

# CONNAISSANCES D'ELEVES MALIENS A PROPOS DE LA RACINE CARREE

Alain BRONNER  
Ecole Normale Supérieure  
Bamako-MALI

## Présentation de l'article

Nous proposons ici un résumé d'une recherche sur les problèmes d'apprentissage et d'enseignement de la notion de *racine carrée dans  $\mathbb{R}$*  en milieu scolaire malien. La plupart des résultats doivent pouvoir se transposer dans d'autres contextes, en particulier dans l'enseignement français.

Plus précisément nous nous sommes intéressés à l'identification et la caractérisation des éléments suivants :

- les significations du concept de *racine carrée* chez l'élève et, en particulier, son comportement face à des problèmes mettant en jeu cette notion ;
- les difficultés et les obstacles de l'apprentissage et de l'enseignement de ce concept.

Compte tenu des liens privilégiés avec la notion de *nombre réel*, cette recherche concerne aussi l'apprentissage des nombres réels.

Après des études préalables au niveau épistémologique, didactique et cognitif, nous proposons une typologie de *modèles de connaissance* d'élèves à propos de la notion de "racine carrée". Cette typologie est mise à l'épreuve lors d'une expérimentation dans une classe. Nous terminerons par une conclusion sur ces connaissances ainsi que sur les difficultés et obstacles repérés.

## I. Le savoir mathématique "racine carrée"

Pour appréhender le concept de racine carrée dans  $\mathbb{R}$ , nous allons l'analyser sous différentes approches en essayant de délimiter le *champ conceptuel* qui lui est attaché (Vergnaud 1984).

### I.1. Problèmes où la notion est un outil de résolution pertinent

Nous classerons ces problèmes selon les cadres de référence. La liste ne pouvant être exhaustive, nous donnons pour chaque cadre un problème spécifique à partir duquel les autres problèmes peuvent se ramener. Bien entendu, on a en général des correspondances entre les problèmes de divers cadres.

**Cadre numérique** : Trouver les nombres  $b$  d'un système de nombres tels que  $b^2 = a$ ,  $a$  étant un nombre donné du système de nombres.

**Cadre algébrique** : Résoudre  $x^2 = a$ .

**Cadre des fonctions** : Recherche des antécédents de  $a$  par l'application  $x \mapsto x^2$ .

**Cadre géométrique** : Construire un carré d'aire donnée.

**Cadre graphique** : Détermination graphique des antécédents de  $a$  par l'application carrée.

## I.2. Propriétés et algorithmes rattachés à ce concept

Nous donnons essentiellement les propriétés que l'on peut attendre des programmes du secondaire. Nous les formulons dans le cadre numérique.

- \* Pour tout réel positif il existe un unique réel positif  $b$  tel que  $b^2 = a$  ;  $b$  est noté  $\sqrt{a}$ .
- Si  $a > 0$  il existe aussi un unique réel négatif  $c$  tel que  $c^2 = a$  et  $c = -\sqrt{a}$ .
- Si  $a < 0$  il n'existe pas de nombre réel  $b$  tel que  $b^2 = a$ .
- \*  $(\sqrt{a})^2 = a$  pour tout réel positif  $a$ .
- \*  $\sqrt{a^2} = |a|$  pour tout réel  $a$ .
- \*  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  pour tous réels  $a$  et  $b$  positifs.
- \*  $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$  pour  $a$  réel positif et  $b$  réel strictement positif.
- \*  $\sqrt{1/b} = 1/\sqrt{b}$  pour  $b$  réel strictement positif
- \* Toute conséquence découlant des propriétés fondamentales précédentes (racine carrée du produit de plusieurs nombres, racine carrée d'une puissance,....).
- \* Si  $a < b$  alors  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  pour tous réels  $a$  et  $b$  positifs.
- \* Propriétés sur la nature des nombres  $\sqrt{a}$ . En particulier si  $a$  n'est pas un carré parfait rationnel ( $a$  n'est pas élément de  $\mathbb{Q}^2$ ), la racine carrée de  $a$  n'est pas un nombre rationnel.
- \* Algorithme de l'extraction conduisant à des valeurs approchées décimales de la racine carrée de  $a$  ; en particulier lorsque  $a$  n'est pas un carré parfait rationnel (ce savoir-faire est en désuétude).

## I.3. Ensemble des représentations, signes, symboles, mots qui permettent de représenter le concept et ses propriétés

- \* "racine carrée positive" (ou "racine carrée" s'il n'y a pas d'ambiguïté) de  $a$  pour  $a$  réel positif : c'est une désignation dans la langue d'enseignement. Elle désigne l'unique nombre réel positif  $b$  tel que  $b^2 = a$ . On désigne aussi par "racine carrée" de  $a$  tout réel  $b$  (positif ou négatif) tel que  $b^2 = a$ .
- \* " $\sqrt{\quad}$ " est un symbole spécifique de la notion. On l'appelle "radical" dans la langue d'enseignement. " $\sqrt{a}$ " est une désignation en langage symbolique pour désigner la racine carrée positive de  $a$ .
- \* Les représentations graphiques des applications carrée et racine carrée.
- \* Tout tableau de nombres correspondant à l'opérateur "carré" ou "racine carrée".

#### I.4. Le champ conceptuel de la notion de racine carrée

Pour cette première exploration du concept de racine carrée, nous suivons G. Vergnaud (1984) qui montre qu'on ne peut étudier un concept ou une situation isolément, mais à l'intérieur de son champ conceptuel. Le concept de "racine carrée" prend sa signification dans un ensemble de situations et de nombreuses notions lui sont reliées. Nous les explicitons ci-dessous.

##### La notion de nombre réel

Dans ce champ conceptuel, le concept de nombre, et surtout celui de nombre réel, entretient des relations privilégiées avec celui de racine carrée. A plus de vingt siècles de notre époque, la célèbre "crise des rationnels" chez les mathématiciens et philosophes grecs nous interpelle pour montrer comment le concept de racine carrée fut un promoteur (caché à l'époque) de celui de nombre réel. En retour, l'édifice des réels étant construit, le concept de racine carrée prend toute sa signification et acquiert une stabilité dans cet ensemble.  **$\mathbb{R}$  est alors un des sur-corps  $K$  de l'ensemble des rationnels dans lequel tout élément positif admet une racine carrée dans  $K$ .**

Des concepts attachés à  $\mathbb{R}$  comme les opérations sur les nombres, l'ordre et la valeur absolue vont intervenir de façon importante dans ce champ conceptuel. Cette liaison nous paraît importante dans ces implications didactiques et cognitives, et nous y reviendrons plus longuement.

##### Notions de géométrie

On peut mettre en évidence des liens privilégiés avec certains concepts du cadre géométrique : carré, cercle, grandeurs (longueur, aire), distance, triangle rectangle (théorème de Pythagore et relations métriques), etc. En particulier le concept permet de mesurer de nouvelles grandeurs (diagonale d'un carré par exemple).

##### Equation du second degré

Nous avons vu aussi les relations étroites avec le concept d'équation, et surtout l'équation du second degré. D'une part la notion de racine carrée est définie comme solution d'une équation d'un type particulier du second degré, et réciproquement elle est un outil efficace pour la résolution de l'équation générale du second degré dans  $\mathbb{R}$ .

##### Notion de fonction réciproque

La notion de *fonction réciproque* est intervenue dans ce champ conceptuel et nous laisse apercevoir une difficulté pour l'apprentissage de ce concept. En effet, la racine carrée d'un réel positif  $a$  est l'antécédent de  $a$  par la fonction réciproque de la fonction carré sur  $\mathbb{R}_+$ . Cette définition ne fournit aucun algorithme général pour calculer la valeur (exacte) ; ici le nombre  $\sqrt{a}$  est seulement caractérisé selon des propriétés algébriques liées à la structure de corps de  $\mathbb{R}$ , contrairement à la plupart des opérateurs vus en début d'apprentissage. Cette absence de "vraie" fonction réciproque de la fonction racine carrée, explicitable à l'aide d'opérations connues de l'élève, est

une source de difficultés surtout au début de l'apprentissage sur cette notion où les savoirs sont surtout de type procédural.

### Notions d'analyse et de topologie sur l'ensemble des réels

La plupart des démonstrations du théorème fondamental de l'existence (admis en général dans l'enseignement secondaire) relèvent d'un changement de cadre. En général on se place dans le cadre des fonctions et de l'analyse en utilisant les outils suivants : fonction strictement croissante, fonction continue, limites de fonction, théorème sur les fonctions strictement monotones et continues sur un intervalle, ou propriété de la borne supérieure d'une partie majorée de  $\mathbb{R}$ . Ces outils ne sont pas disponibles pour des élèves du secondaire, en dehors des classes terminales où on ne se préoccupe plus de ce problème.

La complexité du champ conceptuel de ce concept laisse entrevoir de nombreuses difficultés quant à son enseignement et son apprentissage.

## II. Des conceptions historiques

Une consultation épistémologique nous a permis d'avoir des éléments sur les grandes formes sous lesquelles la notion de *racine carrée* et les *nombre*s sont apparus dans l'histoire des mathématiques.

La construction du concept de "racine carrée" est inscrite dans une problématique d'extension des divers systèmes de nombres (en abrégé SN) qui se sont présentés dans l'histoire. Ces extensions sont des réponses à des insuffisances au niveau de la résolution de certains problèmes :

- on n'a pas assez de nombres pour mesurer certaines grandeurs ;
- le système de nombres ne permet pas un calcul algébrique souple, simple et efficace ;
- certaines équations n'ont pas de racine dans le système de nombres.

Nous donnons maintenant une première typologie de conceptions "historiques" en relation avec la problématique précédente.

#### a. Conception *Carré Parfait* (CP)

Issu de la conception pythagoricienne du nombre, le nombre est essentiellement "entier", même s'il prend parfois des formes "décimale" ou "rationnelle". Le système de nombres est  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$ . La racine carrée d'un entier positif est à chercher dans  $\mathbb{N}$  et un nombre entier a une racine carrée si et seulement il est carré parfait (carré d'un entier). Le fonctionnement est analogue avec les décimaux et les rationnels lorsqu'ils sont intégrés au système de nombres.

C'est cette conception qui conduira à la "crise des irrationnels" chez les Grecs.

#### b. Conception *Formelle* (CF)

Pendant une longue période de l'histoire des mathématiques, dans le but de résoudre des équations, les mathématiciens vont développer des calculs formels sans se préoccuper de la validité des procédures ou du statut des expressions en jeu. Le système de nombres est toujours  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$ . Les écritures  $\sqrt{a}$  sont considérées comme des expressions formelles ou des artifices de calculs, que l'on manipule dans

des calculs algébriques ou des résolutions d'équations avec des règles formelles de transformations. Elles peuvent donner des racines formelles pour des équations du type " $x^2 = a$ ", mais les  $\sqrt{a}$ , avec  $a$  non carré parfait, n'ont pas un statut de nombre.

### c. Conception *Approximation* (CA)

Très tôt dans l'histoire les mathématiciens se sont occupés d'approximation numérique de certains nombres ou certaines grandeurs. Un grand nombre d'entre eux se sont attachés à calculer des valeurs approchées de racines carrées sans se préoccuper du statut de ces objets ou d'étudier si le résultat de certaines opérations étaient de nouveaux objets.

Les systèmes de nombres, utilisés ici, sont toujours  $SN = \mathbb{Z}, \mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$ . Le concept de racine carrée est essentiellement vu comme un opérateur (parfois multiforme) :  $\sqrt{\cdot} : (SN)_+ \rightarrow \mathbb{D}$ . Le résultat n'est pas un nouveau nombre, mais un résultat à chercher ou à calculer dans  $SN$  et en général dans  $\mathbb{D}$ .

La racine carrée d'un nombre n'est donc pas caractérisée, dans cette conception, par sa seule propriété algébrique fondamentale, mais plutôt par le résultat à un certain rang d'un procédé de calcul ou d'un algorithme. Cette conception est entretenue par des ambiguïtés entre un nombre et ses valeurs approchées.

### d. Conception *Nombre* (CN) et Conception *Nombre Unifié* (CNU)

Les  $\sqrt{a}$  avec  $a$  dans  $\mathbb{Q}_+$  commencent à avoir un statut de nombres. Ils servent à mesurer de nouvelles grandeurs, ils sont racines d'équations du second degré et les propriétés des opérations s'étendent à ces nombres.

On peut distinguer deux stades.

- conception CN : ces nombres ne sont pas intégrés au système de nombres en vigueur. On distingue les rationnels et les  $\sqrt{a}$ , avec  $a$  rationnel positif, non carré parfait,

- conception CNU : tous les nombres disponibles sont unifiés dans un système de nombres dans lequel on dispose de toutes les opérations. Celui-ci contient en particulier  $\mathbb{Q}$  et les  $\sqrt{a}$ .

