LECTURE DE TEXTES MATHEMATIQUES PAR DES ELEVES (14-15 ANS) : UNE EXPERIMENTATION[1]

Colette LABORDE
Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique
LSD2-IMAG - BP 53 X 38041 Grenoble Cedex

Les recherches sur l'apprentissage des mathématiques ont essentiellement porté sur les processus de construction de connaissances ou d'utilisation de connaissances déjà disponibles chez les élèves. Mais elles n'ont pour ainsi dire pas abordé la question de la prise d'information par les élèves comme si elle allait de soi. Or depuis une vingtaine d'années, le caractère naturel, évident de la lecture ou de l'écoute est remis en question, ces activités ne sont plus considérées comme un simple transport d'informations du texte ou du discours à l'ensemble des connaissances déjà disponibles du sujet lecteur ou auditeur. Elles sont maintenant analysées comme des activités complexes au cours desquelles le lecteur ou l'auditeur s'engage avec ses connaissances (Descotes, 1989, Sprenger Charolles, 1988, p.3-5).

La prise d'information est pourtant fondamentale dans l'enseignement qui sollicite fortement des activités d'écoute ou de lecture de la part de l'élève : écoute du discours de l'enseignant en classe, lecture de textes de problèmes, de passages du manuel, d'énoncés écrits au tableau par l'enseignant et la construction du sens qui lui est concomitante.

Cette étude concerne la lecture de textes mathématiques par des élèves de fin de scolarité obligatoire (14-15 ans). A ce niveau d'enseignement, la prise d'informations à partir d'un texte écrit est considérée comme devant faire partie des compétences des élèves. Selon un constat devenu banal cette compétence n'est partagée que par un nombre restreint d'élèves.

Deux situations de lecture nous paraissent particulièrerment fréquentes dans l'enseignement mathématique :

- lecture du texte d'un problème à chercher
- lecture d'un passage du manuel à des fins de prise de connaissance d'un nouveau contenu ou de rafraîchissement de notions déjà vues.

Cet article est relatif au deuxième type de situation. L'activité de lecture met en jeu des traitements de différente nature :

[1] La recherche présentée ici a été menée dans le cadre de l'ATP Langage du CNRS avec comme participants Robert Bouchard et Jacqueline Lachcar (linguistes, Université Stendhal, Grenoble), Mireille Dupraz, Michel Guillerault et Colette Laborde (didacticiens des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble). Elle concerne des passages de manuels qui ne sont plus en vigueur actuellement. La présentation dans les manuels actuels de l'objet d'enseignement relatif à ces extraits a subi des modifications. Les problèmes de lecture abordés dans cet article restent néanmoins d'actualité.

«petit x» n° 28 pp. 57 à 90, 1991-1992

- un traitement perceptif (fixation visuelle)
- un traitement en mémoire des informations
- des stratégies d'élaboration sémantique qui permettent de passer du matériau écrit à la signification; ces stratégies portent à différents niveaux du texte :

. à un niveau global, elles visent à construire une cohérence et à un définir un thème global ;

. à un niveau local, elles visent à définir des significations locales à partir d'énoncés ou de parties d'énoncés.

C'est le troisième type de traitement qui est étudié ici. Nous avons cherché à connaître les interprétations construites par les élèves lors de la lecture de textes extraits de manuels de mathématiques, et à dégager l'incidence des caractéristiques linguistiques de ces textes sur les interprétations des élèves. Notre approche est expérimentale mais elle se situe au sein d'un cadre théorique et elle est fondée sur les hypothèses que nous précisons ci-dessous.

I. Cadre théorique

L'analyse de l'activité de compréhension d'un texte a pu être centrée sur l'appréhension par le lecteur du contenu mathématique sous-jacent et négliger les aspects linguistiques. Inversement d'autres recherches n'ont pris en compte que les aspects de surface du texte cherchant à définir des critères de lisibilité indépendants du contenu et du lecteur. Il nous paraît au contraire important de prendre en compte à la fois la complexité cognitive des contenus en jeu dans le texte et sa complexité rédactionnelle. Cela signifie que notre analyse des conduites de lecture prend en compte et de façon interdépendante les éléments suivants:

-le contenu mathématique sous-jacent

-le sujet lecteur, ici l'élève, en tant que sujet cognitif avec ses conceptions tant des objets mathématiques que de la langue dans laquelle est rédigé le texte à lire

-le modèle langagier en vigueur dans l'enseignement mathématique et les caractéristiques rédactionnelles (Duval, 1986) des textes du même type (ici des manuels de mathématiques) et celles particulières au texte à lire

-la situation de lecture : le statut du texte pour le lecteur, et surtout la finalité de la lecture : à quoi sert la lecture, quelle activité ultérieure lui est-elle subordonnée?

Dans ce schéma, le sens voulu par l'auteur du texte n'est pas automatiquement appréhendé par le lecteur mais est reconstruit par ce dernier en fonction de ses connaissances linguistiques, de la façon dont il conçoit les objets mathématiques sous-jacents, dont il se représente la situation de lecture et sa finalité.

Dans cette activité complexe, nous avons choisi d'analyser l'effet des caractéristiques linguistiques du texte sur la compréhension ; il nous semble en effet que l'incidence des éléments liés au contenu mathématique du texte sont davantage connus en particulier grâce aux études qui ont été menées en didactique des mathématiques à la fois sur l'épistémologie des objets d'enseignement et sur les conceptions des élèves. Maintenant que ces aspects cognitifs ont été cernés, il nous paraît important dans une deuxième étape de dégager dans quelle mesure les éléments de complexité du texte liés à son organisation, sa rédaction, ses modes d'expression affectent l'interprétation de l'élève lecteur.

Cela ne signifie pas que nous laissons de côté les aspects liés au contenu. Nous tiendrons compte des conceptions des élèves à propos de ce contenu pour déterminer comment ils comprennent le texte. Mais le contenu mathématique n'est pas une variable de notre expérimentation, tous les textes à lire sont relatifs au même contenu, les opérations sur les racines carrées, et sont destinés à un même public de lecteurs, des élèves de 3ème (14-15 ans). Les variations dont nous voulons analyser l'effet sur la lecture, portent sur les aspects du texte liés aux signifiants.

Deux caractéristiques importantes des textes à lire marquent profondément leurs spécificités rédactionnelles :

- ce sont des textes d'enseignement
- ce sont des textes de mathématiques.

Des textes d'enseignement

La première caractéristique se traduit par un guidage spécifique du lecteur plus ou moins explicite :

-les éléments du texte sont différenciés, voire repérés suivant leur importance par rapport au savoir à acquérir par des marques typographiques, la mise en page ou des commentaires

-le texte est structuré de façon précise et explicite (titres de chapitres, paragraphes, sous-paragraphes) ; le plan peut être même annoncé en début de chapitre ou de paragraphe

-la prise en compte du lecteur est plus explicite que dans un ouvrage de mathématiques de visée moins pédagogique (ouvrage universitaire par exemple) et se manifeste en particulier par la présence d'activités proposées au lecteur (exercices à résoudre, questions) visant à illustrer ou à introduire les notions présentées.

Ces particularités se retrouvent à des degrés divers dans les textes d'enseignement, il en résulte que des usages implicites coutumiers (pour la définition de coutume cf. Balacheff, 1986) se sont établis qui interviennent au niveau des attentes du lecteur et donc de ses représentations du texte en jeu dans la lecture. En accord avec ces usages, le lecteur interprète par exemple des différences de typographie sans qu'elles soient expliquées et décide d'attacher plus d'importance, à des énoncés en gras qu'aux autres, à des énoncés dans le cours du texte qu'à ceux écrits en marge.

Une des questions de la recherche concerne l'effet de ces usages sur les interprétations construites par le lecteur. Comme il l'a déjà été maintes fois remarqué, ces effets sont particulièrement apparents dans les cas de rupture avec les usages. Un texte d'enseignement peut en effet être rédigé sur la base d'un contrat particulier, en opposition (ou du moins différemment) d'avec la coutume. On peut penser que le conflit entre les usages habituels et le contrat particulier est susceptible d'avoir des conséquences sur les interprétations construites par le lecteur. Dans l'ensemble des textes donnés à lire on a donc choisi un extrait d'un manuel dont le mode d'exposition participe d'une telle rupture par rapport aux manuels standard de mathématiques.

Des textes de mathématiques

Les caractéristiques linguistiques des discours scientifiques ont déjà été dégagées à plusieurs reprises chez les linguistes. Le texte mathématique par certains aspects rejoint la catégorie des textes informatifs (Combettes & Tomassone 1988) (volonté de fournir un apport d'informations) et par d'autres celle des textes explicatifs (volonté de faire comprendre, de justifier en l'occurrence par une méthode propre aux mathématiques). Il présente donc une superstructure particulière organisant l'ensemble composé d'énoncés de propriétés, de démonstrations et d'exemples. Dans une rhétorique qui lui est propre, il développe une démonstration en usant de façon particulière de connecteurs, il introduit son vocabulaire aux références spécifiques. Enfin il utilise deux codes, la langue naturelle et un code sémiologique propre, l'écriture symbolique faite de signes extérieurs à la langue naturelle et possédant ses propres règles de fonctionnement. Ces deux codes sont utilisés conjointement et parfois de manière très imbriquée dans le discours mathématique. L'écriture symbolique (ainsi dénommée) possède deux registres de fonctionnement, le numérique et le littéral, le numérique étant une instanciation du littéral : $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$ est un cas particulier de $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$.

II. Méthodes d'obtention d'observables dans une activité de lecture

Comment savoir ce que le lecteur a compris, ou n'a pas compris ? Une observation directe d'un sujet en train de lire ne fournit guère de données dans la mesure où la lecture est une activité individuelle destinée à soi-même. Un autre point que nous tenons à souligner concerne le caractère illusoire d'une analyse de ces interprétations indépendamment d'une prise en compte de la finalité de la lecture.

Pour obtenir des observables liés à l'activité de lecture nous avons donc choisi de la finaliser au sens où l'activité de lecture a conditionné une activité ultérieure de formulation écrite de l'élève lecteur, suivant en cela les méthodes des recherches sur la construction de signification par un lecteur à partir d'un texte. Nous avons donc en fait évalué la lecture en évaluant la production écrite fournie par l'élève qui nous a permis de dégager des informations sur l'interprétation et la compréhension du texte par ce dernier. Cependant la tâche d'écriture que nous utilisons est plus complexe que celles habituellement en usage qui sont plutôt des tâches de rappel immédiat ou différé d'un seul texte.

III. Dispositif expérimental

On a donné quatre extraits de manuels en vigueur en France à l'époque de la recherche (pour la classe de 3ème, élèves de 14-15ans) portant sur les opérations sur les racines carrées à deux élèves qui devaient dans une première phase les lire attentivement pour, dans une deuxième phase, écrire ensemble un texte commun pour d'autres élèves du même âge ne connaissant pas les opérations sur les racines carrées et destiné à leur permettre de les apprendre. Les élèves travaillant à deux ont été observés et enregistrés. Le travail durait environ deux heures. L'expérimentation s'est déroulée avec douze paires d'élèves de 3ème qui avaient reçu un enseignement sur les racines carrées six mois auparavant.

