur le marché scolaire leur donne un tour plus aigu.

Ce que les enfants ont besoin de *comprendre*, c'est le sens de l'opération, c'est ce qu'elle permet d'obtenir. Je m'imagine qu'on leur apprend cela à l'école, et, peut-être, mieux qu'on ne fait au lycée. Je ne crois pas trop m'avancer en disant qu'il y a plus d'un bachelier ès sciences, qui a étudié l'algèbre et la trigonométrie, pour qui la division est une opération dans laquelle on met le dividende à gauche, le diviseur à droite, à l'intérieur d'un angle droit, dans laquelle on sépare,... etc. : c'est la description de l'opération, non sa définition, non ses propriétés, qui subsiste dans son esprit. Voilà ce qu'il faut éviter, à l'école comme au lycée.

Comment arrive-t-on à faire comprendre aux écoliers le sens de chacune des quatre règles? Je crois bien que, là-dessus, la plupart des instituteurs m'en remontreraient. C'est au fond la *définition* de l'opération qu'il s'agit d'éclairer : ils ne commencent pas par dicter à leurs élèves une belle phrase abstraite, qui ferait ouvrir de grands yeux à tous ceux qui ne sont pas résignés à apprendre sans comprendre; non, ils commencent par des exemples concrets, avec des nombres très simples : j'ai sept billes dans ma poche gauche, et cinq dans ma poche droite; je prends ces cinq billes et je les mets dans ma poche gauche; combien y a-t-il de billes dans cette poche gauche? Des douze billes qui sont maintenant dans ma poche gauche, j'en prends cinq que je mets dans ma poche droite; combien en reste-t-il dans ma poche gauche? Et si je remets ces cinq billes dans cette poche gauche, combien contiendra-t-elle de billes? Voici quatre petits tas dont chacun comprend cinq billes; je mets toutes les billes en tas, combien y en aura-t-il dans ce tas? J'ai dix-neuf billes que je veux partager entre cinq enfants; chacun reçoit trois billes et il m'en reste quatre. Chaque opération reçoit son nom. Les exemples sont repris, multipliés, diversifiés. Les nombres sont assez simples pour que les calculs puissent se faire de tête, ou même sur des objets réels; on demande aux enfants, pour une foule de petits problèmes, non seulement d'arriver au résultat, mais de reconnaître chacune des opérations qu'ils ont faites, de la nommer : on passe à des cas un peu plus compliqués, où il faut faire deux, trois, de ces opérations; là encore, il ne suffit pas que les enfants trouvent le résultat exact, ils doivent analyser le calcul qu'ils ont fait : d'abord une addition, puis une soustraction, etc. Sans doute tous ceux sous les yeux desquels cette page est tombée se disent « oui, c'est ainsi que l'on fait, à peu près, avec ces exemples, ou avec d'autres... » Et comment ferait-on autrement? Il suffit d'y penser, et d'avoir eu des enfants à qui l'on a appris à compter.

Eh bien! tout cela n'est nullement mécanique. Reconnaître les cas où il faut faire cette opération, et non cette autre, sentir ce qu'il y a de commun dans les cas où on fait la même opération, c'est faire acte d'intelligence, de la même intelligence qui nous sert à grouper des individus, ou des mots, ou des faits, dans une même famille, sous une même loi. Et l'enfant est capable de ces actes intellectuels, parce qu'ils se rapportent à des objets qu'il peut voir, toucher ou imaginer, et que l'effort d'attention qu'ils exigent est court. . . . . . . Devant des questions toutes pareilles à ces questions qu'il sait résoudre, mais où les données sont un peu plus compliquées, les nombres un peu plus grands, l'enfant sent qu'il lui manque quelque chose : cela est trop long pour qu'il s'en tire; il n'en finirait pas de compter sur ses doigts, ou avec des boules. Comment faire? Il est tout découragé. Le maître lui dira : « Je vais vous apprendre un moyen d'aller plus vite »; il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rendra pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplaît en aucune façon. Sans doute, il est bon que l'ouvrier connaisse son outil; exigera-t-on, pour cette raison, qu'il ne se serve que d'outils qu'il est capable de fabriquer lui-même, ou seulement même qu'il peut démonter et remonter? Il doit savoir ce qu'il peut faire de son outil, les cas où il doit le prendre, ceux où il lui en faut un autre; il doit être très habitué à s'en servir. De même en arithmétique deux points importent : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, bien comprendre les définitions; puis, savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude. Il ne faut pas mépriser cette routine-là; le résultat est un profit très clair qu'on emporte de l'école; que de fatigues, d'agacements, que de temps elle épargnera à l'homme fait, à l'ouvrier, au contremaître, à l'ingénieur ou au savant!