### e. Conception *Nombre Réel* (CNR)

Cette conception se met en place parallèlement à une nouvelle conception sur les statuts des nombres en mathématique. Des constructions du corps des réels apparaissent et on dispose d'un système de nombres  $\mathbb{R}$  qui est un surcorps de  $\mathbb{Q}$ , caractérisé par des propriétés algébriques et topologiques et tel que tout nombre positif  $y$  possède une racine carrée.

## III. La racine carrée dans l'enseignement au Mali

La division institutionnelle des niveaux d'enseignement au Mali est comparable au système français. On distingue :

- l'enseignement fondamental avec deux cycles. Le premier cycle comprend six années, de la 1<sup>ère</sup> à la 6<sup>ème</sup>, qui correspondent à l'enseignement primaire français. Le deuxième cycle comprend trois années, de la 7<sup>ème</sup> à la 9<sup>ème</sup>, qui correspondent au premier cycle du secondaire en France.

- l'enseignement secondaire (de la 10<sup>ème</sup> à la 12<sup>ème</sup> année) correspond au deuxième cycle du secondaire en France.

L'acquisition des nombres et de notion de racine carrée n'échappe pas au projet d'enseignement des mathématiques au Mali. Ce projet suit un schéma assez classique dans son ensemble. On note cependant qu'une approche du concept de racine carrée est présentée en 8ème année.

Nous donnons dans le tableau 1 quelques éléments des programmes et les correspondances entre classes au Mali et en France.

Classe de 7ème (13 ans) (5ème française)	Divisibilité dans $\mathbb{N}$ Ensemble $\mathbb{D}_+$ , opérations
Classe de 8ème (14 ans) (4ème française)	Ensembles $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{D}$ , opérations <b>Racine carrée dans <math>\mathbb{D}</math></b> Introduction de $\mathbb{R}$
Classe de 9ème (15 ans) (3ème française)	Compléments sur $\mathbb{R}$ Ensemble $\mathbb{Q}$ , opérations <b>Racine carrée dans <math>\mathbb{R}</math></b>
Classe de 10ème (16 ans) (2nde française)	Reprise et compléments sur la racine carrée Equations du second degré

tableau 1

Afin d'analyser la transposition didactique du concept de racine carrée nous avons consulté les manuels officiels en vigueur à l'époque de notre étude (1989-90).

Dans le manuel de 8ème année, deux problèmes sont soulevés dans le but de mettre en évidence des insuffisances dans le système de nombres  $\mathbb{D}$  :

- le problème de l'**inverse d'un décimal dans  $\mathbb{D}$** ,
- et celui de la **racine carrée d'un décimal dans  $\mathbb{D}$** .

En particulier le manuel conclut que :

- 0,3 n'a pas d'inverse dans  $\mathbb{D}$ ,
- 3 n'a pas de racine carrée dans  $\mathbb{D}$ .

Le manuel suggère alors de considérer un ensemble  $\mathbb{R}$  contenant de nouveaux nombres pour répondre à ces deux problèmes. On peut remarquer que c'est le deuxième problème qui permet de distinguer  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$ .

Le manuel de 9ème année institutionnalise la propriété fondamentale de l'existence de la racine carrée : "Tout nombre réel positif admet une et une seule racine carrée (positive) dans  $\mathbb{R}$ ". L'enseignement du concept de racine carrée s'inscrit ainsi dans une problématique d'extention des divers systèmes de nombres. On retrouve dans ce projet d'enseignement le rapport dialectique perçu au niveau de la genèse du savoir mathématique entre les deux concepts de *nombre réel* et de *racine carrée*.

Compte tenu de la complexité des champs conceptuels de ces concepts, ils ne peuvent être réellement construits dans ces classes de 8ème et de 9ème. Le problème de l'existence de  $\mathbb{R}$  et des racines carrées n'est pas mis en débat ici. L'enseignement des deux concepts s'appuie sur l'un et sur l'autre pour donner plus de réalité à l'un comme à l'autre.

## IV. Les travaux existants sur les connaissances des élèves

### IV.1. En France

Teresa Assude (1988) a proposé à des élèves de 4ème et de 3ème en France des situations-problèmes afin, d'une part, de connaître les significations que ceux-ci donnent au symbole  $\sqrt{a}$  et les cadres dans lequel ils attribuent ces significations et, d'autre part, de repérer leurs conceptions au sujet des nombres représentés par des racines carrées.

Les objectifs poursuivis dans cette recherche sont assez proches des nôtres, mais la problématique pour caractériser les connaissances des élèves est différente. Cependant, cette étude confirme que des indices des premières conceptions apparues dans l'histoire des mathématiques, à propos des nombres et des racines carrées ressortent chez les élèves dans l'apprentissage des nombres dans le premier cycle de l'enseignement secondaire français.

### IV.2. Au Mali

Mohamed Sokona (1989) a réalisé des tests dans des classes de 9ème, 10ème et 11ème au Mali (élèves de 15 à 17 ans) sur la notion de racine carrée. Les objectifs étaient les suivants :

- \* déterminer les procédures et les propriétés utilisées par les élèves lors de résolution d'exercices à propos de la racine carrée ;
- \* préciser l'influence de certaines caractéristiques des exercices ;
- \* étudier l'évolution des réponses avec le niveau de la classe.

Nous donnons ici trois des exercices composant ces tests, sur lesquels nous allons appuyer notre analyse dans tout cet article.

**Exercice 1 : Dites si ces nombres existent oui ou non. Justifier votre réponse :**

$$\sqrt{16} ; \sqrt{13} ; \sqrt{7} ; \sqrt{-7} ; \sqrt{-9} ; \sqrt{16/9} ; \sqrt{13/4} ; \sqrt{13/3}$$

$$\sqrt{0,36} ; \sqrt{0,9} ; \sqrt{4,9} ; \sqrt{1,7}.$$

**Exercice 2 : Résoudre dans  $\mathbf{R}$**

$$a) \quad x^2 = 13 \quad ; \quad b) \quad x^2 = 9.$$

**Exercice 3 :**

- a) Existe-t-il un carré dont le périmètre est 18 cm ?
- b) Existe-t-il un carré d'aire 13 cm<sup>2</sup> ?

Ces exercices se situent dans trois cadres différents : les cadres numérique, algébrique et géométrique. Ils sont construits en jouant sur **trois variables** relatives au nombre figurant dans chacun des items :

- \* le type du nombre : carré parfait ou non (en fait lorsque le nombre a est négatif, le type du nombre s'applique à son opposé b qui est positif) ;
- \* le signe du nombre : positif ou négatif ;
- \* la nature du nombre : entier, décimal, rationnel.

### IV.3. Nouvelle analyse des résultats de M. Sokona

Nous allons reprendre l'analyse des résultats de cette expérimentation selon notre problématique. En particulier nous voulons comparer les connaissances des élèves mises en jeu dans les exercices précédents avec les conceptions issues de notre étude épistémologique.

#### IV.3.1. Ensemble de validité de l'expression $\sqrt{a}$

Cette analyse concerne l'exercice 1. Nous présentons dans le tableau 2 les différents types de réponses en les classant comme indices de certaines conceptions.

Réponses	SN	9ème	10ème	11ème	Indices de conceptions
<b>B U (-B)</b>	<b>D</b>	15 %			<b>CP-N</b>
<b>C U (-C)</b>	<b>Q</b>	85 %	10 %		
<b>C</b>	<b>Q</b>		25 %	5 %	<b>CP</b>
<b>N U D<sub>+</sub> U Q<sub>+</sub></b> ou <b>E</b>	<b>Q</b> <b>R</b>		60 %	95 %	<b>CN</b> <b>CNU</b> <b>CNR</b>

tableau 2

Nous avons introduit les notations suivantes :

**C** = **CN U CD U CQ** où l'on désigne par :

**CN** l'ensemble des entiers carrés parfaits pour l'élève,

**CD** l'ensemble des décimaux carrés parfaits pour l'élève,

**CQ** l'ensemble des nombres rationnels carrés parfaits pour l'élève,

**(-C)** l'ensemble des opposés des éléments de **C**.

**B** = **CN U CD** et **(-B)** l'ensemble des opposés des éléments de **B**.

**E** est un ensemble contenant  $Q_+$  et les  $\sqrt{a}$  avec  $a$  dans  $Q_+$ .

#### 1. Comportements par rapport aux deux variables *signe du nombre* et *nature du nombre*

La plupart des élèves des classes de 10ème (classe de Seconde en France) et de 11ème (classe de Première en France) rejettent les nombres négatifs pour le problème de la validité de l'expression  $\sqrt{a}$ . De plus leurs réponses semblent indépendantes de la nature du nombre (entier, décimal ou rationnel).

Par contre il n'en est pas de même en 9ème où tous les élèves acceptent des nombres négatifs dans le domaine de validité et pour certains élèves la "nature du nombre" joue un rôle dans le fonctionnement de cet exercice. Par exemple des élèves de 9ème rejettent systématiquement tous les nombres en écriture fractionnaire proposés dans cet exercice.



## 2. Comportements par rapport à la variable *type du nombre*

Trois comportements se manifestent ici en rapport avec cette variable. Nous les décrivons en termes d'indices de conceptions des élèves, telles que celles-ci sont définies en II.

### a. Indice de conceptions CN, CNU, ou CNR

Pratiquement tous les élèves des classes de 11ème et un groupe important (60% environ) d'élèves des classes de 10ème fonctionnent correctement sur cet exercice, au moins du point de vue des réponses. Ils acceptent tous les nombres positifs qu'ils soient entiers (16, 13, 7), décimaux (0,36, 0,9, 4,9, 1,7) ou rationnels (16/9, 13/4, 13/3). La variable *type du nombre* n'intervient pas dans les réponses. Ces élèves semblent bien utiliser le théorème-en acte : "un nombre admet une racine carrée si et seulement si ce nombre est positif". L'ensemble de validité attribué à ce théorème contient  $\mathbb{N} \cup \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+$ .

Nous ne savons pas où en sont ces élèves dans la conceptualisation des nombres réels. Ceux-ci acceptent-ils vraiment les racines carrées comme de nouveaux nombres? Le système de nombres implicitement utilisé ici est-il  $\mathbb{Q}$  ou un sur-ensemble de  $\mathbb{Q}$  contenant les racines carrées de rationnels positifs? Les élèves sont-ils proches d'une conception *nombre réel* (CNR)? Pour répondre à ces questions, il nous faudrait connaître le fonctionnement de l'élève dans d'autres situations. C'est pour cela que, dans ce paragraphe, nous parlons en termes d'*indices* de conception.

### b. Indice de conception CP

Un quart des élèves de 10ème présentent des indices de comportement liés à la conception CP. D'une part ils rejettent les racines carrées des nombres négatifs. D'autre part, ils semblent répondre affirmativement lorsque le radicande entier est carré parfait ( $\sqrt{16}$ ) et rejettent  $\sqrt{13}$  et  $\sqrt{7}$ . Ce phénomène est confirmé par les réponses données pour des nombres de "nature" différente : la racine carrée de 16/9 existe alors qu'elle n'existe pas pour 13/4 et 13/3. De même l'existence de la racine carrée de 0,36 est acceptée par une grande majorité d'élèves. L'existence de la racine carrée de certains des nombres (0,9), (1,7), (4,9) est rejetée, mais pas toujours les trois à la fois. Cette hétérogénéité des résultats lorsque le nombre est décimal semble provenir des connaissances des élèves à propos des décimaux. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

En conclusion, que le nombre soit entier, décimal ou rationnel, ces élèves de 10ème semblent utiliser la règle : "un nombre entier (respectivement décimal, fractionnaire) a une racine carrée si et seulement si ce nombre est un carré parfait entier (respectivement décimal, fractionnaire)".

Ainsi 25% des élèves de 10ème attribuent à la racine carrée un domaine de validité égal à  $C = \text{CN} \cup \text{CD} \cup \text{CQ}$ . Compte tenu des inclusions entre les divers systèmes de nombres on a en fait  $C = \text{CQ}$ , mais nous pensons que ces inclusions ne sont pas nettement perçues par les élèves; pour cela, nous laisserons l'écriture de C sous forme de réunion qui traduit mieux le fonctionnement des élèves.

Ces comportements sont proches de la conception pythagoricienne **CP** associée au système de nombres  $\mathbb{Q}$ .