IV. Choix des extraits de manuels à lire

Il répond à notre objectif de repérer l'effet des variables de présentation d'un même contenu mathématique sur la compréhension des élèves lecteurs. En effet les quatre textes retenus donnés en annexe ont été choisis parce qu'ils diffèrent essentiellement sur les six aspects suivants :

-utilisation de diagrammes, schémas, tableaux : un seul manuel en utilise

-choix du code dans lequel sont formulés les énoncés récapitulatifs des propriétés sur les racines carrées : langue naturelle, écriture symbolique, usage conjoint et plus ou moins imbriqué des deux codes. Ainsi un manuel formule-t-il systématiquement une même propriété, une première fois en langue naturelle, une seconde fois en écriture symbolique :

"La racine carrée d'un produit de réels positifs est égale au produit des racines carrées de ces réels : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+$*"*

La même propriété est ainsi formulée par un autre des 4 textes :

"Quels que soient les réels positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$*".*

Le premier manuel énonce volontairement deux formulations redondantes mais chacune homogène du point de vue du code utilisé; le second manuel a recours aux deux codes au sein d'un énoncé unique hétérogène.

- existence de démonstrations des propriétés des racines carrées : un seul manuel ne fait aucune démonstration

- le type d'objets sur lesquels porte la démonstration : nombres fixés ou nombres indéterminés désignés par des lettres ou les deux types à la fois.

- importance en nombre et place des exemples

- existence d'exercices soit d'application, soit introductifs à une propriété.

Les quatre extraits retenus sont en annexe. Les manuels correspondants sont des manuels de troisième de 1983 : Corrieu & Gourion; Deledicq, Lassave & Misserand; Durrande; Jéomatri notés respectivement dans la suite pour simplifier CG, DL, Du, J.

V. Analyse de la tâche à laquelle sont confrontés les élèves

V.1 Analyse de la situation

Dans cette tâche la lecture est finalisée par l'activité de production qui la suivra ; puisque dans cette dernière les élèves ont à s'exprimer pour des pairs, on peut penser qu'ils vont retenir les informations qu'ils jugent importantes et qu'ils vont les transmettre sous la forme qu'ils pensent la plus accessible pour eux mêmes. On pourra aussi avoir accès à leurs interprétations des textes à lire, dans la mesure où ils vont développer à l'intention des élèves lecteurs de leur production des explications susceptibles d'aider à la compréhension du contenu.

Le travail à deux permet l'extériorisation des démarches de pensée de chacun des partenaires grâce aux échanges verbaux; la confrontation des points de vue des deux partenaires est aussi un élément qui contribue à la dynamique de l'activité.

Le choix de donner à lire quatre textes rend la tâche particulièrement complexe. Il a été conçu pour nous permettre de repérer l'effet des variables de présentation d'un même contenu, en particulier au niveau des choix faits par les élèves pour la présentation qu'ils adoptent dans leur texte. La lecture de plusieurs textes exige une plus grande activité de construction de la part des élèves et évite une recopie possible s'ils n'avaient eu qu'un texte à lire.

V.2 Hypothèses théoriques sous jacentes à l'analyse

Nous reprendrons pour cette étude les hypothèses souvent prises sur les processus de construction d'une signification par le lecteur (Sprenger-Charolles, 1982). Le lecteur élabore au cours de sa lecture une hypothèse et la mène jusqu'au bout. Tant que cette hypothèse lui permet de construire une cohérence globale et locale au texte, il la maintient. Si en revanche il aboutit à des contradictions entre la suite du texte et sa construction, il se produit une crise qui peut conduire le lecteur à revenir sur son hypothèse et la modifier. Signalons que nous avons pu observer un autre règlement d'une telle contradiction chez des élèves de collège lors de la lecture d'énoncés de géométrie (Guillerault, Laborde, 1986) : ces élèves déformaient le texte lu de façon à le rendre consistant avec leur interprétation initiale allant jusqu'à modifier la syntaxe des énoncés. Il semble que les retours en arrière et les possibilités de réanalyse soient difficiles chez ces élèves que nous avons observés.

A cette stratégie du "labyrinthe" on oppose la stratégie du traitement parallèle de deux hypothèses préalables tout au long de la lecture, le lecteur tranchant seulement en fin de lecture. Nous considérons comme improbable une telle stratégie pour les élèves lecteurs de notre expérimentation parce que d'une part elle exige une grande distanciation par rapport au processus même de lecture et que d'autre part nos observations précédentes mentionnées plus haut témoignent au contraire de l'attachement des élèves à une seule hypothèse de lecture.

Cette hypothèse de lecture permet la construction d'une cohérence globale du texte et d'interprétations locales des différents passages en lien avec cette cohérence globale. Nous supposons que cette dernière se fait en fonction du texte et des connaissances mathématiques et linguistiques des élèves. On verra ainsi qu'une cohérence construite par les élèves visant à donner comme fil conducteur aux textes les opérations arithmétiques est la résultante de la structuration des manuels et de la façon dont les élèves organisent leurs connaissances arithmétiques autour de quatre opérations fondamentales.

La complexité de la tâche de lecture est due ici à la dialectique entre les lectures internes à chaque texte et la comparaison inter-textes que le lecteur doit construire s'il veut pouvoir produire lui-même un texte unique. Examinons les quatre extraits et leur ensemble de ce point de vue.

V.3 Cohérence relative à un texte et cohérence entre textes, source de conflits

La lecture de chaque texte requiert

- une construction d'une signification globale, d'une cohérence globale du texte : quel est l'hyperthème du texte ?

- une structuration de cet hyperthème en thèmes et sous-thèmes dont l'enchaînement se fait grâce à la cohérence construite,

- la construction d'une interprétation locale du développement de chacun des thèmes et sous-thèmes en liaison avec la cohérence et la structuration globale construites.

La lecture de l'ensemble des textes à des fins d'écriture d'un texte unique exige de construire une cohérence de l'ensemble des quatre textes; cette construction exige de dépasser les différences entre les textes afin de repérer un fil conducteur commun aux textes et de pouvoir organiser autour de ce fil conducteur les éléments de différence et de ressemblance des quatre textes relatifs à chacun des thèmes et sous-thèmes.

Le choix des quatre textes ne rend pas facile la construction d'une cohérence globale car si trois des textes (Du, CG, J) peuvent donner lieu à une cohérence voisine construite autour de l'idée de propriétés ou de règles de calcul sur des radicaux ordonnées suivant les opérations concernées (produit, quotient, éventuellement somme), DL a une cohérence beaucoup plus difficile à déterminer compte tenu des ses multiples ruptures de contrat avec le lecteur. Précisons.

Une macrostructure voisine pour trois des textes

La structuration des trois textes Du, CG et J. est assez voisine comme le montre le récapitulatif de leurs titres de paragraphes :

Durrande
5.2 propriétés des racines carrées
1 - produit
2 - quotient
5.3 Problèmes
1 - rendre rationnel le dénominateur d'un rapport

Corrieu & Gourion
3.4 Calculs sur les radicaux
a) racine carrée d'un produit
b) racine carrée d'un quotient
c) somme contenant des radicaux
d) quotients contenant des radicaux au dénominateurs

Jéomatri
V - Calcul sur les radicaux
5.1 racine carrée et multiplication
5.2 racine carrée et division
5.3 racine carrée et addition

On reconnaîtra aisément le parallélisme entre
- les paragraphes 5.2.1 Du, 3.4 a CG , et 5.1 J qui traitent du produit
- les paragraphes 5.2.2 Du, 3.4.b CG, 5.2. J qui traitent du quotient
- les paragraphes 3.4.c CG et 5.3 J qui traitent de la somme
- les paragraphes 5.3.1 Du et 3.4 d CG qui traitent des radicaux au dénominateur.

Le paradigme de l'opération arithmétique autour duquel s'organise chacun de ces textes est aussi assez mis en évidence dans ces trois textes.

En revanche DL diffère de ces trois textes de par son intention annoncée au niveau de son titre et de par son absence de sous-titres et son développement interne fait de ruptures comme il a déjà été dit.

Un texte en rupture constante de contrat

L'extrait du manuel Deledicq & al. annonce par son titre général qu'il s'agit d'apprendre à transformer des écritures contenant des radicaux.

Première rupture : Immédiatement après ce titre un alinéa est consacré aux écritures contenant des additions de radicaux dont on apprend justement qu'elles ne peuvent être transformées :

"Lorsque tu effectues des calculs avec des radicaux, il faut te méfier des additions et des soustractions.

Par exemple : $\sqrt{5+4}$ n'a rien à voir avec $\sqrt{5} + \sqrt{4}$"

Deuxième rupture : Il poursuit en ne traitant toujours pas le thème annoncé mais en introduisant une "remarque" d'écriture selon laquelle on peut sous-entendre le signe de multiplication. En particulier il écrit : $\sqrt{3}\sqrt{5}$ représente le nombre $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$".

Enfin il énonce directement à la suite de cette remarque les règles de calcul sur les radicaux. L'absence de transition entre la remarque d'écriture et l'énoncé des règles de calcul données sans démonstration peut donner lieu à une interprétation englobant convention d'écriture et règles de calcul sur les radicaux : dans les deux cas il s'agit d'écrire autrement les expressions selon certaines conventions ce qui après tout est consistant avec le titre principal.

Troisième rupture : Enfin des exemples sont donnés après l'énoncé des propriétés dont seuls les premiers sont des exemples authentiques, les deux suivants portant sur un autre mode de calcul visant à rendre rationnel un dénominateur contenant un radical, les deux derniers portant sur la somme de radicaux non traitée dans l'énoncé des règles de calcul.

Une hypothèse de lecture permettant d'éviter plusieurs de ces ruptures de contrat consiste à comprendre tout le texte comme la présentation de conventions d'écritures à propos de radicaux : suppression du signe $\times$, déplacement du signe $\sqrt{\ }$ dans les produits et les quotients. On constatera les traces plus ou moins fortes d'une telle hypothèse chez deux binômes.

Plusieurs comportements de lecture sont possibles face à ce conflit potentiel de cohérences entre textes :

- les élèves ne gardent que des textes cohérents entre eux pour construire leur texte, soit Du, CG, et J, soit DL seul ; le conflit est alors évité.
- les élèves prennent en compte les quatre textes : on peut s'attendre soit à un échec dans la construction d'une cohérence unique se traduisant par exemple par la coexistence de deux cohérences, soit par le règlement en faveur d'une des cohérences, soit par le dépassement du conflit par la construction d'une cohérence différente des deux autres.

V.4 Compréhension interne de chacun des textes

Un deuxième élément de la tâche consiste à comprendre à un niveau plus microstructurel chacun des textes en lien avec la cohérence globale construite. Les caractéristiques rédactionnelles de chacun des textes (présentées lors du choix des textes, §IV) peuvent faciliter ou inversement gêner la compréhension.