Et dans la partie même de l'enseignement du calcul qui s'adresse vraiment à l'intelligence, il faut faire sa part à l'habitude. N'est-ce point en vertu de l'habitude que nous reconnaissons si vite les choses qui nous sont familières, que nous les comprenons de suite, que nous n'hésitons pas sur le parti que nous pouvons en tirer? N'est-on pas allé jusqu'à soutenir que l'évidence même n'était qu'une longue habitude, qui s'accumule dans la race, et dont les individus profitent?

Cette explication raisonnée des opérations fondamentales, à laquelle on attache tant de prix, j'admettrais fort bien qu'on la laissât de côté, même pour des enfants qui reçoivent quelque éducation théorique. Il est beaucoup plus important de savoir les propriétés des opérations que d'être en mesure de justifier la façon dont on les effectue, et quelques-unes de ces propriétés peuvent être enseignées et même démontrées à l'école : est-il difficile, par exemple, de faire comprendre à des écoliers, sur les exemples concrets, que pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les éléments de la somme et ajouter ensuite les produits partiels. Les propositions de ce genre, dont les unes peuvent être démontrées complètement, dont les autres seront simplement énoncées et vérifiées, sont beaucoup plus précieuses que ce qu'on appelle la « théorie de la multiplication, ou de la division »; les problèmes où l'on pourra les utiliser ne manquent pas ; elles contribuent à la vraie intelligence des définitions, dont elles sont des conséquences logiques. C'est elles d'ailleurs qui mènent plus loin, qui servent, par exemple, à l'intelligence de l'algèbre, dont on peut pousser l'étude aussi loin qu'on veut, sans avoir jamais besoin de la « théorie de la division ».

(TAN 1904)

2.2 Problèmes types :

Maintenant comme autrefois on reconnait la nécessité de méthodes pour la résolution des problèmes : "Il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes (même en multipliant des exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à les faire. Un apprentissage spécifique d'ordre méthodologique est nécessaire." (I.O. 1980).

L'idée première a été de dresser une liste exhaustive des types de problèmes susceptibles d'être posés, faisant intervenir une ou plusieurs opérations. Cette idée a fait recette sous la forme de problèmes types (la classification tenait d'ailleurs autant compte de l'habillage que de la structure), mais on en dénonça rapidement la vanité comme l'atteste l'extrait suivant de (RAP 1928) qui situe en outre le contexte de cette méthode : la préparation au Certificat d'études.

1\. *Les problèmes types.* — La « méthode » qui a eu longtemps le plus de succès est celle du problème type. Nous dirions volontiers de cette méthode ce qu'on a dit, dans beaucoup de rapports, des tâtonnements : elle est le contraire d'une méthode. C'est le triomphe de la transposition facile, c'est l'habitude remplaçant la réflexion. L'expérience n'a-t-elle pas montré que l'imagination des examinateurs est limitée à un champ qui comprend l'ensemble des énoncés proposés au brevet? De là à tenter de préparer tous les problèmes que l'on peut rencontrer à l'examen, il n'y avait qu'un pas. Il a été franchi. On a classé les difficultés ; chaque série de questions résolubles sur des grandeurs de même nature ou par la même suite d'opérations a donné lieu à un problème type. Une émulation qu'explique le succès des livres ayant exploité cette veine, a engendré une quantité de plus en plus grande des types à étudier. Certains manuels en donnent plus de 200. Chaque élève absorbe tous les jours quelques-unes des solutions (parmi ces solutions, quelques-unes sont fausses, comme celles relatives aux carrelages, ou aux robinets vidant un bassin, ou aux intérêts sur plusieurs années), puis est exercé à les reproduire sur des données numériques différentes de celles du modèle. Le jour de l'examen, il se garde bien de raisonner ; il cherche dans sa mémoire la recette apprise, qui s'adapte aux énoncés proposés comme une clef à sa serrure. Et s'il n'a pas été trop mal inspiré, un 10 sur 10 vient récompenser son talent d'imitation.