La majorité des élèves considèrent que l'ensemble des entiers carrés parfaits est  $CN = \mathbb{N}^2$  (ensemble des carrés d'entiers) et que l'ensemble des rationnels carrés parfaits est  $CQ = \mathbb{Q}^2$  (ensemble des carrés de rationnels) à cause de la règle simple  $(a/b)^2 = a^2 / b^2$ . Cependant il n'en est pas de même avec les décimaux où **CD** dépend de la conception de l'élève sur les décimaux : "décimal = couple d'entier" ou "décimal = entier à virgule". **CD** est alors égal :

- soit à **CD<sub>1</sub>** ensemble des décimaux (e,d) où la partie entière e et la partie décimale d sont des entiers carrés parfaits;

- soit à **CD<sub>2</sub>** ensemble des décimaux qui considérés comme des entiers (sans la virgule) sont des carrés parfaits.

Cependant, certains élèves fonctionnent correctement avec  $CD = \mathbb{D}^2$  puisqu'ils n'acceptent que 0,36 comme décimal dans le domaine de validité.

### c. Indice de conception CP-N

Chez tous les élèves de 9ème et 10% d'élèves de 10ème, un autre comportement non décelé dans notre étude épistémologique se manifeste en rapport à la notion de "carré parfait". La majorité de ces élèves de 9ème acceptent comme nombres ayant une racine carrée :

- \* les entiers positifs qui sont carrés parfaits (100%)

- \* les rationnels positifs, représentés par une écriture fractionnaire, qui sont carrés parfaits d'un rationnel (86%)

- \* les décimaux positifs que les élèves considèrent comme carrés parfaits d'un décimal;

mais ils acceptent aussi les **opposés des entiers carrés parfaits**.

Nous faisons l'hypothèse qu'il en serait de même pour les opposés des autres nombres cités ci-dessus. Cette majorité d'élèves de 9ème fonctionnent en prenant un ensemble de validité égal à  $C \cup (-C)$ .

Un groupe minoritaire en 9ème (14%) rejette systématiquement les racines carrées des nombres rationnels, alors qu'aucun élève ne le fait pour les entiers ou les décimaux. Ces élèves rejettent peut être d'une façon générale les rationnels écrits en écriture fractionnaire et travaillent avec un système de nombres égal à  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{D}$ . Ils attribuent alors un ensemble de validité égal à  $B \cup (-B)$ . Ces élèves de 9ème ont un fonctionnement de type **CP** sur le domaine des nombres positifs, mais nous avons une différence à cause de l'acceptation de nombres négatifs dans le domaine de validité. Le système de nombres sur lequel ils fonctionnent implicitement est  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$  selon leur comportement par rapport à la variable "nature du nombre".

Nous notons **CP-N** une conception produisant ce comportement à cet exercice et que nous caractériserons plus loin. On pourrait dire qu'elle dérive formellement de **CP** en prenant aussi des négatifs dans l'ensemble de validité.

### IV.3.2. Solutions de " $x = a$ " et existence du carré d'aire $13 \text{ cm}^2$

Cette analyse concerne les exercices 2 et 3. Trois comportements se manifestent en relation avec les conceptions repérées dans notre étude épistémologique. Nous les avons regroupés dans le tableau 3.

	9ème	10ème	11ème	Indices de conceptions
Pas de solution de " $x^2=6$ " Pas de carré d'aire $13 \text{ cm}^2$	75 %			CP
$\sqrt{6}$ solution de " $x^2=6$ " Pas de carré d'aire $13 \text{ cm}^2$	25 %	65 %	40 %	CF
$\sqrt{9}, \sqrt{6}, \sqrt{13}$ donnent des solutions d'équation " $x^2=a$ " et de la longueur d'un côté d'aire $a \text{ cm}^2$		35 %	45 %	CN CNU CNR

tableau 3

#### a. Indice de conception CP

Un premier comportement, majoritaire en 9ème, semble correspondre à une conception de type CP. Cela va conduire à rejeter l'existence de carré d'aire  $13 \text{ cm}^2$  et l'existence de solutions à l'équation  $x^2 = 6$  s'écrivant avec des racines carrées.

Pour la résolution de l'équation, M. Sokona signale que quelques élèves se rabattent parfois sur des procédures de division par deux. Les nombres  $\sqrt{a}$ , avec  $a$  non carré parfait, sont toujours rejetés.

#### b. Indice de conception CF

Des élèves acceptent les écritures  $\sqrt{a}$  comme expressions formelles utilisées dans des manipulations algébriques et les équations. Ces écritures peuvent donner des nombres lorsque  $a$  est carré parfait. Par contre les  $\sqrt{a}$  avec  $a$  non carré parfait ne sont pas acceptés comme nombre et en particulier on les rejette comme mesures de longueur. Nous avons ici affaire à un comportement de type CF. Ce comportement est majoritaire en 10ème (65 %) et apparaît encore avec une fréquence importante en 11ème (40 %).

#### c. Indice de conception CN, CNU, CNR

Beaucoup d'élèves (35 % en 10ème et 45 % en 11ème) font intervenir des nombres tels que  $\sqrt{9}, \sqrt{6}, \sqrt{13}$  comme solutions d'équations ou de mesures de longueur. Ils semblent présenter des indices du type "conception nombre", ou "conception nombre unifié", voire "conception nombre réel". Cependant il est difficile à ce niveau de distinguer entre ces types de conceptions. Notre hypothèse est que la conception CNR ne serait pas atteinte dans ces classes.

### IV.3.3. Bilan

S'il est normal d'attendre de meilleurs résultats dans les classes de 10ème et 11ème, on est cependant surpris de l'importante rupture entre les résultats des élèves

de l'école fondamentale et ceux des classes des lycées. Cette rupture correspond aussi à une rupture institutionnelle entre l'enseignement fondamental et l'enseignement secondaire où une première sélection se réalise.

Signalons de plus que l'expérimentation dans les classes de 10<sup>ème</sup> et de 11<sup>ème</sup> a été effectuée dans un lycée "fleurion" de Bamako (le lycée Askia) ; ceci peut renforcer cette rupture dans les résultats. L'évolution des résultats est ensuite beaucoup moins importante de la classe de 10<sup>ème</sup> à celle de 11<sup>ème</sup>.

Une autre hypothèse sur cette rupture est peut être liée à la mise en place chez les élèves de conceptions de type CP ou CP-N en début d'apprentissage. Elles semblent se maintenir encore en 10<sup>ème</sup> pour certains élèves. Ces conceptions correspondent à l'obstacle des "irrationnels" auquel se sont heurtés les grecs avec la conception pythagoricienne du nombre. Elles peuvent constituer un *obstacle* à une évolution vers des conceptions plus satisfaisantes sur les *nombre*s et la *racine carrée*.

La maturation sur cette notion semble s'effectuer tard dans la scolarité en particulier lorsque l'élève a fait suffisamment fonctionner le concept dans différentes situations. Nous terminons ici en soulevant une question importante dans ces implications didactiques : les conceptions de type CP sont-elles des passages obligés de la connaissance, sont-elles constitutives du concept ou créées par l'enseignement reçu et par une certaine présentation de la notion en classe ?

## V. Une typologie de modèles de connaissances d'élèves

Nous allons maintenant donner nos premières hypothèses sur les modèles de connaissances d'élèves à propos du concept de racine carrée en nous basant sur les diverses études précédentes. Nous décrirons d'abord le fonctionnement de chaque modèle par quelques commentaires, en particulier en indiquant le système de nombres et une signification du concept associés à ce modèle. Nous précisons ensuite la caractérisation du modèle en mettant en corrélation les réponses aux différentes situations dans les cadres numérique, algébrique et géométrique. Nous terminons par un tableau de synthèse reliant modèles et comportements aux trois exercices.

Pour nous, une signification du concept peut être synthétisée par une propriété caractéristique. Prenons pour exemple la propriété suivante : *Pour tout réel positif a il existe un unique réel positif b tel que  $b^2 = a$ , b s'appelle la racine carrée de a. Si a est un réel négatif, a n'a pas de racine carrée dans  $\mathbb{R}$ .* Dans cette caractérisation, il y a quatre aspects :

- l'aspect opératoire :  $\sqrt{a}$  est un réel b tel que  $b^2 = a$ ,
- le domaine de validité : a est un réel positif,
- la condition :  $\sqrt{a}$  est un réel positif,
- l'unicité :  $\sqrt{a}$  est unique (avec les conditions précédentes).

### V.1. Les modèles de connaissances d'élèves

Ces modèles sont des constructions du chercheur pour répondre à ce besoin de description et d'interprétation des observations, en liaison avec les significations des connaissances en jeu chez les élèves. Le terme "modèle" constitue un intermédiaire entre la connaissance de l'élève et le concept mathématique. C'est une approche de

l'état des connaissances de l'élève qui permettra de décrire et d'expliquer celles qu'il met en oeuvre et de prévoir ses comportements dans certaines situations.

### V.1.1. Le modèle Carré Parfait (CP)

Dans ce modèle, seuls sont acceptés comme nombres les entiers et éventuellement les décimaux et les rationnels. Le système de nombres SN associé à cette conception est ainsi une partie de  $\mathbb{Q}$  comprenant au moins  $\mathbb{N}$  ; le plus souvent  $SN = \mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$ . L'aspect opératoire du concept est en général maîtrisé : "la racine carrée de  $a$  est le nombre qui multiplié par lui même donne  $a$ ".

La condition dans ce modèle peut s'énoncer ainsi :  $\sqrt{a}$  est un nombre positif de SN. L'ensemble de validité est l'ensemble des carrés parfaits C ou B avec

$$C = CN \cup CD \cup CQ \text{ et } B = CN \cup CD.$$

En général  $CN = \mathbb{N}^2$  et  $CQ = \mathbb{Q}^2$ , mais CD n'est pas toujours égal à  $\mathbb{D}^2$  à cause des conceptions sur les nombres décimaux. Les élèves ont des difficultés à donner un sens aux  $\sqrt{a}$  lorsque  $a$  n'est pas carré parfait et à les considérer comme des nouveaux nombres. Il y a une résistance à sortir du système de nombres SN. La racine carrée apparaît comme une application

$$\sqrt{\quad} : C \text{ ----> } SN$$

de l'ensemble des carrés parfaits à valeurs dans le système de nombres.

Dans ce modèle, on a le théorème : *Pour  $a \in SN$ ,  $\sqrt{a}$  existe si et seulement si  $a$  est carré parfait.* La recherche de la racine carrée de  $a$ , se fait dans l'ensemble d'appartenance de  $a$  (stabilité dans chaque système de nombres), ainsi :

- si  $a$  est entier,  $\sqrt{a}$  est à chercher dans  $\mathbb{N}$ ;
- si  $a$  est décimal,  $\sqrt{a}$  est à chercher dans  $\mathbb{D}$ ;
- si  $a$  est rationnel,  $\sqrt{a}$  est à chercher dans  $\mathbb{Q}$ .

Cette procédure est renforcée par le fait quelle est valide pour la fonction carrée : si  $a$  est entier (respectivement décimal, rationnel)  $a^2$  est entier (respectivement décimal, rationnel). Elle est fautive quand on passe à la réciproque, sauf si on se restreint aux carrés parfaits.

**La règle la plus stable associée à cette conception est la suivante :**

$\sqrt{a^2} = a$  si  $a$  appartient à  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{D}_+$ , ou  $\mathbb{Q}_+$  et plus spécifiquement  $\sqrt{(p/q)^2} = p/q$  pour  $p$  et  $q$  entiers. Associée à la conception "décimal = couple d'entiers", cette règle peut s'écrire  $\sqrt{e^2, d^2} = e, d$  ; elle découle de celle sur le carré :  $(e, d)^2 = e^2, d^2$ .

On a aussi les règles sur les opérations, pour  $a$  et  $b$  dans le système de nombres SN et carrés parfaits :  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  ;  $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$ .

**Le fonctionnement de ce modèle** dans les trois exercices choisis est clair : il est régi par la notion de carré parfait. On peut formuler les règles mises en oeuvre dans chacun des exercices.

Ex 1 :  $\sqrt{a}$  existe si et seulement si  $a$  est un carré parfait du système de nombres. On rejette les racines carrées des nombres négatifs.

Ex 2 : l'équation  $x^2 = a$  admet des solutions que pour  $a$  carré parfait. Lorsque  $a$  est carré parfait, on n'envisage en général que la solution positive.

Ex 3 : le carré d'aire  $a$  n'existe que pour  $a$  carré parfait.

Quel est alors le statut des réponses lorsque  $a$  n'est pas carré parfait ? Si l'on se place du point de vue du savoir mathématique, les réponses aux trois exercices révèlent des erreurs. Cependant, du point de vue de la conception de l'élève, ces réponses sont cohérentes. C'est en fait du point de vue des attentes du programme basé sur le savoir mathématique que la conception est insuffisante.