Les démonstrations

Il semble a priori qu'un élément important de la construction du sens, une fois la macrostructure dégagée, réside dans la compréhension des démonstrations pour les trois textes qui en font (Du, CG, J), compréhension qui s'articule autour des éléments suivants :

i) lien avec la macro-structure : le lecteur doit comprendre que l'objectif de la démonstration est justement de démontrer une propriété ou règle de calcul correspondant à une opération sur les radicaux ;

ii) construction d'un enchaînement entre les énoncés formant la démonstration à l'aide des connecteurs ou des raisons explicitées par le texte ;

iii) compréhension de chacun des énoncés formant la démonstration et attribution d'un statut opératoire (s'agit-il d'une hypothèse, d'une conclusion, d'une règle d'inférence ? (Duval 1991))

iv) addition éventuelle d'un constituant manquant de la démonstration (par exemple, les règles d'inférence sont souvent implicites).

Les trois textes Durrande, Corrieu & Gourion et Jéomatri qui présentent des démonstrations diffèrent sur chacun des points soulevés en particulier sur la démonstration relative au produit dont le rôle est crucial dans le texte car c'est la première démonstration fournie et que le fond et la forme des suivantes en sont très inspirés.

i) L'objectif de la démonstration sur le produit est annoncé par J alors qu'il est partiellement évoqué dans CG ("comparons $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$") et qu'il ne l'est pas du tout dans Du :

"As tu démontré que la propriété suivante est vraie ?
Si a et b sont des réels positifs ou nuls
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
Pourquoi ?
Nous allons démontrer cette propriété." (Jeomatri, § 5.1).

ii) L'enchaînement est explicité dans le J et le CG alors qu'il ne l'est pas dans le Du.

Les explicitations de l'enchaînement ne sont pas les mêmes dans CG et Du. Nous donnons ci-dessous les deux démonstrations en soulignant (c'est nous qui soulignons) les éléments qui constituent l'enchaînement.

Corrieu & Gourion :

"Soit des réels positifs a et b. Comparons $\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$. <u>Ces nombres sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux</u> :

$(\sqrt{ab})^2 = ab$
$(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2 = ab$
<u>*donc*</u> $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2 = ab$
<u>*par suite*</u> $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$
<u>*Donc*</u> *:*
Quelques soient les réels positifs a et b, $\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}}$**".**

Jéomatri :

"Si a et b sont des réels positifs ou nuls
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$
Pourquoi ?

Nous allons démontrer cette propriété.

Soient a et b des nombres positifs réels ou nuls. Les nombres $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ *sont positifs ou nuls; pour les comparer il suffit de comparer leurs carrés.*

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab \qquad\qquad (\sqrt{ab})^2 = ab$$

Puisque $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ *et* $\sqrt{ab}$ *sont deux nombres réels positifs ou nuls dont les carrés sont égaux, nous pouvons conclure.*

Si a et b sont des réels positifs ou nuls,

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$"

Une des difficultés de compréhension de la démonstration réside dans le fait que tous les énoncés symboliques la constituant **ne sont pas dépendants.** Ainsi les énoncés $(\sqrt{ab})^2 = ab$ et $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$ sont indépendants, le premier résultant de la définition de la racine carrée de ab, le deuxième d'une règle de calcul du carré d'un produit puis de la définition de la racine carrée de a et de celle de b.

En revanche l'énoncé $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ est **conséquence des deux** précédents. L'énoncé qui suit $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ est conséquence du seul précédent en raison du théorème selon lequel si leurs carrés sont égaux, deux nombres sont égaux. L'enchaînement de la démonstration n'est donc pas aisé à reconstituer pour au moins deux raisons:

- la suite des énoncés n'est pas une chaîne d'implications mais aurait plutôt une structure d'arbre.

$$(\sqrt{ab})^2 = ab \qquad\qquad (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$$

$$\downarrow$$

$$(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

- la variété des liens entre chacun des énoncés : chaque lien repose sur un théorème mathématique différent de ceux sous-jacents aux autres liens.

La structure de l'enchaînement n'est pas explicitée par CG qui en aurait plutôt une présentation linéaire (les énoncés sont écrits exactement les uns en dessous des autres) mais elle est suggérée par Jéomatri par la mise en vis à vis dans la page des deux premiers énoncés indépendants. Il faudrait tirer de l'absence de connecteur dans CG entre les deux premiers énoncés qu'ils sont indépendants mais cette inférence ne peut être faite en raison des usages en vigueur suivant lesquels l'absence de connecteurs est aussi bien due à une absence de lien qu'à un lien jugé trop évident pour être mentionné.

Les liens sont donnés

- dans CG uniquement par des connecteurs explicitant seulement qu'il y a un lien d'implication mais non la raison de cette implication sauf pour l'énoncé final lié au précédent par un "par suite" dont la raison avait été explicitée au début de la démonstration sous forme d'un théorème sur l'égalité *potentielle* de deux nombres dans le cas où leurs carrés sont égaux. Cependant aucune marque de renvoi à ce théorème n'est présente.

- le seul lien exprimé dans J est ce même dernier lien mais la raison en est complètement explicitée et non de façon *potentielle* comme dans CG mais rattachée au cas des nombres de la démonstration dont l'égalité est *réalisée* (cf. énoncé souligné dans la démonstration de J). J n'utilise aucun connecteur du type "donc" "par suite".

Si une étude détaillée des deux précédents manuels à propos de cette démonstration en montre les implicites, une analyse analogue sur le Durrande met fortement en évidence des implicites incomparablement plus importants et des ambiguïtés dans les explicitations faites ! Redonnons cette démonstration pour la clarté de l'exposé.

"Soit le produit $(\sqrt{7} \times \sqrt{13})$. *Son carré* $(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2$ *s'écrit (puissance d'un produit de réels) :*

$$(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 = (\sqrt{7})^2 \times (\sqrt{13})^2 = 7 \times 13.$$

D'où : $\sqrt{7} \times \sqrt{13} = \sqrt{7 \times 13}$.

De même, quels que soient a et b, réels positifs, le carré du produit $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ *s'écrit :*

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b.$$

D'où : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$*".*

Une particularité de cette démonstration repose sur l'utilisation de deux registres le registre numérique (première partie) et le registre littéral (deuxième partie) qui aboutit à la donnée de deux démonstrations, l'une sur un exemple numérique, l'autre sur n'importe quels nombres réels positifs ou nuls représentés par des lettres exprimant le caractère variable et générique de ces nombres suivant les usages en cours en mathématiques.

La raison pour laquelle ces deux démonstrations sont données n'est pas indiquée, le seul lien entre elles étant exprimé par "de même" dont la portée est ambiguë. Alors que dans l'esprit de l'auteur il porte sur toute la démonstration, de par son insertion dans une phrase ne mentionnant que l'écriture du carré du produit $(\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ il peut aussi être interprété comme ne portant que sur l'élévation au carré de ce produit : de même que

$(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 = (\sqrt{7})^2 \times (\sqrt{13})^2 = 7 \times 13$,

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$.

L'enchaînement de la démonstration n'est pour ainsi dire marqué en surface à part le "d'où" introduisant l'énoncé final. La raison évoquée dans CG et J de l'égalité de deux nombres dans le cas où leurs carrés sont égaux est absente. En revanche la raison explicative du développement du carré de $(\sqrt{7} \times \sqrt{13})$ est donnée. Comme de plus l'écriture de ce carré est soulignée par l'avertisseur "s'écrit", et que le "de même" peut être compris comme portant uniquement sur le développement du carré, l'accent est fortement mis dans la démonstration non pas sur la comparaison des carrés mais sur le développement du carré d'un produit. Cela ne sera pas sans conséquence sur les interprétations construites par les élèves comme on le verra plus bas.

Enfin tous les énoncés symboliques de la démonstration ne sont pas donnés contrairement à CG et J. Il manque l'énoncé $(\sqrt{ab})^2 = ab$. **Le seul connecteur "d'où" renvoie donc en fait à deux énoncés dont l'un n'est pas explicité!** L'incitation est forte pour qu'il soit compris comme ne portant que sur l'énoncé précédent selon un principe d'économie qui pourrait être qualifié d'association locale.

En résumé cinq éléments sont susceptibles d'être facteurs d'interprétation erronée de cette démonstration : la présence de deux registres, la portée ambiguë d'un connecteur entre les deux parties de la démonstration, l'ellipse de la raison fondamentale de la démonstration, l'accent mis sur une étape de la démonstration, à savoir le passage au carré, l'absence d'un énoncé nécessaire à la démonstration.

Signalons que l'autre démonstration fournie par les manuels CG et J à propos du quotient est calquée sur celle qu'ils ont donnée pour le produit. Dans Du en revanche, contrairement au cas du produit, elle ne contient que la partie relative au registre numérique. Ce dernier élément d'hétérogénéité de Du peut gêner la construction d'une cohérence entre les deux démonstrations du produit et du quotient.

Exemples et exercices

Parmi les variables rédactionnelles des textes dont nous nous proposions d'étudier l'incidence sur la lecture des élèves, figure la présence d'exemples et d'exercices. Nous faisons l'hypothèse que les exemples permettent de mieux dégager le caractère opératoire des règles de calcul à retenir qui n'apparaît pas dans la démonstration. Il est difficile d'anticiper les rôles possibles des exercices dans la compréhension des élèves dans la situation présente. Il s'agit d'une lecture isolée de l'enseignant qui n'est là ni pour demander la réponse aux exercices ni pour en donner une validation. La lecture à finalité de production immédiate d'un texte de présentation pour d'autres élèves dans une durée d'élaboration relativement réduite (deux heures) peut conduire l'élève lecteur à sacrifier les exercices porteurs d'inconnu au profit d'informations explicitées et donc de traitement immédiat. La situation expérimentale ne permettra donc peut-être pas d'apprécier la portée des exercices sur la compréhension.

Présence conjointe de la langue naturelle et du code sémiologique propre aux mathématiques

Seul Du donne les énoncés des propriétés dans les deux modes d'expression, langue naturelle et code sémiologique, les autres manuels se contentant de fournir l'énoncé symbolique. Nous supposons que cette double expression dans deux modes de formulations différents, d'une part met en valeur la propriété ou règle à retenir, d'autre part permet un contrôle de l'interprétation d'une formulation par la présence de l'autre. Evidemment cela suppose que les élèves reconnaissent bien que les deux formulations renvoient au même référent.

VI. Méthode d'analyse des productions et conduites des élèves

Comme nous l'avons dit lors de l'exposé de notre cadre théorique de travail, l'accès aux interprétations construites par le sujet lecteur d'un texte tient de la gageure dans la mesure où ces interprétations pour être observables doivent être extériorisées dans un contexte et de ce fait vont être modifiées de par l'opération d'extériorisation et l'influence du contexte.

Nous soulignons donc que les interprétations des élèves que nous cherchons à reconstruire sont forgées dans une double situation de lecture écriture avec ses caractéristiques propres, en particulier, celle de comporter la lecture de quatre textes relatifs au même contenu mathématique.