Nous ne saurions incriminer les instituteurs qui ont usé de ce procédé. Le mauvais choix de certains sujets du certificat les excuse. Et puis, nombre de ceux qui ont cédé aux nécessités de l'examen n'ignorent pas que le problème type est au problème ce que le papier calque est au dessin. Car la moitié environ des rapports sont accablants pour ce genre de « bourrage ».

Il faut croire que cette "méthode" a continué à garder la faveur des maîtres bien après 1928 : la solution proposée ci-dessous par un enfant de C.M.2 dans le test déjà cité en est assurément le fruit (l'élève a puisé dans la mauvaise case : largeur connaissant le périmètre et longueur, au lieu de largeur, connaissant la surface et la longueur !).

20. Un jardin rectangulaire a une surface de 336 m². Quelle est sa largeur si la longueur est de 28 m. ? *Phrase réponse complète :* *Opération* Largeur : 336 m². 2 = 168 m² − 28 m = 140 m	3 pts	0

Mais l'échec de cette méthode ne tient-il pas pour une grande part à la démarche pédagogique qui le soustendait ? :

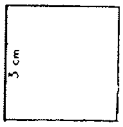
– exercice d'introduction mené collectivement sous l' "impulsion" du maître, ou plus souvent encore explication immédiate de la solution au problème posé.

– mise en évidence par le maître d'un algorithme standard de résolution.

– exercices d'application destinés à montrer une imprégnation de cet algorithme.

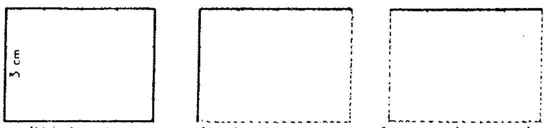
Voici d'ailleurs deux illustrations de cette pratique.

Carré, rectangle : calcul d'une dimension



Le périmètre de ce carré mesure 12 cm.
Chaque côté est le *quart* du périmètre.
Chaque côté mesure : 12 cm : 4 = 3 cm.

Périmètre du carré : 4 × côté du carré.



Périmètre du rectangle : 14 cm. — Demi-périmètre : 14 cm : 2 = 7 cm. — Longueur du rectangle : 7 cm − 3 cm = 4 cm.

Dans le rectangle, périmètre : 2 = demi-périmètre.
demi-périmètre − largeur = longueur.
et demi-périmètre − longueur = largeur.

● 1. Carré

Périmètre	48 cm	124 m	156 m	272 m	348 cm
Côté					

⋆ 2. Rectangle

Périmètre	100 m	146 cm	420 m	464 m	360 m
Demi-périmètre					
Longueur	37 m			158 m	126 m
Largeur		25 cm	86 m		

● **3.** Je dessine sur mon cahier un carré qui a un périmètre mesurant 32 cm. Je dois d'abord calculer la longueur du côté de ce carré.

⋆● **4.** Je trace sur mon cahier un rectangle dont le périmètre mesure 40 cm et la longueur 12 cm. Le demi-périmètre du rectangle mesure : . . .
La largeur du rectangle mesure : . . .

⋆● **5.** Le tour de mon ardoise mesure 82 cm. L'ardoise a une longueur de 23 cm. Le demi-périmètre de l'ardoise mesure : . . . Sa largeur mesure : . . .

⋆● **6.** Pour border un mouchoir carré, maman a acheté un mètre de dentelle. Le mouchoir bordé, il reste à maman un morceau de dentelle long de 8 cm. Quelle est la longueur de dentelle utilisée par maman ?
Quelle est la longueur du côté du mouchoir ?

⋆● **7.** Le jardinier a entouré une pelouse rectangulaire de 15 m de long et 9 m de large. Quelle est la longueur de bordure employée ?
La bordure aurait pu entourer une pelouse carrée.
Quelle est la longueur du côté de la pelouse carrée ?

Surface du rectangle - Calcul d'une dimension (2ᵉ année)

Comprenons

Exemple numérique : 6 × 5 = 30 → *1ᵉʳ facteur* multiplié par le *2ᵉ facteur* = *produit*
30 : 6 = 5 → *Produit* divisé par le *1ᵉʳ facteur* = *2ᵉ facteur*
30 : 5 = 6 → *Produit* divisé par le *2ᵉ facteur* = *1ᵉʳ facteur*

Donnez d'autres exemples.