Ce modèle semble très stable et très répandu chez les élèves de 9ème et 10ème comme nous l'avons observé dans les résultats des expérimentations de M. Sokona. De même, dans les travaux de T.Assude concernant le premier cycle français, les exemples donnés par les élèves cités sur les racines carrées de nombres sont presque toujours des carrés parfaits.

### V.1.2. Modèle Carré parfait et Négatifs (CP-N)

Cette conception n'a pu être décelée dans notre analyse épistémologique et nous ne savons pas si elle est apparue dans le développement historique du concept. Nous l'avons repérée dans les résultats d'élèves de 9ème. Elle fonctionne de façon analogue au modèle CP sur les nombres positifs, avec la différence qu'on accepte les  $\sqrt{-a}$  lorsque  $a$  est carré parfait. Nous avançons deux hypothèses sur l'existence de ce modèle :

- la règle sur le carré  $(-a)^2 = a^2$
- dans le manuel de 9ème en vigueur, on institutionnalise au début de la leçon sur la racine carrée le fait que les "racines carrées" de  $a$  sont :  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$  ; il pourrait y avoir une permutation des deux symboles.

Dans le fonctionnement de ce modèle, il nous faut rajouter des règles qui permettent de se raccrocher au cas des positifs. Ici encore nous voyons deux possibilités en relation avec les deux raisons invoquées :

$\sqrt{-a} = \sqrt{a}$  pour  $a$  élément de  $C$  ou  $\sqrt{-b^2} = b$  ( $b$  nombre positif de SN). Comme  $-a$  et  $a$  ont même carré il pourrait en être de même pour l'opération réciproque,

$\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$  pour  $a$  élément de  $C$  ou  $\sqrt{-b^2} = -b$  ( $b$  nombre positif de SN)

L'application racine carrée  $a$  alors pour ensemble de définition  $C \cup -C$  (ou  $B \cup -B$ ) :  $\sqrt{\phantom{x}} : C \cup -C \rightarrow \mathbb{Q}$

Une différence de traitement de l'équation " $x^2 = a$ ", pour  $a$  négatif et  $a = -b^2$  avec  $b$  positif, apparaît ici : une solution est donnée sous l'une des deux formes  $x = b$  ou  $x = -b$ .

### V.1.3. Modèle Conception Formelle (CF)

Dans ce modèle, le système de nombres SN est toujours  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$  et seuls les entiers, les décimaux et les rationnels ont le statut de nombres. Les racines carrées  $\sqrt{a}$  sont considérées comme des expressions formelles, images des nombres du système de nombres, sur lesquelles on agit en transportant les propriétés sur les nombres par homomorphismes. Elles peuvent être considérées comme des artifices de calcul dans des transformations algébriques. La fonction racine carrée est ainsi vue comme une fonction :  $\sqrt{\phantom{x}} : SN \rightarrow EF$ ,  $EF$  désigne cet ensemble des écritures formelles  $\sqrt{a}$ ,  $a$  variant dans SN.

Ces expressions formelles peuvent éventuellement "être calculées" et donner un nombre de SN lorsque  $a$  est carré parfait ( $a$  élément de  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{C}$ ) à l'aide de la règle de transformation  $\sqrt{a^2} = a$ . Mais les  $\sqrt{a}$  sont rejetés comme nombres lorsque  $a$  n'est pas un carré parfait et gardent seulement un statut formel. Il n'y a pas unification avec les autres nombres de SN. L'élève fonctionne sur cet ensemble EF par "analogie" avec  $(\mathbf{SN}, <, +, \times)$ .

On retrouve en fait des **règles de transformation** des écritures formelles utilisées dans les calculs algébriques et les résolutions d'équations ; en particulier

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \sqrt{(a/b)} = \sqrt{a} / \sqrt{b} ; (\sqrt{a})^2 = a.$$

Sur les carrés parfaits on peut retrouver les règles spécifiques vues dans la conception CP.

Le **fonctionnement dans les trois exercices** choisis est régi par la notion de carré parfait et par les règles formelles. Nous les décrivons ainsi :

Ex 1 :  $\sqrt{a}$  existe si et seulement si  $a$  est un carré parfait du système de nombres. Le domaine de validité peut être  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{C}$  selon le système de nombres.

Ex 2 : l'équation  $x^2 = a$ ,  $a$  dans SN, admet comme solution l'expression formelle  $\sqrt{a}$  même pour  $a$  non carré parfait. On n'envisage en général que la solution positive.

Ex 3 : le carré d'aire  $a$  n'existe que pour  $a$  carré parfait.  $a$  n'est pas accepté comme mesure lorsque  $a$  n'est pas carré parfait.

Nous envisageons une conception de ce type où l'on accepte les racines carrées de nombres négatifs et que l'on notera "CF-N" avec un domaine de validité égal à  $\mathbf{B} \cup -\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{C} \cup -\mathbf{C}$ .

#### V.1.4. Le modèle Approximation CA

Le système de nombres est encore  $\mathbf{SN} = \mathbb{D}$  ou  $\mathbb{Q}$ . La racine carrée est essentiellement vue comme un opérateur ou une application

$$\sqrt{\phantom{x}} : \mathbb{D}_+ \text{ (ou } \mathbb{Q}_+) \text{ ----> } \mathbb{D}_+.$$

A un nombre positif du système de nombres SN on associe un autre nombre de SN, en général décimal. On ne sort pas du système de nombres. Le résultat est à chercher dans SN. Lorsque  $a$  est carré parfait, on utilise la règle  $\sqrt{a^2} = a$ .

Quand  $a$  n'est pas carré parfait il y a **confusion entre  $a$  et ses valeurs approchées décimales**, et le résultat est l'une de ces valeurs approchées obtenue par divers procédés (machine, algorithme d'extraction, table).

$\sqrt{a}$  n'est plus entièrement caractérisée par sa propriété opératoire algébrique  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

Regardons le **fonctionnement de ce modèle** dans les trois exercices.

Ex 1 : Le domaine de validité devrait être  $\mathbb{D}_+$  ou  $\mathbb{Q}_+$ . Mais on pourrait rejeter certains nombres  $\sqrt{a}$  ( $a$  non carré parfait) parce qu'ils n'ont pas de "valeur exacte" (sous entendue décimale). Ainsi le domaine de validité peut être réduit à  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire à des carrés parfaits.

Lorsque  $a$  n'est pas carré parfait les solutions sont données par des valeurs approchées de  $\sqrt{a}$  (et éventuellement les valeurs négatives opposées). Par exemple on donnera comme solution positive de  $x^2 = 2$  :

$$x = \sqrt{a} = 1,4 \text{ ou } x = -\sqrt{a} = -1,414.$$

Ex 3 : La recherche de la mesure du coté d'un carré d'aire donnée sera traité comme à l'exercice 2 en donnant des solutions avec des valeurs approchées lorsque  $a$  n'est pas carré parfait. Lorsque les racines carrées de nombres négatifs sont acceptées, on notera CA-N la conception associée.

### V.1.5. Les conceptions CN, CNU, et CNR

Les racines carrées des nombres rationnels positifs sont considérées comme des nombres en ce sens qu'ils servent à mesurer certaines grandeurs, à faire des calculs algébriques et à résoudre certaines équations. Dans cette conception on dispose des nombres ordinaires (entiers, décimaux, ou rationnels) et des  $\sqrt{a}$  avec  $a$  rationnel positif. Il y a extension de l'espace numérique de l'élève.

Les racines carrées  $\sqrt{a}$  ont des propriétés opératoires : on peut les comparer, les ajouter, les multiplier. Les aspects "opérateur" et "condition" de la signification du concept de racine carrée sont maîtrisés.

Les règles sont les propriétés algébriques et d'ordre des racines carrées. Dans les exercices 2 et 3, elles conduisent à des réponses correctes. Dans l'exercice 2, la solution positive est bien donnée sous forme d'une racine carrée  $\sqrt{a}$  (pour  $a$  positif) et en particulier lorsque  $a$  n'est pas carré parfait. Les solutions négatives peuvent être envisagées, mais pas nécessairement.

Dans la conception CN, le système de nombres est un ensemble contenant au moins les rationnels et les racines carrées de rationnels positifs. Il peut y avoir plusieurs niveaux en partant du cas où SN est réduit aux nombres cités, jusqu'au cas où il est égal à l'ensemble des réels  $\mathbf{R}$ . Mathématiquement il y a de nombreux intermédiaires; par exemple on peut ou non accepter des monstres comme

$$\sqrt{\sqrt{2} + 1} \text{ ou } \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

Les situations retenues ne nous permettent pas actuellement de différencier ces différents niveaux. Le domaine de validité de l'opérateur "racine carrée" est donc  $\mathbf{Q}_+$  ou un ensemble  $\mathbf{E}$  comme défini plus haut.

Malgré l'extension de l'espace numérique il reste à intégrer tous ces nombres dans un système de nombres ; on parlera alors de "Conception Nombre Unifié" CNU. On ne peut différencier cette conception de la précédente avec les problèmes considérés ; il faudrait pour cela envisager d'autres situations. L'homogénéité des nombres semble plus difficile à obtenir qu'avec les relatifs et les rationnels.

Bien que les connaissances des élèves ne suivent pas nécessairement le développement historique, puisque les systèmes et contraintes ne sont plus les mêmes, on peut s'attendre à des résistances à une conception CNU. Un élève, à un certain niveau, aura sûrement des hésitations avant d'écrire de lui même  $\sqrt{3} + 1$ .

Quant à la conception Nombre Réel CNR, on sait la restructuration complexe qu'il faut atteindre.



Nous donnons dans le tableau 4 une synthèse des conceptions et réponses aux trois exercices étudiés.

Conceptions	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3
CP-N	B U -B ou C U -C	Pas de solution de l'équation " $x^2 = a$ "	Pas de carré d'aire a
CP	C ou B	avec a non carré parfait *	avec a non carré parfait
CF-N	B U -B ou C U -C	$\sqrt{a}$ solution de l'équation " $x^2 = a$ "	Pas de carré d'aire a
CF	C ou B	avec a non carré parfait	avec a non carré parfait
CA	C ou B $\mathbb{D}_+$ $\mathbb{Q}_+$	Solutions données sous forme de valeurs approchées	Solutions données sous forme de valeurs approchées
CN CNU CNR	$\mathbb{Q}_+$  E	$\sqrt{a}$ solution de l'équation " $x^2 = a$ " avec a positif	Existence d'un carré d'aire a avec a positif La longueur d'un côté est $\sqrt{a}$

tableau 4

\*A propos de la conception CP-N et de l'exercice 2, nous envisageons pour la résolution de l'équation  $x^2 = a$  où  $a = -b^2$  (avec b positif) que l'élève puisse donner des solutions avec deux possibilités : soit  $x = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} = b$ , soit  $x = \sqrt{-b^2} = -\sqrt{b^2} = -b$ .

## V.2. Essai d'une hiérarchisation des conceptions

Cette hiérarchisation est présentée à l'aide d'un schéma en annexe. Cet ordre sur les conceptions n'est pas total. Pour un élève, nous pensons que divers cheminements sont possibles, et que les points d'entrée se situent dans les conceptions les plus élémentaires, mais pas nécessairement sur une conception de plus bas niveau. De plus la progression ne s'effectue peut être pas toujours dans le même sens et il peut y avoir des régressions.

D'autre part nous pensons aussi que des "ponts" (en pointillé sur le schéma) peuvent exister entre certaines conceptions, les élèves pouvant mobiliser des conceptions différentes selon les situations. Par exemple un élève peut privilégier une "conception formelle" dans des exercices de transformation d'écriture avec radicaux ou de résolution d'équation et mobiliser une "conception approximation" dans des problèmes de calculs de grandeurs comme la recherche du côté d'un carré d'aire donnée.

## VI. Une nouvelle expérimentation

### VI.1. Présentation et objectifs

Nous souhaitons préciser le fonctionnement du concept de racine carrée chez les élèves, en particulier dans les problèmes de validité de l'expression  $\sqrt{a}$ , de la résolution d'équations " $x^2 = a$ " et de recherche de carré d'aire donnée. Il s'agit d'autre part de mettre à l'épreuve la typologie proposée et éventuellement de l'affiner.

Nous avons réalisé ainsi une nouvelle expérimentation pour compléter cette étude. Nous avons tenu compte de l'importante rupture dans les résultats des élèves de la 9ème à la 10ème due peut-être au choix du lycée Askia où la sélection est importante. Ainsi nous avons choisi de faire passer le test dans une classe d'un autre établissement, l'E.C.I.C.A. Il s'agit d'un établissement professionnel où les élèves, recrutés à la fin du cycle fondamental, proviennent de tout le Mali et ne sont pas spécialement sélectionnés. La classe est une 1ère année Administration dont le programme de mathématique est équivalent à une classe de 10ème de lycée (classe de seconde en France).