Trois voies d'accès aux interprétations des élèves seront utilisées :

- étude des manuels et des passages des manuels qui les ont inspirés ou leur ont servi à des emprunts; l'hypothèse sous jacente est que les passages retenus par les élèves pour leur propre texte ont été considérés comme de lecture plus simple ou du moins ressentis comme mieux compris, puisqu'il s'agit de faire un texte permettant à d'autres élèves de comprendre le contenu mathématique en jeu;
- étude des modifications voire des erreurs dans la transcription de ces emprunts ou de ces passages qui ont servi de sources d'inspiration; l'hypothèse correspondante attribue aux décalages entre les textes donnés et le texte fourni par les élèves un rôle de révélateur des significations construites dans la lecture.
- étude des éléments constitutifs de la cohérence de leur texte produit qui reflétera les cohérences intra et intertextuelle qu'ils ont construites à partir des quatre textes donnés.

Ces trois axes d'étude seront entrepris à l'aide des productions écrites des élèves et des échanges verbaux lors de l'élaboration de leur texte.

VII. Utilisation des textes de base par les élèves : inspiration et emprunts

Nous distinguons deux utilisations des textes de base :

- une utilisation dans laquelle les textes de base ont inspiré les productions des élèves;
- une utilisation dans laquelle il s'agit tout simplement d'emprunts de taille variable faits aux manuels.

VII.1 Les textes de base en tant que sources d'inspiration

Pour donner une idée générale de l'influence respective de chacun des textes de base, essayons d'abord d'estimer pour chacune des productions des élèves leurs sources d'inspiration.

La structuration du texte en paragraphes (organisation macrostructurelle)

Rappelons que trois des quatre manuels présentent une organisation macrostructurelle marquée en surface par des paragraphes annoncés par des titres. Il s'agit de Du, CG et J (cf§ II). Mais J se distingue des deux autres par la place accordée aux quotients irrationnels. En effet Du et CG placent le thème des dénominateurs irrationnels au même niveau que les thèmes du produit et du quotient en lui consacrant un paragraphe spécifique. J traite ce thème de façon cachée au sein d'un exercice à l'intérieur du paragraphe sur le quotient.

En revanche, l'organisation du dernier manuel DL n'apparaît guère en surface (cf §V.3).

Dans l'ensemble des douze textes produits par les élèves, trois textes reprennent exactement l'organisation de CG, un texte reprend exactement celle de Du. Tous les autres textes sauf un (inorganisé) ont une organisation originale avec soit des ajouts du type introduction, conclusion, soit des suppressions de paragraphes ou création de paragraphes regroupant plusieurs paragraphes des textes de base. Ainsi Corrine et Valérie ont-elles seulement deux paragraphes 1 - produit, 2 - quotient, ce dernier paragraphe contenant la méthode pour rendre rationnel un dénominateur.

Un premier constat est que tous les textes des élèves sauf un sont organisés par une structuration en paragraphes. En cela ils suivent les manuels Du, CG et J. Cependant l'influence de J semble s'être exercée de façon moindre puisque 9 binômes (cf. tableau) ont traité comme un thème en soi le problème des quotients irrationnels et que 7 d'entre eux ont consacré un paragraphe à ce thème. L'organisation majoritaire retenue a donc été celle du Du et du CG. Le choix de ne pas traiter directement le thème mais de le faire au détour d'un exercice ajouté à une typographie et une mise en page ne détachant pas les titres de paragraphe n'ont pas permis au Jéomatri d'être une source d'inspiration du point de vue macrostructurel.

Il semble donc que seuls les deux manuels qui présentaient une organisation macro-structurelle quasi linéaire accompagnée d'une mise en page et d'une typographie claires aient inspiré l'organisation des textes des élèves. CG qui a été préféré présente une organisation à un niveau et une plus grande homogénéité dans la numérotation et les titres de paragraphes que Du qui présente une organisation à deux niveaux.

Le contenu des paragraphes (microstructure)

On s'intéresse ici au discours produit par les élèves à l'intérieur de chacun des paragraphes de leur production. Il peut s'agir de l'énoncé d'une propriété, d'une démonstration de cette propriété, d'exemples, d'exercices traités ou non, de méta-remarques portant sur le référent mathématique ("il est souvent commode" CG, "il faut te méfier" DL). Ce discours peut être un emprunt pur et simple à l'un des manuels, il peut être seulement inspiré par l'un des manuels en ce que les élèves suivent l'argumentation du manuel en en changeant les termes.

Un exemple de cette dernière catégorie peut être donné par Vincent et Franck à propos du quotient. Ils s'inspirent profondément de Du en modifiant cependant le choix numérique et les énoncés en langue naturelle introductifs aux égalités mathématiques écrites en code sémiologique :

" 2) <u>Quotient</u>

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}}$ *le carré de ce nombre est* $\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}}\right)^2$

s'écrit aussi : $\frac{(\sqrt{9})^2}{(\sqrt{11})^2} = \frac{9}{11}$

Si a et b $\in \mathbb{R}^+$ *et* $b \neq 0$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{"}$$

En un premier temps, nous avons dénombré ensemble ces deux cas, emprunts et forte inspiration dans les textes des élèves en ne prenant pas en compte de légers emprunts au sein d'un discours original. Deux binômes ont créé un texte original du point de vue de la macro et la micro structure (Alain & Raphaël, Nathalie & Fabienne). On peut cependant voir une influence de CG sur le texte de Nathalie et Fabienne dans l'énoncé des propriétés du produit et du quotient. Deux phrases de Du, une formule de CG ont été reprises par Alain et Raphaël qui se sont aussi inspirés de phrases de DL qu'ils ont modifiées.

Nous donnons ci-dessous les différentes combinaisons des textes de base qui ont inspiré les textes des autres élèves avec pour chacun d'eux le nombre de textes d'élèves concernés.

4 textes de base : 2 binômes

Durrande, Corrieu & Gourion, Jéomatri, Deledicq & al. : Philippe et Eddy, Valérie et Béatrice

3 textes de base : 3 binômes au total

Durrande, Corrieu & Gourion, Jéomatri 1 binôme : Marc et Christian

Corrieu & Gourion, Jéomatri, Deledicq & al. 1binôme : David et Dominique

Durrande, Jéomatri, Deledicq & al. 1 binôme : Pierre-Yves et Franck

2 textes de base : 4 binômes au total

Durrande, Corrieu & Gourion 3 binômes : Vincent et Franck, Danielle et Sandrine, Yvan et David

Corrieu & Gourion, Jéomatri 1 binôme : José et Emmanuel

1 texte de base : 1 binôme

Durrande 1 binôme : Corrine et Valérie

Quand les binômes se sont inspirés de trois textes, la combinaison Du, CG, DL n'est pas apparue. Lorsque les binômes ne retiennent que un ou deux manuels pour des emprunts, deux manuels sont préférés Du et CG. On peut émettre l'interprétation que pour les élèves n'ayant pas réussi à construire une cohérence entre textes, il a été plus facile d'en construire une entre ces deux ouvrages, qui comme nous l'avions indiqué dans notre analyse précédente étaient proches. Pour la même raison, la combinaison Du, CG, DL n'est pas apparue la distance entre DL et les deux autres manuels étant trop grande.

L'influence du Durrande et du Corrieu & Gourion ressort de ce dénombrement. La combinaison de ces deux manuels a inspiré le plus grand nombre des textes des élèves. Seuls ces deux manuels ont pu être la source unique de productions d'élèves. Précisons cette influence en indiquant combien de textes de binômes ont été inspirés par chacun des manuels.

Corrieu & Gourion : 8 binômes

Durrande : 8 binômes

Jéomatri : 6 binômes
Deledicq & al. : 4 binômes

On retrouve l'influence plus forte du CG et du Du.

VII.2 Emprunts aux textes de base

Les emprunts aux textes de base sont de tailles diverses. Ce peut être simplement la reprise d'une phrase, d'un exemple numérique, d'une expression particulièrement frappante, telle "n'a rien à voir" ou "il faut te méfier" (DL), ou encore "on dit qu'on a rendu entier le dénominateur" (J).

Nous distinguons les emprunts importants qui portent sur un paragraphe ou une démonstration de ceux qui ne portent que sur une phrase , une expression insérée soit dans des énoncés originaux produits par les élèves, soit dans un emprunt important fait à un autre texte de base. Nous laissons de côté pour l'instant les emprunts dans les titres de paragraphes que nous étudierons ensuite.

Exemple :
Alain et Raphaël à propos de l'addition des racines carrées :

"l'addition et la soustraction ont parfois quelques pièges dans leur calcul.
Par exemple $\sqrt{7+8}$ *n'a rien à voir avec* $\sqrt{7} + \sqrt{8}$.
Dans l'addition la simplification est difficile.
Quand on trouve par exemple
$\sqrt{5+4} = \sqrt{9}$ *on peut le simplifier par 3.*
Mais si l'on trouve
$\sqrt{7+8} = \sqrt{15}$ *on ne peut simplifier, nous gardons donc* $\sqrt{15}$.
Cependant l'on peut faire une simplification en faisant une mise en facteur

$$\begin{aligned} ex : \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75} &= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{3 \times 3 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \\ &= (2+3+5)\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} \text{ "} \end{aligned}$$

Cet extrait contient l'énoncé *"Par exemple* $\sqrt{7+8}$ *n'a rien à voir avec* $\sqrt{7} + \sqrt{8}$*"* calqué sur celui du Deledicq & al. *" Par exemple* $\sqrt{5+4}$ *n'a rien à voir avec* $\sqrt{5} + \sqrt{4}$*"*. Il y a reprise intégrale de la partie en langue naturelle avec un changement dans les expressions numériques. Mais cet énoncé se trouve inséré dans un paragraphe pour l'essentiel original. On considérera qu'il s'agit d'un emprunt léger.

Emprunts importants

Nous donnons ci-dessous les ensembles des textes de base qui ont servi à des emprunts importants avec pour chaque ensemble le nombre de binômes concernés.

Emprunts importants à :

Durrande, Jéomatri, Deledicq & al. 1 binôme : Pierre-Yves et Franck

Durrande, Corrieu & Gourion, Jéomatri 1 binôme : Marc et Christian

Corrieu & Gourion, Jéomatri 4 binômes : Philippe et Eddy, Valérie et Béatrice, David et Dominique, José et Emmanuel

Durrande, Corrieu & Gourion 1 binôme : Yvan et David

Corrieu & Gourion 4 binômes : Vincent et Franck, Alain et Raphaël, Danielle et Sandrine, Nathalie et Fabienne

Durrande 1 binôme : Corrine et Valérie

En comparaison avec le dénombrement fait à propos des manuels en tant que source d'inspiration , il est intéressant de constater qu'un décalage se produit : Du qui avait une rôle net en tant que source d'inspiration des textes des élèves a beaucoup moins servi pour les emprunts alors que CG et de façon moindre J ont servi à des emprunts. Plus précisément

Nombre de binômes ayant fait un emprunt à

CG	Du	J	DL
10	4	6	1

Certains passages de Du ont inspiré les textes des élèves mais ont été modifiés par ces derniers alors que les passages de CG et de J ont été repris intégralement. Souvent ces modifications correspondent à des interprétations erronées construites par les élèves lecteurs (cf.VIII.1).