Exemple géométrique :
Surface en m² : 6 × 5 = 30 → *Longueur* × *largeur* = *Surface*
Longueur en m : 30 : 5 = 6 → *Surface* : *largeur* = *Longueur*
Largeur en m : 30 : 6 = 5 → *Surface* : *longueur* = *Largeur*

Donner d'autres exemples.

RETENONS

Longueur du rectangle = Surface : largeur L = S : l
Largeur du rectangle = Surface : Longueur l = S : L

1. Calculez l'une des deux dimensions d'un rectangle connaissant sa surface et l'autre dimension.

*20 m² et 4 m	300 dm² et 60 dm	40 dm² et 80 cm	4 a et 5 m
48 m² et 6 m	84 cm² et 7 cm	36 m² et 400 cm	21 a et 30 m
*120 m² et 10 m	*720 m² et 24 m	*420 cm² et 3 dm	*54 a et 9 hm

2. Trouvez, d'après les dimensions, ce que pourrait représenter chacun des rectangles marqués par un *

3. Quelles pourraient être les dimensions d'un rectangle dont la surface mesure 20 m², 150 m², 32 m², 12 cm², 64 cm², 100 mm², 240 dm² ?

4. Complétez le tableau suivant.

Longueur	Largeur	Périmètre	Surface
23,25 m	15 m	?	?
23,25 m	?	?	465 m²
45,4 cm	?	1,5 m	?
?	17,5 m	?	210 m²

Longueur	Largeur	Périmètre	Surface
?	36,5 m	?	15,476 a
72,46 dam	?	?	4 614,258 m²
?	160 m	?	32 ha
25 km	?	?	8,5 hm²

Problèmes

5. Les 24 dm² confectionnés par les élèves d'une classe sont disposés par rangées de 6. Quelle surface représentent-ils ? Quelles en sont les dimensions ? Quels autres rectangles pourrait-on composer avec le même nombre de dm² ?

6. Il a fallu 700 carreaux de 0,15 m de côté pour daller un couloir de 1,50 m de large. Calculez la longueur du couloir. (2 *solutions possibles.*)

7. Un champ rectangulaire de 70 m de long a la même surface qu'un jardin carré de 35 m de côté. Quelle est sa largeur ?

8. Combien faut-il de mètres de doublure en 0,70 m de large pour doubler un tapis de 3,50 m sur 2,45 m ? (2 *solutions possibles.*)

9. D'un terrain rectangulaire de 280 m de long et 165 m de large on vend une parcelle de 0,35 ha délimitée par une droite parallèle à la longueur. Quelle est la largeur restante ? (*Croquis*)

10. Avec un pot de colle on peut encoller une surface de papier de 3 m². Quelle longueur de papier gommé obtiendra-t-on, si l'on enduit de colle une bande de papier de 1,5 cm de large ?
Même question si le papier a une largeur de 0,03 m ? Quelle largeur avait le papier employé, si on a obtenu une bande de 60 m de long ? (Problème

2.3 Rôle des explications :

Ce type de démarche (comprenons - retenons) postule qu'une explication suffit pour que soit approprié un raisonnement.

Nous savons en fait peu de choses concernant l'influence d'une explication sur le système des connaissances d'un individu. A quelle condition y a-t-il réorganisation de ce système et non simple juxtaposition d'une nouvelle connaissance appelée à disparaître dès qu'elle n'est plus sollicitée pendant un certain temps ?

Il semble qu'on puisse néanmoins avancer une condition nécessaire pour un grand nombre de sujets : il faut que le sujet ait fait sienne la question qui est l'objet de la nouvelle connaissance.

Ce qui a pour conséquence pédagogique que l'enfant ait le temps matériel de chercher le problème en question, d'en éprouver le sens, de confronter ses essais à ceux de ses camarades, d'élaborer des contre-exemples, etc. , et que cette activité même soit implicitement valorisée par le maître.

Assez curieusement cette démarche, dont tout un chacun a pu vérifier personnellement le caractère bénéfique, n'a pas eu volontiers la faveur des maîtres.

La méthode des tâtonnements. — La méthode des tâtonnements rencontre, de façon générale, plus de dédain que d'égard. C'est qu'on considère trop souvent une « méthode » comme un moyen mnémotechnique infaillible de conduire au but, quelle que soit la difficulté proposée. A ce titre, la « méthode » du problème type aurait seule une réelle valeur, à condition qu'on ait traité tous les types possibles, condition dont nous n'avons pas besoin de souligner l'absurdité.