L'étude de la maturation du concept n'est pas prévue; elle est difficile à entreprendre puisqu'il faudrait suivre une même population d'élèves pendant plusieurs années et observer l'évolution de cette population dans les différentes classes.

Le test était individuel et les réponses devaient être écrites directement sur les feuilles du test distribuées en début de séance. L'effectif de la classe était de 66.

#### Le test posé

Nous avons gardé l'ossature du test de M.Sokona avec les trois exercices. Les différences concernant ces exercices se situent dans certains choix des valeurs des variables. Une différence au niveau de l'expérimentation réside dans la consigne donnée aux élèves : il était explicitement demandé aux élèves de donner une *justification* de leurs réponses.

**Exercice 1** (concernant le domaine de validité de  $\sqrt{a}$ ).

L'exercice est pratiquement inchangé, les nombres sont les mêmes et seul 13/3 a été enlevé.

**Exercice 2** : Il s'agit toujours de la résolution de l'équation " $x^2 = a$ "

Le nombre  $a$  est toujours entier et nous avons pris les quatre possibilités compte tenu des variables "type du nombre" et "signe du nombre" :

$$a = 16, a = 13, a = -9, a = -7$$

**Exercice 3** : Nous avons formulé l'exercice sous la forme :

"Existe-t-il un carré d'aire  $a \text{ cm}^2$  ? Si oui, calcule la longueur d'un côté".

$a$  est toujours pris entier positif et nous testons essentiellement ici l'influence de la variable "type du nombre". Les valeurs choisies sont ici  $a = 25$ , et  $a = 17$ .

L'analyse des **réponses probables** des élèves s'appuie sur notre typologie des conceptions, les résultats des travaux précédents et le choix de la classe de l'expérimentation.

Pour ce qui concerne les réponses des élèves, compte tenu de la spécificité de la classe de 10ème choisie, il semble légitime d'attendre des résultats se situant entre ceux des classes de 9ème et de 10ème de l'expérimentation de M.Sokona.

Les modèles de conception mobilisés par les élèves devraient être de types *carré parfait CP*, *conception formelle CF* ou *conception approximation CA*, avec une proportion importante pour le premier type de modèle.

Nous pensons que le modèle **CP-N** sera rarement mobilisé à ce niveau et que les modèles **CN** et **CNU** seront rarement atteints.

## VI.2. Analyse des réponses des élèves

Nous donnons les types de comportements majoritaires pour chaque exercice et présentons quelques formulations d'élèves pour essayer de préciser le fonctionnement des connaissances dans certaines situations. Les significations de ces réponses sont étudiées en liaison avec nos hypothèses.

### VI.2.1. Exercice 1

Les connaissances mobilisées par les élèves de cette classe de l'E.C.I.C.A dans cet exercice sont assez proches de celles repérées dans les classes de 9ème de l'expérimentation de Sokona. Les comportements majoritaires sont du type **CP** ou **CF**, et **CP-N** ou **CF-N**.

Le domaine de validité de l'expression  $\sqrt{a}$  est en général **C** ou **C U (-C)**.

L'aspect opératoire du concept fonctionne correctement sur les éléments de **C**. On ne relève aucune réponse liée au signe dans le cas des nombres positifs. L'existence de la racine carrée d'un nombre reste liée :

- \* à l'aspect opératoire du concept ,
- \* au fait de pouvoir calculer les racines carrées avec les nombres dont dispose l'élève.

Il n'y a pas extension du système de nombres sur lequel travaille l'élève. La condition générale caractérisant l'existence des racines carrées ne peut être acquise que parallèlement à l'extension du système de nombres. Cette condition est issue du théorème fondamental sur l'existence de la racine carrée qui fait partie du programme de 9ème année et figure en bonne place dans le manuel officiel au Mali. L'intérêt du théorème fondamental n'est pas perçu par les élèves.

**Les formulations d'élèves** révèlent les significations sous-jacentes et confirment les règles utilisées.

Ainsi, l'**aspect opératoire** du concept est apparent dans ce qui suit :

- \* *oui, car  $4^2 = 16$ ,*
- \* *oui, car il existe un nombre qui multiplié par lui même donne 16, c'est 4*
- \*  *$\sqrt{-7}$  n'existe pas car il n'y a pas un réel qui son produit par lui même donne un carré négatif".*

D'autres réponses révèlent un **aspect fonctionnel** du concept :

- \* " $\sqrt{16} = 4$ "
- \* "*16 en sortant du radical devient 4*".

ou une **conception pragmatique** de l'existence du nombre donné :

- \* " $\sqrt{0,36} = 0,6$  donc  $\sqrt{0,36}$  existe".

### Certaines phrases sont des indices d'une conception CP :

- \* *non, 13 n'est pas un carré parfait, il n'existe pas  $x$  qui au carré est égal à 13*
- \* *non, -7 n'est pas un carré parfait".*

ainsi que la précision qui est donnée du fonctionnement de la notion de carré parfait entier (a, b), décimal (c) ou rationnel (d, e):

- (a) *"Non car 13 est un **nombre premier** et aucun nombre multiplié par lui même donne 13".*
- (b) *"Non car aucun de ces nombres au carré donne 7,  $\sqrt{7}$  est différent de 0, 1, 2, 3, 4, 5".*
- (c) *"Non car 0,9 n'est pas un carré parfait, il n'existe pas un **décimal** qui multiplié par lui même donne 0,9".*
- (d) *"Oui, parce que  $16/9$  est un carré parfait et il existe un élément  $x/y$  qui au carré =  $16/9$ ,  $4/3$ ".*
- (e) *" $13/4$  n'est pas un carré parfait car 13 n'est pas un carré parfait".*

La formulation (a) fait référence à l'arithmétique (nombre premier) dans  $\mathbb{N}$  tandis que dans (b) il est explicite que la racine carrée d'un entier est à chercher dans  $\mathbb{N}$ . Dans (c), le nombre  $x$  tel que  $x^2 = 0,9$  est à chercher dans  $\mathbb{D}$ . Dans (d) et (e), lorsque les nombres sont écrits sous forme fractionnaire on cherche la racine carrée sous forme fractionnaire  $x/y$ . Certains élèves fonctionnent avec le "théorème" : " $p/q$  est carré parfait si et seulement si  $p$  et  $q$  sont carrés parfaits".

### Les formulations suivantes révèlent une conception de type CP-N :

- \* *"oui car -9 est un carré parfait" (5 élèves)*
- \* *"il existe  $\sqrt{-9}$  qui est égale à 3",*
- \* *"-9 en sortant du radical devient -3",*
- \* *"oui, car  $-3^2 = -9$ ".*

Avec en même temps des réponses du type suivant pour  $\sqrt{-7}$  :

- \* *"non car -7 n'est pas un carré parfait",*
- \* *"non tout nombre multiplié par lui même ne donne -7".*

Dans le domaine des nombres négatifs ces élèves acceptent  $\sqrt{-a}$  lorsque  $a$  est carré parfait. Ces réponses semblent s'appuyer sur des relations ambiguës du type " $-3^2 = -9$ ", ou plus explicitement sur des règles, telles que :

pour  $b$  positif,  $\sqrt{-b^2} = b$  (3 élèves) ou  $\sqrt{-b^2} = -b$  (13 élèves).

Leurs raisonnements reposent toujours sur l'aspect opératoire de la notion avec en plus des difficultés au niveau des opérations sur les nombres. Le fait qu'un nombre négatif ne peut être le carré d'un nombre n'est pas acquis.

### Indice de conception de type CF

- \* *"La  $\sqrt{13}$  existe, mais pas dans  $\mathbb{R}$ , car 13 n'est pas carré parfait".*

$\sqrt{13}$  ne semble pas avoir un statut de nombre. Le problème est aussi de savoir ce que représente l'ensemble  $\mathbb{R}$  pour cet élève.

### Indice de conception de type CA

- \* *"Non  $\sqrt{13}$  n'existe pas directement. Elle est comprise entre  $\sqrt{9}$  et  $\sqrt{16}$ , mais ne donne pas une réponse fixe".*

\* "Non  $\sqrt{13}$  ne donne pas un carré fixe" et "non car en calculant il ne donne pas un entier".

\* "Non la racine carrée de 13 n'a pas une valeur déterminée".

Nous relevons ici les ambiguïtés des rapports entre un nombre et ses valeurs approchées. L'existence de la racine carrée semble liée au fait qu'un algorithme de calcul doit se "terminer", c'est-à-dire on doit obtenir un entier ou un décimal. Il n'y a pas d'extension du domaine numérique.

D'autres formulations montrent les difficultés des élèves avec la notion de fonction réciproque.

\* "Non car 13 ne peut être élevé au carré".

\* "Oui, car  $\sqrt{13} = (6,5)^2$ ".

Il semble que ces élèves ont des difficultés à exprimer que 13 n'est pas l'image d'un nombre par l'application "carré". Des confusions entre l'application "racine carrée" et sa réciproque apparaissent.

Certaines réponses sont liées à la notion de parité du nombre. Il s'agit peut-être de confusions entre "double" et "carré" ou de confusions avec l'opérateur de division par 2 :

\* "Non, car 13 est un nombre impair".

\* "Oui car 16 est pair".

\* "Non, car 1,7 ne donne pas un nombre pair".

\* " $\sqrt{13/4}$  n'existe pas car 13 est impair et 4 est un nombre pair".

\* "Oui, car  $\sqrt{13} = (6,5) \times 2$ ".

\* "Oui car  $\sqrt{0,36} = 0,18$ ".

### **Liens entre règles sur racine carrée et conceptions sur les décimaux**

Si les comportements majoritaires (50 %) sont tous en relation avec une conception de type CP, ils font apparaître des modèles différents sur les décimaux. Nous avons repéré trois groupes d'élèves.

**Le groupe CPSDD :** Il s'agit de 8 élèves fonctionnant avec une conception de type CP et sans erreurs de calcul sur les décimaux. Ils acceptent l'existence de  $\sqrt{0,36}$  et rejettent la racine carrée de 0,9 ; 4,9 ; et 1,7 en référence à la notion de carré parfait.

En particulier  $CD = \mathbb{D}^2$ .

**Le groupe CPCED :** Ces élèves (au nombre de 12) fonctionnent conjointement avec des connaissances de type CP et des conceptions de type "couple d'entiers" ou "entier à virgule" sur les décimaux. On ne peut se déterminer ici entre les deux conceptions sur les décimaux compte tenu des valeurs choisies. Ces élèves acceptent les racines carrées de 0,36; 0,9; 4,9 et rejettent celle 1,7. Nous donnons quelques formulations d'élèves de ce groupe qui illustrent notre propos :

\* "oui, si je fais  $2 \times 2 = 4$  et je fais encore  $3 \times 3 = 9$ , je peux mettre sous racine  $\sqrt{4,9}$  carré parfait",

\* " $\sqrt{4,9}$  oui, tous les deux nombres ont un nombre qui multiplié par lui même dans chacun des 2 nombres",

\* " $2,3 \times 2,3 = 4,9$ " (11 élèves)

Ces élèves semblent utiliser implicitement le théorème : Un décimal  $a=(e,d)$  est carré parfait si et seulement si la partie entière  $e$  et la partie décimale  $d$  sont carrés parfaits, et la règle :  $\sqrt{(e^2, d^2)} = (e,d)$ .

Le groupe **CPEVD** : Le dernier groupe concerne 13 élèves qui acceptent l'existence de la racine carrée de 0,36, mais aussi celle de 0,9 en le considérant en général comme le carré de 0,3. Ils rejettent les nombres 4,9 et 1,7 pour cette question d'existence. Nous pensons qu'il s'agit d'élèves fonctionnant toujours avec une conception de type **CP** sur ces items, mais ayant des difficultés avec la gestion de la virgule dans les opérations sur les décimaux, et surtout lorsqu'il y a présence de 0 dans l'écriture décimale du nombre.

### VI.2.2. Exercice 2

Le fonctionnement des élèves dans cet exercice est assez conforme à ce que l'on s'attendait et, pour la plupart, il semble issu de conceptions **CP** ou **CP-N**, et **CF** ou **CF-N**. On relève quelques comportements pouvant être associés à une conception **CA**.

Aucun élève ne répond correctement à cet exercice et, en particulier pour " $x^2 = 13$ ". Seuls quelques élèves envisagent des solutions dans le référentiel de l'équation des nombres négatifs. On note 4 élèves qui donnent aussi -4 comme solution de l'équation " $x^2 = 16$ ". Peu d'élèves (15 %) rattachent ce problème de résolution de l'équation  $x^2 = a$  avec la notion de racine carrée. Dans le changement du cadre numérique au cadre algébrique il n'y a pas réinvestissement du concept pour la plupart d'entre eux.