Emprunts dans les titres de paragraphes

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous l'importance des emprunts de titres de paragraphes et leur répartition dans les manuels. En colonne figure le manuel dans lequel le titre a été emprunté, en ligne le paragraphe auquel correspond le titre, à l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne figure le nombre de binômes ayant choisi ce titre.

	Corrieu & Gourion	Durrande	Jéomatri	Del. & al.
titre général	2 (ou Jéomatri)	2	2(ou Corrieu & Gourion)	0
paragraphe sur le produit	1	5	0	x
paragraphe sur le quotient	1	5	1	x
paragraphe sur la somme	2	x	0	x
paragraphe sur rendre rationnel un dénominateur	5	3	x	x

N.B. Une croix indique l'absence de titre correspondant au paragraphe et au manuel concerné donc l'impossibilité d'emprunt

Les titres de Du ont été surtout repris en ce qui concerne le produit et le quotient, peut-être en raison de leur brièveté alors que CG et J avaient des titres composés. En revanche le titre de CG "Quotient contenant des radicaux au dénominateur" a été davantage repris que celui de Du "Rendre rationnel le dénominateur d'un rapport". Peut-être est-ce dû au fait que cette question est mise sur le même plan que les autres thèmes abordés dans le CG alors qu'une dissymétrie a lieu dans Du où le titre "Rendre rationnel le dénominateur d'un rapport" n'est qu'un sous-titre du titre Problèmes. D'autre part ce titre de CG forme un ensemble plus homogène avec les autres titres que celui de Du qui ne se présente pas sous forme d'un groupe nominal comme pour les autres titres. Il semble que l'homogénéité et la simplicité aient motivé les emprunts des élèves.

Trois conclusions peuvent être tirées de cette analyse des textes en tant que sources d'inspiration et d'emprunts :

- l'organisation de deux des manuels Du et CG a été comprise puisqu'elle a servi dans les textes des élèves et qu'elle n'a pas dans la majorité des cas été une simple recopie ;
- les textes de base qui ont le plus inspiré les textes des élèves présentent une organisation linéaire, une mise en page simple (rien ou très peu dans la marge, pas d'utilisation des deux dimensions de la feuille), exposent directement les thèmes sans recours à des exercices d'introduction ;
- les textes n'ont pas eu la même importance en tant que source d'inspiration et en tant que source d'emprunt. CG et J ont davantage servi que Du en tant que source d'emprunt. Deux hypothèses peuvent être proposées: les manuels ont été source d'emprunt parce qu'ils ont été compris par les élèves ou les manuels ont été source d'emprunts aux endroits où ils n'étaient pas compris par les élèves qui ne pouvant les interpréter les ont recopiés sans changement.

L'analyse des passages des textes des élèves inspirés de Du en ce qui concerne le produit montre des erreurs dans tous ces passages qu'on peut facilement imputer à des erreurs d'interprétation. De plus les passages recopiés de CG et de J le sont dans des textes d'élèves ne présentant dans leur totalité en général (sauf dans deux cas) aucune erreur mathématique et dont l'articulation entre les différentes parties ne souffre d'aucune défaillance. Nous pouvons au moins en conclure que les manuels recopiés ont été globalement compris mais rien ne permet de penser que le détail des passages recopiés ait été effectivement compris. Cependant on peut aussi penser que les emprunts des élèves ont été faits sur des critères positifs, comme en attestent certains de leurs propos dans leurs dialogues, c'est à dire qu'ils ont recopié des passages qui leur paraissaient particulièrement clairs :

Ainsi Vincent et Franck à propos du paragraphe sur les dénominateurs contenant des radicaux consultent chacun des manuels en les jugeant "trop dur" ou "pas bon" jusqu'à tomber d'accord sur CG en disant *"celui là il est bien";* ils recopient alors le passage concerné.

De même Emmanuel cherche pendant quelque temps le passage sur le quotient qui lui avait plu*" c'est pas sur çui la quj'ai vu quelque chose de bien"*

Après plusieurs recherches il retrouve ce passage dans Du :*"c'est pas çui la... oh j'ai rien compris c'est pas çui la c'est un autre, produit, quotient, j'crois qu'c'est çui la ; c'est çui la, fini, qu'on comprend le mieux"*

A l'inverse Corrine dit à Valérie : *"si tu comprends rien faut pas écrire"*

VII.3 Exemples et exercices

Les productions des élèves proposent très peu d'exercices suivant encore en cela Du et CG qui n'en proposent aucun. Seuls cinq binômes insèrent des exercices. Parmi eux deux binômes ont forgé leurs propres exercices, les autres binômes ayant pris les exercices de J.

Tous les textes des élèves présentent des exemples : pour 10 des 12 textes, les exemples suivent l'énoncé de chacune des propriétés comme dans Du et CG et non comme dans DL, où les exercices sont rassemblés en fin.

VII.4 Schéma d'organisation de la présentation d'une propriété

Le schéma majoritairement emprunté est celui commun au Du et à CG : démonstration d'une propriété, énoncé de la propriété puis un ou des exemples (7 binômes sur 12). Un binôme donne les exemples après la démonstration et avant l'énoncé de la propriété. Ce schéma majoritaire a-t-il paru le plus facile à suivre pour les élèves à la lecture, correspond il au script qu'ils ont construit de l'exposé écrit d'un cours de mathématiques ?

VIII. Décalages entre les textes de base et celui produit par les élèves

Nous nous intéressons ici aux passages des textes des élèves visiblement inspirés d'un manuel et présentant des modifications par rapport au manuel en question.

VIII.1 Interprétation de la démonstration sur le produit du Durrande

Le passage qui a donné lieu à ce phénomène est le paragraphe du produit dans Du. Quatre binômes se sont inspirés de ce passage et trois binômes ont fourni un passage laissant transparaître des erreurs d'interprétation. On a analysé plus haut les difficultés potentielles que sa lecture est susceptible de soulever; il semble que certaines d'entre elles soient à l'origine des erreurs d'interprétation des élèves.

L'accent mis par Du sur le passage au carré de l'expression $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ n'a pas été sans effet sur la lecture. Le texte de Danièle et Sandrine est extrême de ce point de vue puisque elles consacrent les deux premiers paragraphes aux produit et quotient dans lesquels elles s'inspirent de Du puis continuent par un troisième paragraphe intitulé calcul des radicaux dans lequel elles recopient les démonstrations de CG sur les mêmes thèmes. Elles n'ont pas reconnu que ces deux manuels traitaient des même propriétés. En effet elles ont interprété la démonstration de Du sur le produit comme la démonstration de la règle de calcul suivante sur l'expression $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$:

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$

En témoignent d'une part le texte qu'elles ont écrit, d'autre part les exercices d'application qu'elles donnent :

"Soit le produit $(\sqrt{7} \times \sqrt{2})$ *a pour carré* $(\sqrt{7} \times \sqrt{2})^2$ *peut aussi s'écrire*

$(\sqrt{7} \times \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2 \times \sqrt{2}^2 = 7 \times 2$

Quels que soit a, b

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = a \times b$

donc
$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = a \times b$
ex :
$(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 = \sqrt{7^2} \times \sqrt{13^2} = 7 \times 13 = 91$
Calcule :
$(\sqrt{15} \times \sqrt{13})^2 = \dots ?$
$(\sqrt{16} \times \sqrt{4})^2 = \dots ?$
$(\sqrt{8} \times \sqrt{24})^2 = \dots ?$
$(\sqrt{3} \times \sqrt{9})^2 = \dots ?$"

On reconnaît dans ce passage un traitement véritable du passage correspondant de Du avec des ajouts originaux d'un exemple et plusieurs exercices portant tous sur l'élévation au carré de $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$. L'accent mis par Du sur cette élévation au carré en particulier par la mention "son carré s'écrit" est repris voire renforcé par Danièle et Sandrine par les deux expressions "a pour carré" et "s'écrit".

Le fait que l'identité $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = a \times b$ est bien le résultat de la démonstration est attesté par la répétition de l'égalité qui ne relève pas du tout d'une étourderie. La deuxième mention de l'égalité est à prendre comme le résultat final qu'il faut retenir alors que la première mention est une généralisation de la formule numérique donnée auparavant.

L'élévation au carré a aussi été reconnue comme centrale par Vincent dans le binôme Vincent Franck alors qu'il semble que Franck ait compris que le résultat important était $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Cette incompréhension entre les deux élèves a donné lieu à une démonstration ne correspondant pas au résultat déclaré $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, Franck le scripteur l'ayant d'abord écrit et Vincent réagissant en obligeant Franck à écrire l'égalité $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$ et à mettre un "d'où" annonciateur d'un résultat devant cette dernière. Citons ce passage de leur texte :

"1) Produit de radicaux
$(\sqrt{9} \times \sqrt{11})$ *le carré de ce nombre est :* $(\sqrt{9} \times \sqrt{11})^2$
$\sqrt{9^2} \times \sqrt{11^2} = 9 \times 11$
donc quelque soit a et b non nuls (mention rajoutée par Vincent)
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
d'où $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = a \times b$".

Il ne semble pas que le "d'où" imposé par Vincent reflète un enchaînement à partir de l'énoncé précédent, celui-ci ayant été écrit par Franck comme le résultat final de la démonstration. Le "d'où" est d'ailleurs pris par Vincent dans Du où il sert d'annonce du résultat de la démonstration. Vincent dicte à Franck :

"d'où, marque d'où comme ça (il montre Du) *d'où radical de a fois radical de b au carré parenthèses égal radical de a au carré fois radical de b au carré égal a fois b"*

L'incohérence du texte est due ici au désaccord des deux élèves non tranché parce que probablement eux-même n'ont pas perçu cette incohérence.

Valérie et Béatrice produisent elles aussi un texte peu cohérent :

"Le produit $(\sqrt{7} \times \sqrt{13}) = \sqrt{7} \times \sqrt{13}$

Son carré $(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 = (\sqrt{7})^2 \times (\sqrt{17})^2 = 7 \times 13$

La racine carrée d'un produit de réels positifs est égale au produit des racines carrées de ces réels.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}^+$

Si a et b sont des réels positifs ou nuls et que leurs carrés sont égaux alors :

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ "

Leur démonstration faite sur un exemple numérique débouche sur l'élévation au carré. Elles passent sans aucune explicitation à l'énoncé encadré du Durrande énonçant la propriété du produit en langue naturelle et code sémiologique. Ce seul passage pourrait laisser penser qu'elles ont compris la démonstration encore que le passage abrupt de l'élévation au carré sur un exemple numérique sans mention du résultat final numérique $\sqrt{7} \times \sqrt{13} = \sqrt{7 \times 13}$ à l'énoncé général sur les lettres laisse perplexe. Mais l'ajout après cet énoncé d'un théorème faux (inspiré d'une explication de J) débouchant sur la même propriété que celle encadrée remet en cause la pertinence de leur compréhension. On pourra noter que là encore l'étape retenue de la démonstration de Du est l'écriture du carré d'un produit de radicaux. La raison de la démonstration absente de Du n'est évidemment pas évoquée mais elle ne semble même pas reconnue lorsqu'elle est lue dans J puisqu'elle est restituée sous une forme erronée comme introduisant un résultat nouveau (on remarquera que dans ce deuxième énoncé de la propriété $\sqrt{ab}$ est passé à la droite du signe égal et que formellement il diffère de celui qui était encadré quelques lignes auparavant).