(RAP 1928)

Il est humain, devant une question qui nous surprend et nous arrête, de chercher à tâtons; et, savoir tâtonner utilement est d'une très grande importance. Ceux qui en ont essayé judicieusement l'emploi affirment que les tâtonnements sont particulièrement fructueux et attachants pour les écoliers bien doués. Il n'est pas de moyen meilleur de développer l'intuition, et aussi de préparer l'étude de l'algèbre. Mais, en dépit de sa valeur, la méthode des tâtonnements est loin d'être entrée dans nos habitudes. Qu'il nous suffise de dire qu'elle donne de bons résultats dans les problèmes dits de « fausse supposition », dans tous les exercices où la réponse est un nombre entier dont on voit d'avance les limites, et dans de nombreuses questions de calcul proprement dit. Rien n'amuse une classe autant que de chercher la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre, en dehors de toute règle, par de simples essais.

2.4 Rôle des représentations :

Dans le même ordre d'idées, il serait important de savoir à quelles conditions une représentation devient disponible. Il est en effet quelques représentations standard (ligne pour pointer un ordre sur des nombres, segment pour représenter une grandeur, flèche pour symboliser une transformation, . . .) qui sont autant d'outils très efficaces . . . quand ils sont maîtrisés !

On peut penser qu'un apprentissage progressif, à long terme, donnera à l'enfant ce réflexe heuristique de chercher, face à une question, une transcription graphique susceptible de l'aider.

C'est ainsi que des enfants ayant depuis le C.P. travaillé sur la demi-droite numérique et habitués à s'en servir devraient mieux être à même de résoudre un problème du type suivant : "Pierre a 7 billes de plus que Jacques qui en a 3 de moins que Jean. Comparer le nombre de billes de Jean et de Pierre". (voir (VER 1976).)

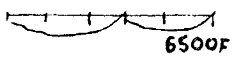
Visiblement, pour l'élève ci-dessous, la disponibilité d'une représentation a été déterminante :

18. **Après avoir payé les 3/5 du prix d'un poste de radio, on doit encore 6.500 F. Quel était le prix de ce poste ?**

Phrase réponse complète : | *Opération*

Prix du poste

3250F X 5 = 16250F



3 pts | 3

Si (RAP 1928) formule une conclusion plutôt prudente au sujet des représentations :

> **Beaucoup d'élèves en tirent le meilleur parti, et certains maîtres en préconisent l'utilisation systématique. Il semble, cependant, que l'abus en doive être évité. Tous les esprits ne trouvent pas dans ces représentations géométriques les mêmes clartés et les mêmes avantages.**

les I.O. de 1970 prennent une position très nette :

> **Les élèves doivent apprendre à passer d'une situation à un schéma mathématique qui la décrit ; inversement, un bon exercice consiste à imaginer des situations décrites par un schéma donné.**

Les I.O. de 1980 n'y font pas mention explicitement, mais on peut penser qu'elles incorporent cet objectif dans cet autre plus vaste, apprendre à rechercher, sélectionner et organiser l'information .

On trouvera dans le chapitre "Situations complexes" des exemples d'activités prenant en compte ces objectifs.

Les enfants éprouvent souvent des difficultés pour analyser une situation où des informations sont données et une question posée (les informations fournies sont-elles toutes nécessaires ? Sont-elles suffisantes ? Comment les coordonner et les réorganiser ? etc.). Aussi, les maîtres proposeront-ils aux enfants des situations impliquant de leur part la collecte, la constitution et l'organisation des données grâce auxquelles ils pourront répondre à la question. Ce peut être :

Une question posée à partir d'une situation effectivement rencontrée ou en projet (par exemple : *l'organisation d'une sortie ; la construction d'une maquette ; etc.)*. Les enfants doivent réunir et choisir les informations dont ils estiment avoir besoin et rechercher les valeurs numériques correspondantes ;

Une question posée à partir d'une documentation *(textes écrits, dépliants d'information, films, photos, graphiques...)* fournissant en général une information surabondante par rapport à la question. Les enfants doivent alors sélectionner, organiser et exploiter les informations pertinentes.

Dans ces deux cas, le choix des informations se fait, en fonction du type de résolution envisagée, en traduisant la question posée en un ensemble de sous-questions. Les premières informations collectées peuvent se révéler insuffisantes ou non pertinentes au cours de la résolution : une nouvelle collecte ou un nouveau tri sont alors nécessaires.