$x^2 = 16$	$x^2 = 13$	$x^2 = -9$	$x^2 = -7$	Nombre	Indice de conception
$x = 4$ ou $x = 4$ ou $-4$ ou $x = \sqrt{16}$	$\emptyset$ car 13 n'est pas carré parfait	$\emptyset$ car $-9 \leq 0$ ou car -9 n'est pas carré parfait	$\emptyset$ car $-7 \leq 0$ ou car -7 n'est pas carré parfait	9	<b>CP</b>
		$x = \sqrt{-9}$ ou $x = 3$ ou $x = -3$	$\emptyset$ car -7 n'est pas carré parfait	5	<b>CP-N</b>
	$x = \sqrt{13}$	$x = \sqrt{-9}$ ou $x = 3$ ou $x = -3$	$x = \sqrt{-7}$	8	<b>CF</b> <b>CF-N</b>
	$x = 3,6$ (valeur approchée)	$\emptyset$ ou $x = 3$ ou $x = -3$	$\emptyset$ ou une valeur approchée de $\sqrt{7}$ ou $-\sqrt{7}$	3	<b>CA</b> <b>CA-N</b>

tableau 5

Les résultats entre les classes de 10ème du lycée Askia et ceux de la classe de l'E.C.I.C.A sont très différents. Par exemple si on considère l'équation  $x^2=13$ , on

qu'on en a que 15 % à l'E.C.I.C.A. Les résultats des élèves de l'E.C.I.C.A semblent plus proches de ceux de la classe de 9ème. Comme en classe de 9ème, on observe ici de nombreuses procédures de division par 2.

Le tableau 5 caractérise les comportements des élèves que l'on peut associer strictement à un des modèles de notre typologie.

Nous précisons maintenant certains comportements et quelques formulations d'élèves.

**1. A propos de la conception CP :** Le référentiel implicite de l'équation est en général  $\mathbb{N}$ , et très rarement  $\mathbb{Z}$ . L'élève donne des solutions quand il peut les calculer avec son système de nombres. Des formulations :

\* " $\emptyset$  car  $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$  sont différents de 13",

\* "non, parce que 13 est un nombre premier différent d'un carré parfait".

**2. A propos de la conception CP-N :** La différence avec le comportement de type CP se présente pour le cas " $x^2 = -9$ ". Les élèves présentent -9 comme un carré parfait en se basant sur des relations du type :

" $-3^2 = -9$ " ou " $-3 \times -3 = -9$ " ou " $-3 \times 3 = -9$ ".

**3. A propos des conceptions CF et CF-N :** L'élève fournit une solution sous la forme  $\sqrt{a}$  même pour a non carré parfait et même pour a négatif. A l'exercice 1, il a rejeté l'existence de  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{7}$ , mais pas  $\sqrt{16}$ . On distingue deux types de formulations.

Application d'une règle formelle :

" $S = \{\sqrt{13}\}$  car  $x^2 = 13 \iff x = \sqrt{13}$ ". (règle utilisée aussi pour -9) ou

" $x = \sqrt{13}$  car  $\forall x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R}$  si  $x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$ ". (aussi utilisée pour -7).

Application d'une convention d'écriture :

- " $x = \sqrt{13}$  parce qu'il n'existe pas la racine de  $\sqrt{13}$ , donc la valeur de x reste obligatoirement sous radical",

- " $x = \sqrt{13}$  parce que  $x^2$  est un carré parfait et 13 n'est pas un carré parfait. Pour le résoudre on prend le carré parfait de  $x^2$  qui est x et on écrit x sous radical",

- " $x^2 = 13$  donc  $x = \sqrt{13}$  parce que 13 n'est pas un carré parfait, on l'écrit  $\sqrt{13}$ ".

Il semble que, lorsque le nombre n'est pas carré parfait, on doit exprimer formellement la réponse à l'aide du symbole "radical". Il se pose ici le problème du statut de la réponse  $\sqrt{13}$  fournie par l'élève. On observe que tous ces élèves ont rejeté l'existence de  $\sqrt{13}$  à l'exercice 1 et, en général, parce que 13 n'est pas carré parfait. Ainsi  $\sqrt{13}$  n'est pas accepté comme nombre, mais semble convenir, par le biais de manipulation formelle et de symbolisme, comme solution ou, au moins comme réponse acceptable au problème de la résolution de l'équation " $x^2 = 13$ ". Lorsque a n'est pas carré parfait,  $\sqrt{a}$  est une expression obéissant à une règle formelle dans la manipulation des équations, qui n'a pas un statut de nombre pour l'élève.

L'homogénéité des nombres du système de nombres en vigueur et des racines carrées est loin d'être réalisée.

**4. A propos des conceptions CA et CA-N :** Pour " $x^2 = 13$ " des élèves donnent comme solution de l'équation une valeur approchée de  $\sqrt{13}$ . Ces élèves fournissent parfois une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  pour solution de l'équation " $x^2 = -7$ ". Voici quelques exemples de formulations :

\* " $x = 3,6056$ , on calcule le radical de 13 qui est égal à 3,6056",

\* " $x = 2,647$ ;  $x^2 = -7$ ,  $x^1 = 2,647$  car si  $x^2 = -7$ ,  $x^2$  serait le carré de  $x^1$ ",

\* " $x = \sqrt{13}$ . Si  $x^2 = 13$ , sachant que  $x^2 = x \cdot x$  et 13 n'est pas un carré parfait.

*Pour obtenir  $x$  on cherche la racine carrée de 13 qui sera un décimal"*

Ce dernier élève explicite clairement que la "racine carrée" est un opérateur qui à un nombre non carré parfait associe un nombre décimal.

Ce comportement, où  $\sqrt{13}$  apparaît comme le résultat d'un opérateur ou d'un algorithme et confondant  $\sqrt{13}$  avec l'une de ses approximations, nous semble un indice d'une "Conception Approximation" CA.

### 5. La procédure de division par 2 (D/2)

Le statut de cette procédure n'avait pas encore été envisagé et en particulier elle n'est pas intégrée comme élément d'un modèle de connaissances dans notre typologie. Nous savons que de nombreux élèves de 9ème dans l'expérimentation de M.Sokona l'utilisent à propos de l'équation  $x^2 = 13$ . T.Assude signale aussi son apparition dans son expérimentation.

Nous allons essayer de caractériser les comportements d'élèves utilisant cette procédure à l'aide des résultats de notre test. Nous relevons que 13 élèves l'utilisent, implicitement ou non, au moins une fois. Anticipant sur les résultats de l'exercice suivant nous pouvons dire que dans cette expérimentation les élèves n'ont pas mobilisé cette procédure dans l'exercice 3. De plus elle n'est utilisée que par 4 élèves à l'exercice 1. Elle n'est vraiment apparue qu'à l'exercice 2.

La fréquence maximum d'utilisation est atteinte lorsque  $a$  est un nombre positif et non carré parfait ( $a = 13$  dans ce test), ce maximum est approché aussi lorsque  $a$  est négatif et opposé d'un nombre non carré parfait ( $a = -7$  dans notre test).

Trois comportements se manifestent en rapport avec cette procédure.

Le comportement  $\approx$  CP-N : Ces élèves ont pratiquement un comportement de type CP-N aux exercices 1 et 2. Cependant à l'exercice 1 ils ont utilisé implicitement D/2 pour  $\sqrt{0,36}$  en écrivant  $\sqrt{0,36} = 0,18$ . Ils donnent aussi  $\sqrt{16} = 4$ ,  $\sqrt{-9} = 3$ ,  $\sqrt{0,9} = 0,3$  et rejettent les racines carrées de 13, 7, -7, (4,9), (1,7), 16/9, et (13/4).

Pour ces élèves la procédure D/2 n'est pas stable. Elle apparaît comme une perturbation locale à l'exercice 1. Ces élèves sont en voie d'atteindre une conception CP-N. Nous noterons  $\approx$  CP-N ce comportement.

Les comportements CP + D/2 et CP-N + D/2 : (5 élèves).

Des élèves utilisent dans certaines conditions la procédure D/2 à l'exercice 2. L'aspect opératoire du concept de racine carrée semble maîtrisé sur l'ensemble C des carrés parfaits pour l'élève. On écrit à l'exercice 1 :  $\sqrt{16} = 4$ ,  $(0,6)^2 = 0,36$ ,  $(2,3)^2 = 4,9$ ,  $(4/3)^2 = 16/9$ . Pour les entiers négatifs, soit on rejette les racines carrées, soit on écrit  $\sqrt{-9} = 3$  ou  $-3$ . Au niveau de la résolution de " $x^2 = 16$ " on donne



4 comme solution. Pour l'équation " $x^2 = -9$ " la réponse est soit " $\emptyset$ ", soit " $x = 3$ ", soit encore " $x = -3$ ". Sur  $C \cup -(C)$  ces élèves ont un fonctionnement comparable à celui décrit dans les conceptions CP et CP-N.

La différence se situe au niveau de la résolution des équations " $x^2 = a$ " lorsque  $a$  est positif et non carré parfait, ou l'opposé d'un tel nombre. Dans ces cas ces élèves se rabattent sur une procédure D/2 : ils donnent  $x = 13/2$  comme solution de " $x^2 = 13$ ". Pour " $x^2 = -7$ " la réponse est, soit  $\emptyset$ , soit  $x = -7/2$ .

L'origine d'un tel comportement peut provenir d'une confusion dans l'écriture formelle  $x^2$  entre carré et double, et plus généralement de difficultés au niveau des opérations sur les nombres. L'absence d'opérateur réciproque "explicite" de l'opérateur "élévation au carré" renforce peut être ce comportement. Lorsque les nombres sont carrés parfaits, l'élève "voit" l'antécédent du nombre, mais cela ne lui suffit pas à construire une signification correcte de l'opérateur réciproque qu'il identifie alors formellement avec la procédure de division par deux. Dans le cas de nombres non carrés parfaits, il applique alors la procédure D/2.

Les conceptions de ces élèves sont assez proches des conceptions CP ou CP-N, mais avec une différence de traitement de l'équation  $x^2 = a$  pour certaines valeurs des variables comme nous l'avons observé. On note aussi une dégénérescence de l'aspect opératoire du concept de racine carrée.

Ce comportement sera noté CP + D/2 ou CP-N + D/2 selon le cas.

Le comportement CD/2 : (6 élèves).

A l'exercice 1 on répond que  $\sqrt{16} = 4$  et parfois aussi que  $\sqrt{0,36} = 0,6$ ,  $\sqrt{0,9} = 0,3$ . On rejette les racines carrées de 13, 7, -7 et parfois à cause de la parité. Le fonctionnement commun de ces élèves est d'utiliser systématiquement une procédure D/2 à l'exercice 2 avec les nuances suivantes :

- certains donnent ainsi la réponse définitive  $x = a/2$ .
- d'autres, après avoir utilisé la procédure D/2, rejettent parfois le résultat pour  $a = 13, -9, -7$ , en invoquant la notion de parité (où en disant que l'opération ne tombe pas juste). Il semble que pour ces élèves le résultat doit être dans  $\mathbb{N}$ .
- un des élèves lève la contradiction (avec l'exercice 1) pour  $a = 16$  en faisant ensuite une division par 4 dans ce seul cas.

A l'exercice 3 on a une procédure de division par 4. Ainsi ces élèves font fonctionner l'aspect opératoire correctement sur les carrés parfaits dans le cadre numérique, en particulier sur les calculs du type  $\sqrt{a^2}$  où  $a \in \mathbb{N}$ , parfois aussi pour  $a \in \mathbb{D}$ , et  $a \in \mathbb{Q}$ .

Mais il semble que pour ces élèves l'opérateur formel réciproque de l'élévation au carré est la division par 2. Dans le cadre algébrique ils utilisent systématiquement une procédure D/2 dans la résolution de l'équation  $x^2 = a$ .

Cette conception sera notée CD/2.

Ces différents modèles sont rajoutés dans notre typologie et ils apparaissent comme des dégénérescences des modèles CP et CP-N.

### VI.2.3. Exercice 3

Deux comportements majoritaires se manifestent à cet exercice comme le montre le tableau 6.

### 1. Comportements de type CP

On relève un nombre important d'élèves qui fonctionnent avec des connaissances de type CP à cet exercice, et en particulier qui rejettent l'existence du carré d'aire  $17 \text{ cm}^2$ . L'aspect opératoire du concept de racine carrée est maîtrisé et fonctionne correctement pour des carrés parfaits.

Carré d'aire $a \text{ cm}^2$		Nombre	Type de connaissances
$a = 25$	$a = 17$		
oui, car $5^2 = 25$ et Aire = $L^2$ ou $L = \sqrt{25}$	non, car $17$ n'est pas un carré parfait	21	CP , CP-N CF , CF-N
25/4	17/4	10	Procédure D/4

tableau 6

Voici des formulations d'élèves qui utilisent explicitement la notion de racine carrée pour  $a = 25$  (8 réponses).