Il ressort que pour ces trois binômes l'étape reconnue de la démonstration de Du semble bien être l'élévation au carré du produit de radicaux, les autres étapes pouvant être omises ainsi que le résultat même de la démonstration. Deux d'entre eux (Danièle et Sandrine, Béatrice et Valérie) ne construisent pas d'équivalence sémantique entre ce passage de Du et les passages correspondants des autres manuels.

Les textes des élèves à propos du produit s'inspirant des autres manuels ne révèlent pas de problèmes à part le premier brouillon de Philippe et Eddy qui prennent aussi comme idée charnière l'élévation au carré (est ce dû à Du ?) et réécrivent la démonstration du CG en prenant comme hypothèse que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (on sait $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ écrivent-ils en début) et en démontrant que $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$.

Une des raisons en est peut être due à une mauvaise interprétation de la phrase du Corrieu & Gourion : *"Comparons $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ces nombres sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux"* phrase reconnue par Philippe comme difficile à comprendre lorsque l'observateur lui demande son avis sur les textes des manuels. Philippe tire de cette phrase l'hypothèse que ces nombres sont égaux et cherche à en montrer la deuxième partie l'égalité sur les carrés.

VIII.2 Interprétation de l'hyperthème du Deledicq & al.

Une hypothèse de lecture (cf.§V.2) permettant d'éviter plusieurs ruptures de contrat dans la lecture de DL consiste à comprendre tout le texte comme la présentation de conventions d'écritures à propos de radicaux : suppression du signe x, déplacement du signe $\sqrt{\ }$ dans les produits et les quotients.

Un binôme semble avoir été fortement influencé par l'hyperthème de convention d'écriture qui peut se dégager de ce manuel. Il s'agit de Philippe et Eddy qui ont construit leur texte autour de l'idée de simplification, la simplification portant aussi bien sur les écritures du type $2\sqrt{5}$ que $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{ab}$.

Ainsi Philippe et Eddy changent-ils le "représente" de la formulation "$2\sqrt{5}$ représente $2 \times \sqrt{5}$" en "=", uniformisant de cette façon les simplifications d'écriture qu'elles relèvent d'une convention ou d'une propriété.

On peut aussi penser que cette même idée se fait jour dans la conclusion de David et Dominique qui à l'inverse de Philippe et Eddy transforment les signes d'égalité en "représente" :

"$2\sqrt{5}$ *représente le nombre* $2 \times \sqrt{5}$

$\sqrt{3}\ \sqrt{5}$ *représente le nombre* $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *représente le nombre* $\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\sqrt{a \times b}$ *représente le nombre* $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$"

VIII.3 Interprétation d'un exercice du Deledicq & al.

Comme il a été dit plus haut, DL est en rupture constante de contrat dans l'organisation de son discours. Il l'est aussi volontairement par rapport au contrat habituel qui régit les rapports entre auteur de manuel et élève lecteur. Ce manuel privilégie en effet l'activité de l'élève préalablement à l'introduction de nouveaux savoirs. C'est le rôle joué par ce qu'il appelle les expériences placées en marge du texte et écrites en petits caractères; ces expériences jouent dans l'opinion des auteurs le rôle d'expériences dans des matières expérimentales (physique, chimie, ...) servant à susciter des observations de la part des élèves. L'expérimentation 6 a conduit un binôme (Pierre-Yves, Franck) à induire la propriété erronée de linéarité sur la somme de racines carrées alors que l'objectif de cette expérimentation était bien de mettre en évidence l'absence de linéarité.

L'expérience 6 demande : *"avec ta calculette, calcule une approximation de*

$\sqrt{5+4}$ *et* $\sqrt{5}+\sqrt{4}$

$\sqrt{5-4}$ *et* $\sqrt{5}-\sqrt{4}$

$\sqrt{5 \times 4}$ *et* $\sqrt{5} \times \sqrt{4}$

$\sqrt{\frac{5}{4}}$ *et* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$

$2\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{10}$ *et* $\sqrt{4 \times 5}$"

Pierre-Yves et Franck ont conclu à l'égalité des nombres des quatre premières paires sans essayer de faire le calcul en se reposant sur le contrat habituel qu'en général les nombres dont on demande la comparaison sont égaux. Ici, l'énoncé ne demandait pas explicitement une comparaison mais y incitait. Ils ont écrit :

$\sqrt{5+4} = \sqrt{5}+\sqrt{4}$

$\sqrt{5-4} = \sqrt{5}-\sqrt{4}$ *on emploie la même méthode pour les quatre fonctions*

$\sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5} \times \sqrt{4}$

$\sqrt{\frac{5}{4}}$ *et* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$

mais à la ligne suivante, ils ajoutent prenant l'information toujours de DL :

"$\sqrt{2} + \sqrt{8} \neq \sqrt{2+8}$"

Cette dernière information a été traitée par eux puisqu'elle figurait dans DL sous la forme "$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \ldots = 3\sqrt{2}$ (tu vois que le résultat n'a rien à voir avec $\sqrt{2+8}$". Ajoutons que ces formulations n'ont été l'objet d'aucun commentaire ou échange verbal entre les deux élèves.

Deux interprétations sont possibles de ces formulations contradictoires à l'intérieur d'un même texte :

1 - La coexistence des deux propositions $\sqrt{5+4} = \sqrt{5} + \sqrt{4}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{8} \neq \sqrt{2+8}$ ne revêt pas pour ces élèves le caractère contradictoire qu'elle présente pour nous. Chacune de ces propositions est interprétée par les élèves comme valide dans son contexte d'énonciation, les élèves n'ayant pas reconnu l'actualisation dans chacun de ces contextes d'une règle générale sur la somme de racines carrées.

2 - Les élèves ne visent pas à construire une cohérence dans ce qu'ils lisent même si les informations tirées proviennent d'un même texte.

Dans les deux cas, un manque crucial de l'enseignement se fait jour : soit il n'a pas permis l'apprentissage du passage du registre littéral au registre numérique, soit il n'a pas permis un apprentissage minimal de la lecture d'un texte.

VIII.4 Usage des deux codes langue naturelle et écriture symbolique

a. Enoncés des propriétés

Les énoncés des propriétés des racines carrées présents dans les textes des élèves font plus fortement appel à l'écriture symbolique que ceux des manuels. Les différences constatées avec les manuels concernent 3 binômes qui ont seulement indiqué les règles de calcul sur les racines carrées sans indiquer les conditions de validité. Par exemple dans le cas de la multiplication, ils ont seulement écrit :

."$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$"

Elles concernent aussi un binôme (Alain et Raphaël) qui contrairement aux manuels n'a pas donné d'énoncé de propriété mais des méta-énoncés comme

"l'addition dans son calcul a un petit piège"

"la multiplication des radicaux est assez simple; il existe une méthode qui facilite cette multiplication

ex : $\sqrt{7} \times \sqrt{13}$ *ne peut se multiplier qu'en faisant* $\sqrt{7 \times 13}$*"*.

Ci-dessous un tableau résumant l'importance quantitative des emplois respectifs de la langue naturelle et de l'écriture symbolique dans l'énoncé des propriétés relatives au produit, au quotient et à la somme

	produit	quotient	somme
langue naturelle seule (LN)	0	0	0
écriture symbolique seule (E)	1	3	6
deux fois, une en LN , une en E	3	2	0
mélange E, LN	7	6	2
oubli des conditions de validité	3	3	

Les énoncés les plus fréquents sont hybrides, mélanges de langue naturelle et d'écriture symbolique, le code dominant étant surtout l'écriture symbolique.

b. Discours explicatif en langue naturelle

En dehors de l'énoncé des propriétés, l'usage de la langue naturelle (à part l'exception constituée par le binôme Alain et Raphaël) est faible. Ce faible usage de la langue naturelle est dû dans les productions des élèves à l'absence de méta-discours explicatif ou introductif malgré la consigne d'écrire un texte qui permette à d'autres élèves de comprendre les propriétés des racines carrées. Ce sont les titres de paragraphes et de sous paragraphes qui forment la plus grande partie des énoncés en langue naturelle des productions des élèves. De l'ensemble du contenu présenté dans les textes, les élèves ont retenu les règles de calcul sous forme symbolique et jugé important de les transmettre.

IX. Construction d'une cohérence par les élèves

La cohérence inter et intra-textuelle construite par les élèves à la lecture de ces quatre extraits est évaluée au travers de celle qui apparaît dans leur texte. Certes, comme il a déjà été noté (cf. § II), cette méthode ne permet pas d'avoir accès directement à la cohérence construite et la cohérence que nous reconstruisons à partir des textes des élèves est résultat d'une double reconstruction, d'une part par notre interprétation, d'autre part parce que la cohérence des productions des élèves est construite par eux à partir de celle qu'ils ont constituée à la lecture. Nous rendons compte dans ce qui suit de la cohérence **sous jacente aux productions** des élèves.

L'analyse a priori (cf. § V.3), prévoyait deux conduites possibles :

- celle d'une construction d'une cohérence à partir des quatre textes, rendue difficile par les différences entre le DL et les trois autres textes;
- celle de la construction d'une cohérence à partir des trois textes (Du, CG, J).

L'étude des cohérences construites s'appuie sur les manuels qui ont servi de source d'inspiration. Comme on a pu le constater à l'alinéa VII, deux binômes se sont inspirés de quatre textes et contrairement à ce que nous pensions a priori, deux binômes ont essayé de construire une cohérence à partir d'un éventail de trois textes dont l'un était le DL. Il s'agit de David et Dominique et de Pierre-Yves et Franck. Ce dernier binôme n'a pas réussi à construire une cohérence dans son texte qui n'est qu'une suite de morceaux empruntés aux trois manuels sans logique.