2.5 Influence de la langue maternelle :

N'oublions pas non plus dans la liste des moyens un important travail sur la maîtrise de notre langue. Un texte de problème est avant tout un texte, écrit en français, dont il s'agit de s'approprier le sens ! (CHA 1931) souligne l'importance d'une lecture attentive de l'énoncé et propose un moyen de la provoquer :

C'est parce que les élèves lisent trop vite les énoncés de problèmes qu'ils se montrent généralement faibles en calcul. Faisons-leur prendre l'habitude de les lire attentivement, de les relire, et même plusieurs fois, s'il est nécessaire. Ils ne tarderont pas à apprécier les effets de cette sage précaution.

Si le problème à résoudre est écrit au tableau noir, les données pourront en être soulignées à la craie de couleur; si le texte en est dans le livre, les nombres seuls figureront au tableau; mais, dans ce cas, il sera utile d'exercer les élèves à reconstituer oralement ce texte à l'aide des nombres. Il importe qu'ils aient une vue bien exacte du sujet.

Le chapitre "Banque des problèmes" propose un certain nombre d'énoncés se prêtant particulièrement bien à ce travail. Mais ne nous masquons pas non plus que les textes des problèmes forment un genre littéraire bien particulier : les quantificateurs y prennent une importance accrue et aussi toutes ces expressions secrétées par les échanges commerciaux telles que "en plus , en moins, de plus, de moins, fois, fois plus, fois moins" etc. Une étude spécifique s'impose. Ce que suffirait seul à mettre en évidence l'énoncé suivant, proposé en Juin 1980 à une classe de C.M.1 , (tiré d'un manuel de C.M.) :

Monique a acheté 3 salades pesant chacune 300 g. Pour chaque salade, elle jette 70 g de déchets. Elle prépare pour sa famille le reste des 3 salades. Trouve la mesure de la masse de salade préparée.

Si la tournure pédante de la question a pu dérouter certains enfants, il est clair sur les échantillons des réponses ci-dessous que l'adjectif indéfini "chaque" est très mal maîtrisé !

La masse en tous de trois salade :
300 x 3 = 900
Pour chaque salade on jette :
900 - 70 = 830 g

La masse de salade
30 x 300 = 900
Nombre de salade jetté
70 - 900 = 830

La masse ~~des trois~~ d'une salades
300g : 3 = 100 g
La masse d'une salade sans les déchets
100 g - 70g = 30 g
La masse des trois salades
30 g x 3 = 90 g

La mesure de la masse de salade préparée est :

(3) · 3
300 g
70
\+ 3
376

3 salades pèsent chacune :

$$\begin{array}{r|l} 70 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

La masse de salade préparée est:

$$\begin{array}{r} 300 \\ \times\ 3 \\ \hline 900 \end{array}$$

La masse des salades est:

$$\begin{array}{r} 300 \\ \times\ 3 \\ \hline 900 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{r|l} 70 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 23 \\ 1 & \end{array}\right)$$

La mesure de la masse de salade préparée est:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

Solution

La masse des ~~tous~~ salades pré-parées est.

300 g : 70 g = 40 g

Opération

$$\begin{array}{r|l} 300 & 70 \\ \cline{2-2} 20 & 40 \end{array}$$

solution

Monique à acheté 130

Opération

$$\begin{array}{r} 3{,}00 \\ -\ 70 \\ \hline 230\,g \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 230 \\ +\ 3 \\ \hline 233\,g \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.33 \\ -\ .303 \\ \hline 1.30\,g \end{array}$$

Mais est-ce seulement la maîtrise du sens des opérations et de la langue qui sépare ces solutions de celle-ci ?

Poids des salades avec le déchets
3 x 300 = 900g

Poids des déchets
70 x 3 = 210 g

Poids des salades sans déchets
900 - 210 = 690 g

Il semble bien que non : concevoir les étapes intermédiaires qui mènent à un but fixé marque un niveau supérieur dans le travail de l'esprit, généralement qualifié de démarche raisonnée.

2.6 Démarche raisonnée :

La méthode heuristique la plus féconde en ce domaine est évidemment l'analyse.