\* "Oui, il existe un carré d'aire  $25 \text{ cm}^2$ . La longueur d'un côté est  $\sqrt{25} = 5$ ".

\* "Oui, la longueur d'un côté sera 5. Soit  $x^2$  le carré d'aire égale à 25 :  $x^2 = 25$ .

Pour la longueur d'un côté on a  $x = \sqrt{25} \text{ <---> } x = 5$ ".

\* "Oui, c'est 5 cm, car si le carré d'aire (surface) est  $25 \text{ cm}^2$ ; le côté est  $\sqrt{25} = 5$ ".

Et des formulations d'élèves qui rejettent le carré d'aire  $17 \text{ cm}^2$ .

\* "Non, parce qu'il n'existe pas ce côté car 17 n'est pas un carré".

\* "Non, le carré d'aire  $17 \text{ cm}^2$  n'est pas un carré parfait".

\* "Non, parce que la surface du carré étant  $17 \text{ cm}^2$ , nous savons que la surface d'un carré = côté au carré ; or il n'existe pas un élément  $x$  qui au carré est égal à 17 parce que 17 n'est pas un carré parfait".

\* "Non,  $L \times L \neq 17$ ".

\* "Non, parce qu'il n'existe pas de chiffre qui multiplié par lui même donne 17, je veux dire double, donc la longueur ne pourra pas être calculée".

On observe ici une confusion, au moins au niveau du langage, entre "double" et "carré". Nous voyons ici l'effet de la contextualisation choisie dans ce cadre géométrique sur les formulations des élèves.

### 2. Procédure de division par 4

De nombreux élèves mobilisent une procédure de division par 4 (D/4) pour les deux items de cet exercice. Bien que cette procédure ait été envisagée, nous ne pensions pas qu'elle serait fréquente à ce niveau.

Quelques formulations :

\* "oui, si la surface =  $25 \text{ cm}^2$  pour calculer la longueur d'un côté on divise  $25 : 4 = 6,25$  donc la longueur d'un côté = 6,25",

\* "il n'existe pas un carré d'aire  $25 \text{ cm}^2$ , car pour pouvoir calculer la longueur de ce carré il faut un côté qui sera multiplié par 4".

Parfois on rejette le résultat quand il n'est pas dans  $\mathbb{N}$ .

Ce comportement est fortement lié à la contextualisation choisie dans cet exercice. Il semble provenir d'une confusion entre "périmètre" et "aire". Il aurait été souhaitable de s'assurer des connaissances des élèves à propos de ces notions géométriques.

Un seul élève fait intervenir  $\sqrt{17}$  comme mesure du côté :

"oui, la longueur d'un côté serait  $\sqrt{17}$  comme ce n'est pas un carré parfait".

Il faut signaler que, dans un premier temps, l'élève a répondu "non", et ensuite il a raturé et écrit "oui,...". Cet élève qui par ces réponses aux deux premiers exercices relève d'un modèle de conception CF, semble évoluer vers un modèle CN.

Un seul élève aussi semble donner une réponse de type CA avec la formulation suivante : "non, on ne peut pas calculer la longueur d'un côté de ce carré parce que  $17 \text{ cm}^2$  n'a pas de racine carrée fixe".

Aucun élève n'a utilisé une procédure de division par 2 dans cet exercice contrairement au problème de l'équation " $x^2 = a$ ".

Nous voyons que la mobilisation des connaissances dans les divers problèmes dépend de la contextualisation choisie et en particulier que les problèmes ne sont pas perçus équivalents par les élèves.

### VI.3. Comparaison des résultats entre les divers items du test

Le test a permis d'enregistrer 1122 réponses. Le nombre de réponses correctes est assez faible, soit 145 (12 %). Par contre le nombre de réponses liées à la notion de carré parfait est assez élevé, soit 467 (42 %).

Nous proposons dans le tableau 7 une comparaison des réponses aux items par rapport aux deux critères réussite et réponse liée à la notion de carré parfait.

Groupe d'items	Fréquences de réussite et de réponse de type CP	Caractéristiques communes	Remarques particulières
Existence de $\sqrt{a}$ pour $a = 16 ; 0,36 ; 16/9 ;$ Carré d'aire $a \text{ cm}^2$ $a = 25$	Réussite : élevée Fréquence de réponses de type CP : moyenne	$a$ est carré parfait	La réussite est plus forte lorsque le nombre est entier et elle est plus forte sur les décimaux que sur les rationnels
Existence de $\sqrt{a}$ pour $a = 13 ; 7 ; -7 ; 4,9 ; 1,7 ; 13/4$ Equation " $x^2 = a$ " $a = 13, -7$ Carré d'aire $a \text{ cm}^2$ $a = 17$	Réussite : très faible Fréquence de réponses de type CP : élevée	$a$ est positif et non carré parfait  ou $a$ est négatif $a = -b$ avec $b$ non carré parfait	Ces items sont essentiels pour repérer et caractériser des connaissances de type CP, CF, CA, CN
Existence de $\sqrt{a}$ pour $a = -9$  Equation " $x^2 = a$ " $a = -9$	Réussite : assez faible Fréquence de réponses de type CP : élevée Nombreuses réponses liées aux règles : $\sqrt{-a^2} = a$ ou $\sqrt{-a^2} = -a$	$a$ est négatif $a = -b$ avec $b$ carré parfait	Ces items sont indispensables pour avoir des indices sur des connaissances de type CP-N ou CF-N

tableau 7

L'item concernant l'équation " $x^2 = 16$ " a un statut particulier et ne rentre pas dans les groupes précédents. Cet item a été mal réussi malgré le fait que le nombre est ici un carré parfait. Nous pensons que cela est lié aux difficultés avec la notion générale d'équation et au fait que les élèves ne considèrent pas, en général, des nombres négatifs dans le référentiel de l'équation.

Ce tableau peut nous guider sur les choix des valeurs des variables selon les objectifs d'une séquence d'enseignement ou d'un test.

#### VI.4. Caractérisation des connaissances des élèves

Nous rappelons que notre but était d'identifier et de caractériser les connaissances que les élèves mettent en jeu dans des situations spécifiques de la notion de racine carrée. A ce terme de notre étude, nous avons caractérisé l'état des connaissances de chaque élève de cette classe de l'E.C.I.C.A par quatre indicateurs.

- \* Le système de nombre (SN) sur lequel il fonctionne implicitement.
- \* Le domaine de validité (inclus dans SN) de l'expression  $\sqrt{a}$ .
- \* Le fonctionnement sur les décimaux.
- \* Le modèle de notre typologie de conceptions.

##### 1. Le système de nombre SN

Nous avons attribué à chaque élève l'un des modèles  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$ , et  $\mathbb{Q}$  lorsque cela était possible. Une étude plus approfondie serait nécessaire pour avoir des modèles plus fins et sûrement plus proches des connaissances des élèves que ces modèles mathématiques

Système de nombres	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
Nombre d'attributions	5	15	42

##### 2. Le fonctionnement sur les décimaux

Nous avons pu déterminer le fonctionnement de 55 élèves par rapport aux comportements CPSDD, CPCED, CPEVD définis dans l'analyse locale (VI.2.1).

Groupe sur les décimaux	CPSDD	CPCED	CPEVD
Nombre	8	19	28

Dans cette classe, 47 élèves ont des difficultés avec les décimaux et 19 ont des symptômes de modèles de conceptions "couple d'entiers" ou "nombre entier à virgule" sur les décimaux. La notion de racine carrée semble être aussi un révélateur efficace pour l'étude des conceptions d'élèves à propos des décimaux.

##### 3. Le modèle de conceptions attribué

Les modèles sont attribués à l'élève par rapport aux trois situations étudiées. Ils peuvent nous permettre de prévoir et d'anticiper son comportement dans des situations analogues. Cependant il peut y avoir des décalages dans des situations

fondamentalement différentes. Il peut en être de même dans des situations mathématiquement équivalentes, mais dont la "lecture" par l'élève ne sera pas perçue comme telle à cause de la contextualisation choisie et de ses connaissances. Un exemple nous est donné avec l'exercice 3 où certains élèves font une confusion périmètre-aire.

Ainsi le modèle, associé à l'élève, est lié aux situations des trois exercices étudiés. Le tableau 8 récapitule les modèles attribués dans cette expérimentation.

Modèles de conceptions	nombre d'élèves
"CA"	3
"CA-N" / "≈ CA-N"	3 + 1
"CF"	7
"CF-N"	3
"CP"	17
"CP-N" / "≈ CP-N"	17 + 3
"CP + D/2" / "CP-N + D/2"	1 + 3
"CD/2"	7
non attribué	1

tableau 8

### Commentaires sur le tableau 8

Les conceptions majoritaires relèvent des modèles CP (25 %) et CP-N (30 %). Ceci nous semble un indice de résistance des connaissances des élèves. Ces conceptions se mettent assez rapidement en place comme le montre l'expérimentation de M. Sokona en classe de 9ème. Elles sont très stables et restent présentes jusqu'en 10ème (voire plus tard encore) chez certains élèves.

Les modèles CF et CF-N sont moins fréquents que les précédents dans cette classe, mais une dizaine d'élèves (15 %) relèvent de ces modèles. Ils constituent une évolution des conceptions puisqu'ils permettent de donner des solutions des équations " $x^2 = a$ " sous la forme  $\sqrt{a}$ . Cette évolution n'est pas que positive puisque certains élèves donnent parfois  $\sqrt{9}$  ou  $\sqrt{-7}$  comme solutions.

Ces conceptions nous semblent moins stables que les premières et une conception CP ou CP-N peut de nouveau être mobilisée dans des exercices formels. Par exemple, un élève de notre test a un comportement qui semble relever du modèle CF aux trois exercices. En particulier il répond à l'exercice 2 :

$$"x = \sqrt{13} \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ si } x^2 = y \text{ ----> } x = \sqrt{y} "$$

Pendant, dans un autre exercice de transformation que nous lui avons donné, un comportement de type CP ressort pour certains items :

*" $\sqrt{4 + 5}$ , cela n'est pas possible,  $\sqrt{4} = 2$  ; mais il n'existe pas de nombre multiplié par lui même qui donne 5".*

*" $\sqrt{8 + \sqrt{3}}$ , non , ni 8, ni 3 n'a une racine carrée".*

Dans ce test il y a peu d'élèves à qui on peut attribuer strictement un modèle CA ou CA-N. Sept élèves présentent des indices de comportements de ce type. Une

hypothèse est que nous n'avons peut être pas donné aux élèves les moyens de les mobiliser : l'algorithme d'extraction est au programme, mais nous ne savons pas s'il est connu de tous. On aurait pu fournir des tables de carrés ou des calculatrices.

Le nombre d'élèves associés aux modèles **CP + D/2**, **CP-N + D/2**, **CD/2** n'est pas négligeable. Nous pensons qu'ils doivent être pris en compte dans la typologie et surtout dans des classes de "bas niveau" d'apprentissage. L'un de ces modèles a été attribué à 11 élèves (soit 17 %). Ceux-ci ont des difficultés avec la notion de fonction réciproque et identifient parfois l'opérateur "racine carrée" comme la procédure de "division par 2" **D/2**.

### **VI.5. Confrontation avec les prévisions dans cette classe**

Dans l'analyse a priori, on avait prévu qu'il y aurait une proportion importante d'élèves qui mobilisent des conceptions de type **CP**, **CF**, **CA** avec une priorité pour le premier. C'est effectivement ce que l'on a constaté.

Par contre, nous ne pensions pas relever une proportion aussi importante de conceptions de type **CP-N** dans une classe de 10ème. Cette tendance ne s'était pas présentée dans les classes de 10ème du lycée Askia. Or 30 % des élèves de l'expérimentation de l'E.C.I.C.A relèvent encore de ce modèle **CP-N** qui semblait être le modèle majoritaire des classes de 9ème.

Les modèles **CD/2**, **CP + D/2**, et **CP-N + D/2** n'avaient pas été envisagés. L'examen détaillé des protocoles a permis de mettre en évidence et caractériser ces conceptions de "plus bas niveau" dans la hiérarchie des modèles. Nous n'avons pas pu attribuer des modèles **CN** ou **CNU** à certains élèves, nous pensions en rencontrer très peu, mais quelques uns cependant. Les modèles attribués aux élèves de cette classe et leurs fréquences montrent que le niveau général d'acquisition du concept est faible et se situe autour du modèle **CP**. Beaucoup d'élèves semblent avoir des conceptions assez proches de celles repérées dans les classes de 9ème, c'est-à-dire associées à des modèles **CP-N**.