Quant à David et Dominique, la construction de leur texte s'appuie surtout sur CG et J qui pouvaient tout à fait permettre ensemble la construction d'une cohérence autour des propriétés des racines carrées. Cela semble, en surface, le cas dans tout leur texte. Mais si on l'examine plus attentivement, on peut se demander s'ils ont véritablement réussi à construire une cohérence pour deux raisons :

i) Comme exemple de la propriété du produit, ils proposent

$$\begin{aligned}(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 &= (\sqrt{7 \times 13})^2 \\ &= 7 \times 13 \\ &= 91\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{7} \times \sqrt{13})^2 &= 7 \times 13 \\ &= 91\end{aligned}$$

L'élévation au carré d'un produit de racines carrées serait le résultat qu'ils ont tiré du théorème qu'ils viennent de démontrer. On retrouve l'idée force issue de Du de l'élévation au carré (cf. § V.3)

ii) ils écrivent un dernier paragraphe inspiré du DL qui "résume" ce qui précède en fournissant éventuellement une cohérence contradictoire à tout le texte puisqu'ils écrivent dans ce bilan :

$2\sqrt{5}$ représente le nombre $2 \times \sqrt{5}$

$\sqrt{3}\,\sqrt{5}$ ______________ $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ______________ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt{a \times \mathrm{b}}$ ______________ $\sqrt{a} \times \sqrt{\mathrm{b}}$

On retrouve l'idée de simplification de notation sous jacente au texte de Philippe et Eddy puisque la suppression du signe $\times$ est mise sur le même plan que les propriétés des racines carrées. Le texte de David et Dominique ne permet pas de dégager une cohérence véritable et semble plutôt ne pas avoir su choisir entre trois cohérences possibles, celle des propriétés, celle de l'élévation au carré, celle de la simplification.

En ce qui concerne les deux binômes qui se sont appuyés sur les quatre textes, Philippe et Eddy, Béatrice et Valérie, deux cas prévus a priori se sont produits :

- triomphe d'une cohérence, celle tirée de DL;
- construction d'une nouvelle cohérence.

Cette situation a été très dure à gérer par Philippe et Eddy qui tout au long de leur travail ont cherché un fil conducteur commun aux textes pour organiser le leur. Philippe l'a manifesté par plusieurs questions à l'observateur :

Obs : "en commun, vous faites un texte en commun"

Ph. : " oui mais de tout c' qu' on a là"

(plus tard) Ph. à Obs. : "Mais il faut reprendre tous les exercices qu' il y a là ?"

enfin il remarque après que l'observateur a mentionné que les textes sont là pour les aider : *"mais ça se suit pas"*

Une première tentative est faite par Eddy autour de l'élévation au carré qui joue un rôle charnière dans les démonstrations des propriétés du produit et du quotient, élévation au carré qu'il essaie d'appliquer à la somme en écrivant $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ et en élevant au carré les deux membres de cette égalité de façon erronée pour le premier membre : $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a+b})^2$ Une deuxième tentative qui est la tentative finale est faite autour de l'idée de simplification qui est très apparente dans DL (cf. §V.3) mais qui peut être aussi tirée des autres extraits : "quelquefois on peut simplifier une somme de racines" , il est souvent commode lorsqu'on veut faire un calcul numérique ou des simplifications..."(CG), "écris sous une forme plus simple", "donne une écriture plus simple"(J) "on a intérêt pour faciliter le calcul..." (Du).

Dans le texte de Philippe et Eddy, les propriétés des produit et quotient suivent immédiatement les remarques de suppression du signe x comme dans le DL. L'égalité $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ est présentée comme une simplification de l'égalité de leurs carrés (ils remplacent le "par suite" de la démonstration du CG par un "simplification $\Rightarrow$") et leur texte se termine par un paragraphe sur la simplification d'un nombre contenant des exercices d'utilisation des propriétés des racines carrées. La première cohérence construite a été intégrée dans la deuxième comme un aspect de la simplification qui est le fil conducteur du texte final produit. Dans ce cas, c'est donc une cohérence héritée du DL. qui a dominé les autres en les assujetissant.

Béatrice et Valérie ont résolu le problème en construisant une nouvelle cohérence externe aux quatre extraits, autour des quatre opérations arithmétiques. Il s'agit bien là d'une nouvelle cohérence pour deux raisons :

- aucun des extraits n'indiquait en titre que le thème était les opérations sur les racines carrées
- une opération non apparente dans les ouvrages a été rajoutée : la soustraction ; les manuels se situent en effet dans le registre algébrique, et la dénomination "somme" y renvoie à "somme algébrique" alors que Béatrice et Valérie se sont placées dans le registre arithmétique. L'ordre a été changé en respectant l'ordre traditionnel des opérations arithmétiques, addition, soustraction, multiplication et division; les noms arithmétiques des opérations sont ceux employés par Béatrice et Valérie.

Enfin, un dernier binôme a construit une cohérence originale en plaçant à la fois l'élévation au carré et les propriétés des racines dans son texte. Il s'agit de Danièle et Sandrine dont le cas a déjà été présenté en VIII.

Trois cohérences non prévues par les auteurs de manuels ont donc pu être tirées des extraits par les élèves : celle de l'élévation au carré (tirée du Du), celle de la simplification (tirée du DL), celle des opérations arithmétiques proche de celle des manuels. Si celle du DL a pu dominer et intégrer les autres, celle du Du n'apparaît qu'avec une autre dans des textes manquant alors de cohérence compte tenu de cette juxtaposition. La cohérence construite autour des opérations arithmétiques témoigne au contraire d'une maîtrise de l'ensemble des textes.

X. Quelques mots de conclusion

Les divers aspects analysés montrent la plus grande influence de manuels de présentation classique et les interprétations erronées que peuvent construire les élèves à partir d'un manuel de contrat inhabituel. Doit-on y voir une influence de l'enseignement reçu par les élèves au cours des neuf années de scolarité qu'ils avaient effectuées ? Ou la surcharge cognitive d'un texte non construit linéairement, exigeant des aller et retour et une coordination entre texte et cotexte (informations en marge, schémas) est elle trop grande ? On peut de toutes façons en tirer la conclusion que la lecture de textes mathématiques surtout de contrat inhabituel nécessite un apprentissage.

Un des manuels classiques a suscité une importante erreur de compréhension par les implicites et les ambiguïtés de sa rédaction. Il semble que sur ce point des améliorations locales peuvent être apportées qui facilitent l'interprétation des élèves.

La présentation expositive classique avec démonstration a été la plus retenue par les élèves mais les deux binômes qui ont su prendre une distance par rapport aux textes de base et fournir un texte cohérent n'ont pas donné de démonstration... L'attachement à une exposition classique serait-il entraîné par une trop grande complexité de la tâche ? La solution de rester près des textes classiques aurait été adoptée car nécessitant moins travail de construction. Il faut souligner que les élèves avaient déjà appris les racines carrées. On peut imaginer combien un texte permettant l'apprentissage d'une nouvelle notion uniquement par son intermédiaire doit être longuement réfléchi.

Références

BALACHEFF N., 1986, Le contrat et la coutume : deux registres de l'interaction didactique, in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Laborde C. (ed.), Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 15-26

COMBETTES B. & TOMASSONE R., 1988, *Le texte informatif, aspects linguistiques*. 140pp., Prisme, Problématiques 9, De Booeck Université, Editions Universitaires, Paris

DESCOTES M., 1989, *La lecture méthodique, de la construction du sens à la lecture méthodique*, 244pp., CRDP Toulouse

DUVAL R., 1986, Lecture et compréhension de textes, Polycopié, *IREM de Strasbourg*

DUVAL R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, n°3, pp. 233-62

GUILLERAULT M. & LABORDE C., 1986, A study of pupils reading geometry, an experimentation, in *Pragmatics and Education*, Lowenthal F. & Vandamme F. (eds), Plenum Press, Londres, New York, pp. 223-38

SPRENGER CHAROLLES L., 1982, Quand lire c'est comprendre, approche linguistique et psycho-linguistique de l'activité de lecture, *Pratiques*, n° 35, pp.7-25.

SPRENGER CHAROLLES L., 1988, La lecture et son apprentissage, *Langue française*, n°80

Manuels utilisés pour l'expérimentation

CORRIEU L., GOURION M., 1980, Mathématiques 3ème, Nathan

DELEDICQ A., MISSERAND C.et D., LASSAVE C. 1984, Faire des mathématiques, nouvelle collection, 3ème, Cedic Nathan

JEOMATRI, 1980, Mathématiques en 3ème, IREM de Grenoble, Ophrys

THUIZAT A., GIRAULT G., DIDI R., 1980, Math 3ème, nouvelle collection Durrande, Technique et Vulgarisation

5.2. PROPRIÉTÉS DES RACINES CARRÉES

$\boxed{1}$ Produit

Soit le produit $(\sqrt{7}\times\sqrt{13})$. Son carré $(\sqrt{7}\times\sqrt{13})^2$ s'écrit (puissance d'un produit de réels) :

$(\sqrt{7}\times\sqrt{13})^2=(\sqrt{7})^2\times(\sqrt{13})^2.$

$(\sqrt{7}\times\sqrt{13})^2=7\times 13.$

D'où : $\sqrt{7}\times\sqrt{13}=\sqrt{7\times 13}.$

De même, quels que soient a et b, réels positifs, le carré du produit $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$ s'écrit :

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2.$

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=a\times b.$

D'où : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}.$

On obtient ainsi, de proche en proche, le produit de plusieurs racines carrées de réels positifs :

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=\sqrt{abc}.$

Exemples :

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}.$

$\sqrt{12}\times\sqrt{21}=\sqrt{252}.$

$\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{245}.$

Problème réciproque : décomposer $\sqrt{ab}$ $(a\in\mathbb{R}^+,\quad b\in\mathbb{R}^+).$

Soit à calculer $\sqrt{484}$.

Vous pouvez écrire : $484=4\times 121.$

Donc : $\sqrt{4}\times\sqrt{121}=\sqrt{484}.$

Par suite : $\sqrt{484}=2\times 11.$ Soit : $\sqrt{484}=22.$

D'une façon générale :

> **La racine carrée d'un produit de réels positifs est égale au produit des racines carrées de ces réels :**
> $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b};\quad a\in\mathbb{R}^+,\quad b\in\mathbb{R}^+.$

Exemples :

- $\sqrt{55}=\sqrt{5}\times\sqrt{11}.$
- $\sqrt{63}=\sqrt{9}\times\sqrt{7};$ $\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$
- $\sqrt{39}=\sqrt{3}\times\sqrt{13}.$
- $\sqrt{176}=\sqrt{16}\times\sqrt{11};$ $\sqrt{176}=4\sqrt{11}.$

$\boxed{2}$ Quotient

Soit le quotient $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. Son carré $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2$ s'écrit :

$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{2})^2}.$ Soit : $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{7}{2}.$ D'où : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}.$

De même, quels que soient a et b, réels positifs, et $b\neq 0$:

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}.$

Exemples :

$\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\dfrac{15}{75}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}}.$ $\qquad \dfrac{\sqrt{700}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{700}{14}} = \sqrt{50}.$

Réciproquement, quels que soient a et b, réels positifs, et $b \neq 0$, on peut écrire $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

La racine carrée d'un quotient de réels strictement positifs est égale au quotient des racines carrées de ces réels :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad b \in \mathbb{R}^+, \qquad b \neq 0.$$

Exemples :

- $\sqrt{\dfrac{36}{49}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \dfrac{6}{7}.$
- $\sqrt{\dfrac{12}{75}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \dfrac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{25 \times 3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{5}.$

5.3. PROBLÈMES

1 Rendre rationnel le dénominateur d'un rapport

Lorsqu'on doit calculer une valeur approchée d'une expression comportant un radical au dénominateur, on a intérêt, pour faciliter le calcul, à transformer l'expression de façon que le dénominateur s'écrive sans radical.
On dit que l'on rend rationnel le dénominateur.
Cette transformation permet d'éviter la division par un nombre décimal représentant une valeur approchée du dénominateur.
Elle permet en outre de simplifier certains rapports.