D'ordinaire, et c'est là l'une des causes de leur insuccès, les élèves abordent toutes les difficultés d'un problème à la fois, au lieu de les diviser. Qui trop embrasse mal étreint. Les problèmes sont simples s'ils ne comportent qu'une seule opération; ils sont complexes, — ce qui est le cas le plus général, — s'ils en comportent plusieurs. Un problème complexe n'est que la combinaison de problèmes simples. Il faut apprendre aux élèves à diviser un problème ordinaire en problèmes simples. Or, ce travail de décomposition nécessite une *analyse du problème.*

Analyser un problème, c'est en distinguer nettement les différentes parties, rechercher le lien qui les unit entre elles; c'est, par une marche lente et sûre et avec la préoccupation constante d'*arriver au résultat demandé*, remonter de proche en proche vers les données, sans en omettre une seule.

La réponse à trouver : voilà notre point de départ. Il s'agit, par exemple, de chercher l'économie annuelle d'un ouvrier. Que faut-il savoir pour connaître cette économie annuelle? — La somme dépensée par an. — Et encore? — La somme gagnée pendant l'année. — L'énoncé nous indique-t-il la dépense annuelle? — le gain annuel? — Voyons...

Comment apprendre aux enfants à faire ce travail d'analyse ?

Peut-on dépasser un comportement du type "conseils" ! (On sait bien l'utilisation générale qui est faite d'un conseil : celui-ci n'est approprié qu'après que le sujet ait précisement fait l'expérience qu'il est censé économiser !).

C'est ce que les I.O. 1980 tentent de faire :

Le maître favorisera la recherche d'**une démarche raisonnée.** Il pourra, par exemple :

Dissocier, dans certaines activités, les démarches et les calculs : un groupe d'enfants joue le rôle de centre de calcul en effectuant (éventuellement à l'aide d'une calculatrice) tous les calculs demandés par les autres groupes qui se consacrent alors exclusivement à la recherche des procédures de résolution ;

Proposer des problèmes dont le contexte, la formulation, les nombres sont très différents, mais qui — sans qu'il s'agisse de familles de problèmes types — relèvent d'une même procédure générale de résolution ; alors celle-ci s'élucidera plus facilement et pourra, éventuellement, se traduire sous la forme d'un organigramme simple, élaboré par les élèves.

Clôturons cette étude en émettant un souhait : que le recueil de problèmes revienne à l'honneur. Un recueil qui ne se contenterait pas d'être une liste de problèmes (simples ou complexes, numériques ou non) mais qui, pour chaque énoncé relèverait et analyserait les procédures observées, bonnes ou erronnées, tenterait de préciser l'impact du problème sur le système des connaissances de l'enfant et les conditions optimales de son exploitation.

Ouvrages ou articles cités

(A.W.B. 1960) R. ARDIOT – A. WANAULD – B. BUDIN – *Calcul – Cours élémentaire* 1960 HACHETTE.

(BOU 1890) C. BOURLET – *Article "Mathématiques" dans le "Dictionnaire de Pédagogie t 2" dirigé par F. BUISSON* – 1890.

(BROU 1976) G. BROUSSEAU – *Les obstacles épistémologiques dans les problèmes en mathématiques* – Texte publié dans le compte rendu de la C.I.E.A.E.M. de Louvain la Neuve (Août 1976), reproduit dans le cahier n° 18 de l'IREM de Bordeaux.

(CHA 1931) C. CHARRIER – *Pédagogie vécue – Cours complet et pratique* – 1931 F. NATHAN.

(COPI 1979) COPIRELEM – *Aides pédagogiques pour le C.E.* – 1979 APMEP.

(LAI 1920) C.A. LAISANT – *L'enseignement du Calcul – Conseils aux Instituteurs* – 1920 HACHETTE.

(MOR 1965) H. MORGENTHALER – *Les Etapes du C.M. 1 et 2* – 1965 ISTRA.

(RAP 1928) Extraits du Rapport de MM. les Inspecteurs Généraux sur les conférences pédagogiques de 1928, publiés dans *"Pages choisies de PEDAGOGIE contemporaine"* par C. SAVARD – 1946 DELAGRAVE.

(TAN 1909) J. TANNERY – *Sur l'Enseignement de l'Arithmétique à l'Ecole* – Texte publié dans *"Revue pédagogique"* pour l'année 1904, mois de Février.

(VER 1976 et 1978)

G. VERGNAULT et C. DURAND – *Structures additives et complexité psychogénétique* – La Revue française de Pédagogie 36, 28-43 – 1976.

G. VERGNAULT – *Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des structures multiplicatives élémentaires ? – Un sondage* – Bulletin de l' APMEP n° 313 – Avril 1978.