- **Cas d'un radical isolé**

Il suffit alors de multiplier les deux termes du rapport par le facteur irrationnel figurant au dénominateur.

Exemples :

- $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 \times 2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3 \times 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.$
- $\dfrac{3}{4\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4 \times 7} = \dfrac{3\sqrt{7}}{28}.$
- $\dfrac{4 + \sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \dfrac{(4 + \sqrt{11})\sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \dfrac{11 + 4\sqrt{11}}{11}.$

- **Cas d'un radical associé par addition à un réel**

Soient a réel et b réel positif. Les réels $(a + \sqrt{b})$ et $(a - \sqrt{b})$ sont dits **conjugués.**
Leur produit est $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$, produit d'une somme de réels par leur différence :

$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b.$

Ce produit s'exprime sans radical.
On utilise cette propriété pour rendre rationnel le dénominateur d'un rapport, en multipliant les deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemples :

$\dfrac{2}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{2(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 2(\sqrt{2} + 1).$

$\dfrac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \dfrac{(a + \sqrt{b})(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \dfrac{(a + \sqrt{b})^2}{a^2 - b}.$ $\qquad (b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a^2 - b \neq 0).$

$\dfrac{3x}{x + \sqrt{5}} = \dfrac{3x(x - \sqrt{5})}{(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})} = \dfrac{3x(x - \sqrt{5})}{x^2 - 5}.$ $\qquad (x^2 - 5 \neq 0).$

4. Transformer des écritures contenant des radicaux

Lorsque tu effectues des calculs avec des radicaux, il faut te méfier des additions et des soustractions.
Par exemple : $\sqrt{5+4}$ n'a rien à voir avec $\sqrt{5}+\sqrt{4}$.

Remarque :
$2\sqrt{5}$ représente le nombre $2\times\sqrt{5}$.
Devant un radical, le signe de multiplication peut donc être sous-entendu comme dans une écriture avec des lettres.
Rappelle-toi : $2\times a$ s'écrit plus simplement $2a$.
De la même manière $a\times b$ s'écrit ab et :
$\sqrt{3}\sqrt{5}$ représente le nombre $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$.

Expérience 6.
Avec ta calculette, calcule une approximation de :
$\sqrt{5+4}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{4}$
$\sqrt{5-4}$ et $\sqrt{5}-\sqrt{4}$
$\sqrt{5\times 4}$ et $\sqrt{5}\times\sqrt{4}$
$\sqrt{\frac{5}{4}}$ et $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$
$2\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$ et $\sqrt{4\times 5}$.

PROPRIÉTÉS

Règles de calculs sur les radicaux

Si a et b sont deux réels positifs,

alors $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ **et, si** $b\neq 0$ **:** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Pour $n\in\mathbb{N}$ **:** $\sqrt{(a^n)}=(\sqrt{a})^n$.

$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}$
$=\sqrt{36}$
$=6$
$(1{,}732\times 3{,}464 \sim 5{,}999)$
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$
$\left(\frac{5{,}196}{1{,}732}=3\right)$.

Exemple :

- $\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$.
- $(\sqrt{2})^3=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\,\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.
- $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{2\cdot\sqrt{7}}{1\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{1}=2$.
- Certaines mises en facteur peuvent simplifier des écritures :

$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4}\,\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ (tu vois que le résultat n'a rien à voir avec $\sqrt{2+8}$).
$\sqrt{45}-\sqrt{80}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-\sqrt{5}$.

Expérience 7.
Tu sais que $\sqrt{289}=17$.
Peux-tu en déduire $\sqrt{28\,900}$?
Peux-tu en déduire $\sqrt{2{,}89}$?
Peux-tu en déduire $\sqrt{2\,890}$?
Peux-tu en déduire $\sqrt{28{,}9}$?
Calcule des approximations de $\sqrt{2\,890}$ **et** $\sqrt{28{,}9}$ **avec ta calculette.**

V – CALCUL SUR LES RADICAUX.

5.1 Racine carrée et multiplication.

Recopie et complète le tableau ci-contre.

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	ab	$\sqrt{ab}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4	9					
25	16					
1	36					
144	121					

As-tu démontré que la propriété suivante est vraie ?

Si a et b sont des réels positifs ou nuls

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Pourquoi ?

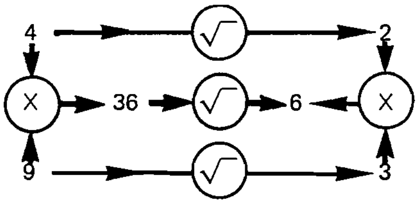
Nous allons démontrer cette propriété.

Soit a et b des nombres réels positifs ou nuls. Les nombres $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont positifs ou nuls ; pour les comparer il suffit de comparer leurs carrés.

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$ | $(\sqrt{ab})^2 = ab$

Puisque $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont deux nombres réels positifs ou nuls dont les carrés sont égaux, nous pouvons conclure.

Si a et b sont des réels positifs ou nuls,
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$



Remarque.

On pourrait démontrer de même que si a, b et c sont des réels positifs ou nuls, alors
$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}.$$

Exercice 1.

Donne une écriture sans radical des nombres suivants.

$\sqrt{1\,600}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{14}$; $\sqrt{2^3} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$

Exercice 2.

Considérons le nombre 150 ; on peut écrire que

$$150 = 25 \times 6,$$
$$\sqrt{150} = \sqrt{25} \times \sqrt{6},$$
$$\sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$$

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ *où a et b sont des naturels, les nombres suivants.*

$\sqrt{8}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{800}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{75}$.

Déduis-en une écriture plus simple de $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$.

Ecris sous une forme plus simple $\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{98}$ *et* $\sqrt{54} + \sqrt{294} - \sqrt{486}$.

5.2 Racine carrée et division.

Soit a un réel positif ou nul et b un réel positif.

Nous allons comparer les nombres $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Ces deux nombres sont positifs ou nuls ; nous allons donc comparer leurs carrés.

$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$ | $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$.

Concluons.

Si a est un réel positif ou nul et b un réel positif,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Exercice 1.

Donne d'autres écritures pour les nombres suivants.

$\sqrt{\dfrac{9}{4}}$; $\sqrt{0{,}75}$; $\sqrt{\dfrac{3}{27}}$; $\sqrt{\dfrac{4}{10}}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$; $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$; $\sqrt{\dfrac{81}{10\,000}}$; $\sqrt{\dfrac{100}{9}}$.

Exercice 2.

Soit a un réel positif.

Montre que $\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Exercice 3.

Considérons le nombre $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. On peut écrire que $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

On dit qu'on a «rendu entier le dénominateur du quotient $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$».

Rends entiers les dénominateurs des quotients suivants.

$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4.

Considérons le nombre $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$. On peut écrire que

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}.$$

Rends entiers les dénominateurs des quotients suivants.

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$; $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

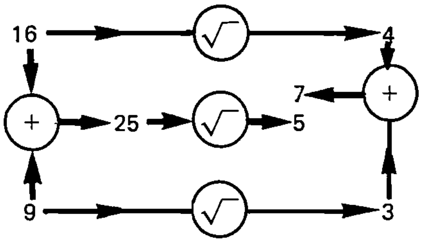
5.3 Racine carrée et addition.

Donne une écriture sans radical des nombres $\sqrt{16}$, $\sqrt{9}$ *et* $\sqrt{16+9}$.

Compare $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ *et* $\sqrt{16+9}$.

Penses-tu que la propriété suivante soit vraie ?

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, $\sqrt{a+b} = \sqrt{b}$.



et $5 \neq 7$.

3.4 Calculs sur les radicaux

a) Racine carrée d'un produit

Soit des réels positifs a et b. Comparons $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$. Ces nombres sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux :

$$(\sqrt{ab})^2 = ab$$

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$$

donc $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$,

par suite $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$.

Donc :

Quels que soient les réels positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Conséquences

- Soit a, b, c des réels positifs. On peut écrire :

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = (\sqrt{ab})\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

- Soit a un réel positif et n un entier naturel non nul :

$$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{a^n \times a^n} = \sqrt{a^n}\sqrt{a^n} = (\sqrt{a^n})^2 = a^n.$$

Donc :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{a^{2n}} = a^n$.

Cette égalité sera utilisée quand l'exposant de la puissance de a est *pair.*

Exemples

Calculer $A = \sqrt{5} \times \sqrt{245}$ et $B = \sqrt{254\,016}$.

- $A = \sqrt{5 \times 245} = \sqrt{5 \times (5 \times 49)}$
  $A = \sqrt{5^2 \times 7^2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{7^2}$
  $A = 5 \times 7 = 35.$

- La décomposition de 254016 en produit de facteurs premiers permet d'écrire :

$$B = \sqrt{2^6 \times 3^4 \times 7^2} = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504.$$

b) Racine carrée d'un quotient

Soit des réels positifs a et b ($b \neq 0$). Comparons $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Ces nombres sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux :

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

donc $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$,

par suite $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Donc :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple

Calculer $C = \sqrt{\dfrac{32 \times 0{,}2}{4{,}9}}$.

On peut écrire :

$$C = \sqrt{\frac{32 \times 2}{49}} = \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7}.$$

c) Sommes contenant des radicaux

Dans quel cas a-t-on $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$,

cet exemple nous montre, en prenant $a = 9$ et $b = 16$, que :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

- Cependant on peut quelquefois simplifier une somme de racines carrées en faisant une mise en facteur :

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} &= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}\\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\\ &= (2 + 3 - 5)\sqrt{3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Quotients contenant des radicaux aux dénominateurs

Il est souvent commode, lorsqu'on veut faire un calcul numérique ou des simplifications, de transformer les quotients de manière que les dénominateurs ne contiennent plus de radicaux. Donnons-en deux exemples :

1. Soit a un réel quelconque et b un réel positif non nul. On peut écrire :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Ainsi : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2. On remarque que, si b et c sont des réels positifs,

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = b - c,$$

$b - c$ ne contient plus de radicaux.

On verra au chapitre 4 des calculs d'encadrements contenant des radicaux.

De même, si b est un réel positif et c un réel quelconque,

$$(\sqrt{b} + c)(\sqrt{b} - c) = (\sqrt{b})^2 - c^2 = b - c^2,$$

$b - c^2$ ne contient plus de radicaux.

Par exemple (les dénominateurs étant supposés non nuls) :

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + c} = \frac{a(\sqrt{b} - c)}{(\sqrt{b} + c)(\sqrt{b} - c)} = \frac{a(\sqrt{b} - c)}{b - c^2}.$$