Nous avons relevé chez de nombreux élèves des difficultés avec la notion de fonction réciproque ; ce qui peut expliquer, en partie, le faible niveau d'acquisition. D'autre part de nombreux élèves ont des difficultés avec les nombres et en particulier les décimaux. Vingt d'entre eux semblent rejeter les nombres en écriture fractionnaire.

Bien entendu, le concept de nombre réel, parallèlement à celui de racine carrée, n'est pas construit ici par les élèves et il n'y a pas véritablement extension du domaine numérique.

Cette étude nous a permis d'affiner les connaissances des élèves correspondant aux modèles de plus "bas niveaux" dans notre typologie. Elle doit être complétée par des expérimentations dans des classes à plus forte acquisition des connaissances à propos du concept de façon à étudier les modèles de plus haut niveau, c'est-à-dire les modèles de type **CN** et **CNU**.

## VII. Conclusions relatives à l'apprentissage du concept de racine carrée

L'analyse du savoir mathématique "racine carrée" montre la complexité et la diversité du champ conceptuel de ce concept. Les remarques de nombreux professeurs et les différents travaux confirment cette complexité se traduisant par de nombreuses erreurs et procédures erronées chez les élèves. Ces comportements peuvent s'expliquer par des modèles dont les majoritaires, en début d'apprentissage, sont de type CP.

Nous donnons d'abord les difficultés repérées pour l'apprentissage de la notion de racine carrée et des hypothèses sur l'origine possible de certains modèles de la typologie. Les difficultés des élèves ont sûrement des origines diverses, mais il semble que l'on puisse en identifier deux importantes liées aux concepts de "fonction réciproque" et de "nombres".

### VII.1. La racine carrée comme fonction réciproque

#### Difficultés avec la notion de fonction réciproque

Dans notre expérimentation nous avons souvent relevé des réponses d'élèves, présentant des indices de difficultés avec cette notion de fonction réciproque. Notamment dans des formulations d'élèves on relève que certains confondent  $\sqrt{a}$ ,  $a$  et  $a^2$ . Pour que  $\sqrt{a}$  existe certains disent que  $a$  est au carré, que  $a = a^2$ , que  $\sqrt{a}$  est égale à  $a^2$ .

Pendant la période des mathématiques modernes qui privilégiait l'étude des relations et des fonctions dès le début du cycle fondamental, de nombreux manuels présentaient cette notion directement à l'aide de la notion de fonction réciproque, en admettant ou suggérant le caractère bijectif de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}_+$ .

La définition de la notion de racine carrée, quelqu'en soit la présentation, est en fait une définition de fonction réciproque, celle de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}_+$ , même si elle n'est pas explicitée. On ne peut y échapper et l'apprentissage du concept doit l'intégrer, au moins implicitement, pour la construction d'une signification satisfaisante.

#### Complexification de la difficulté

La complexité est accentuée, ici, par l'absence de construction explicite de cette fonction réciproque. On ne dispose pas d'algorithme, de "formule" permettant un calcul direct, même pour les nombres entiers (non carrés parfaits), comme c'est le cas pour la plupart des fonctions rencontrées au cycle fondamental.

#### Des réponses possibles des élèves à cette difficulté

Les conceptions de type CA et D/2 peuvent être des réponses des élèves à cette "absence" de fonction réciproque. L'élève ne va plus pouvoir manipuler les racines carrées selon les algorithmes classiques sur les décimaux et les entiers, liés à l'écriture décimale, mais il devra utiliser les propriétés algébriques caractérisant ces nombres et la structure de corps. En particulier il devra considérer que  $\sqrt{a}$  est une désignation

satisfaisante et suffisante du nombre positif qui élevé au carré donne  $a$ . On sait que certains élèves rejettent cette désignation et la remplacent systématiquement par une valeur décimale (qui n'en est en général qu'une valeur approchée). Par exemple ils donnent comme solution de l'équation  $x^2 = 2$ , les nombres 1,414 et -1,414. Ce comportement est à rapprocher de la conception *Approximation CA* relevée dans l'histoire des mathématiques.

L'algorithme d'extraction approchée, l'usage d'une calculatrice, voire d'une table des carrés favorisent la mise en place chez l'élève d'une pseudo-fonction réciproque

$$\sqrt{\quad}: \text{SN} \text{ ----} \rightarrow \mathbf{D}$$

qui permet en pratique de résoudre un certain nombre de problèmes. Cette construction peut se consolider en classe si des résultats du type  $\sqrt{2} \approx 1,41$ , voire  $\sqrt{2} = 1,41$ , sont conservés sans une analyse critique sur leurs significations.

De même une conception de type **D/2** peut être le résultat d'une recherche implicite de la fonction réciproque et dont l'identification avec la "division par 2" peut être entretenue par une confusion entre carré et double, ou carré parfait et pair. Cette conception devrait être plus facile à déstabiliser que la première dans la mesure où il n'y a que deux valeurs (0 et 4) où les fonctions coïncident.

## VII.2. L'obstacle des nombres entiers ou rationnels et la conception CP

### Conditions de mise en place des connaissances sur la racine carrée

La notion de racine carrée est organiquement liée à la notion de nombre. Au moment d'aborder le concept de racine carrée, et même plus tard, les élèves n'ont vu et ne fonctionnent effectivement qu'avec des nombres rationnels ou décimaux, perçus eux mêmes souvent comme des entiers. De plus ils ont encore des difficultés avec ces nombres décimaux et rationnels. D'autre part les élèves n'ont pas vraiment construit le concept de nombre réel sur lequel on s'appuie pour définir et mettre en place la notion de racine carrée. En fait c'est cette notion qui permet, pour la première fois (à part le nombre  $\pi$ ), de manipuler, calculer et comparer des nombres autre que rationnels.

C'est à partir des connaissances sur les nombres et ce qu'on peut faire avec, que vont se mettre en place les conceptions sur le concept de racine carrée. L'apprentissage du concept va souvent s'ancrer sur une conception "pythagoricienne" du nombre, c'est-à-dire le nombre est essentiellement entier, même s'il prend des "formes" décimales ou rationnelles.

### Mise en place de la conception CP et stabilité

Nous avons vu que dans la caractérisation sommaire du concept il figure un élément que l'on a désigné, la "**condition**" : " $\sqrt{a}$  est un réel positif" . Avec une conception pythagoricienne du nombre la condition ne peut être "lue" implicitement que comme " $\sqrt{a}$  est un nombre positif du système de nombres SN", avec  $\text{SN} = \mathbb{Q}$  dans le meilleur des cas.

Il va alors se mettre en place pour beaucoup d'élèves une conception correspondante au modèle CP. Cette conception va être très stable. Sa stabilité repose sur une grande cohérence locale. Cette connaissance est valide, mais limitée. Par



exemple avec une telle lecture de la condition, le théorème " $\sqrt{a}$  existe si et seulement si  $a$  est carré parfait" est vrai. De plus ce théorème peut être appuyé par le fonctionnement pragmatique "ça existe si on peut le calculer", source de nombreuses difficultés ou obstacles dans l'évolution de la pensée mathématique.

L'origine de la conception CP-N est liée pour nous à une dégénérescence de la connaissance CP due à des difficultés avec la notion de fonction réciproque et avec les opérations sur les nombres.

### **Facteurs de renforcement par l'enseignement**

La fonction racine carrée apparaît dans la conception CP comme une fonction

$$\sqrt{\quad} : \mathbb{C} \text{ -----} \rightarrow \mathbb{SN}.$$

De plus une restriction de cette fonction, est "montrée" en général aux élèves, sous la forme symbolique d'une table des carrés de 0 à un certain entier, mais lue à l'envers.

La cohérence peut être aussi renforcée par l'enseignement si on ne pose, du moins au début, que des problèmes où les valeurs des variables permettent d'avoir des calculs qui tombent "justes", c'est-à-dire aboutissant à des racines carrées de carrés parfaits.

Dans les manuels officiels, en dehors du cas de la racine carrée de 3, éventuellement traité en 8ème il faut attendre le chapitre sur la racine carrée en classe de 9ème pour voir fonctionner des nombres non rationnels. Ceci peut conforter des élèves dans des conceptions du type "CP" proche de la conception pythagoricienne du nombre.

### **Evolutions possibles et résistance de la conception CP**

Pour échapper à la contradiction, si elle est perçue, l'élève va peut être évoluer vers des conceptions de type CF qui permettent de donner des réponses pour des exercices formels, ou vers des conceptions de type CA qui peuvent résoudre, d'une certaine manière, des situations comme l'exercice 3 du test.

Les nombreux exercices de simplifications ou de transformations d'expressions contenant des radicaux sont souvent traités sans aucun lien avec des situations de mesure ou des situations où les racines carrées ont explicitement le statut de nombre. Ceci risque de conforter une conception formelle "CF" et de faire considérer les racines carrées comme des nombres artificiels, des artifices utilisés dans les calculs. Nous savons que cela s'est présenté dans l'histoire des mathématiques et même aussi pour les négatifs et les fractions.

Dans le manuel de 9ème on trouve dix pages sur l'approximation décimale de racines carrées. On donne des méthodes et des conseils pratiques pour calculer des valeurs approchées à 1, 0,1, 0,01, 0,001 près.

Les statuts des valeurs approchées d'un nombre, de sa représentation décimale illimitée et du nombre lui-même ne sont peut-être pas encore clairement perçus à ce stade de la scolarité.

De plus le manuel de 8ème veut indiquer l'asservissement pratique de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{D}$ , mais ceci n'est pas sans ambiguïté (page 224 du manuel) :

*"Si, pour introduire la notion de nombres réels et justifier l'existence de ces nouveaux nombres nous avons recouru à la notion de mesure il n'en demeure pas*

*moins que dans la pratique on ne se sert que des décimaux. En effet on est et on sera toujours limité par la précision des mesures.*

*Dans le premier exemple étudié, est-on sûr, d'une part, que la longueur du fil soit exactement un mètre ? d'autre part, que 3 morceaux mesurant respectivement 0,3332 ; 0,3333 ; 0,3334 ne paraîtront pas de même longueur à l'oeil nu ?*

*Les décimaux ou tout au moins des encadrements distingués sont souvent suffisants dans la pratique". Cela peut favoriser la mise en place d'une conception CA à partir de connaissances de type CP. Mais souvent la conception CP se refait sentir même s'il y a eu une certaine évolution dans certaines situations. Elle est très résistante à une évolution vers des modèles CA et CF, voire CN, comme on a pu le constater dans de nombreux cas.*

### **VII.3. La conception CP comme objet d'enseignement en 8ème**

Selon la condition et le système de nombres associé, on change la connaissance à construire. C'est ainsi que le programme de 8ème année demande explicitement de faire acquérir par les élèves cette connaissance CP avec  $\mathbb{N} = \mathbb{D}$ . Après avoir défini "la racine carrée dans  $\mathbb{D}$  d'un nombre décimal" le manuel propose la recherche de la racine carrée dans  $\mathbb{D}$  de deux nombres décimaux carrés parfaits 3,24 et 199, 9396. Le paragraphe se termine par le cas du nombre 3 et donne en conclusion la formulation "3 n'a pas de racine carrée".

La conception CP n'est pas une connaissance erronée ; on la trouve même dans les programmes ! Mais elle est plutôt étriquée par rapport à celle qu'on veut mettre en place en 9ème. Elle va produire des erreurs que si on se place d'un autre point de vue pour la condition.

Ce choix, au niveau de la transposition didactique, de la connaissance CP comme objet d'enseignement en 8ème au Mali peut être un facteur important de renforcement de la stabilité et la résistance de ces conceptions de type CP.

### **VII.4. Relativité des connaissances**

Nous avons vu que la connaissance CP est une connaissance valide, mais limitée. En classe de 9ème il est demandé de mettre en place une connaissance plus large, celle de "racine carrée dans  $\mathbb{R}$ ". Cependant, même la notion de "racine carrée dans  $\mathbb{R}$ " est une connaissance locale, et n'est pas la plus optimale par rapport à celle de "racine carrée dans  $\mathbb{C}$ " ( $\mathbb{C}$  corps des nombres complexes), qu'il faut mettre en place dans les classes terminales. La condition " $\sqrt{a}$  est un réel positif" est alors remplacée par "les racines carrées de  $a$  sont des nombres complexes" et le système de nombres est  $\mathbb{C}$ . La connaissance est changée ; les nombres négatifs ont des racines carrées et toute équation du second degré a des solutions dans  $\mathbb{C}$ .

Les connaissances sont ainsi relatives et la transposition didactique fait un choix parmi celles là selon les acquis des élèves et les besoins de la formation. Ce choix au niveau de la notion de racine carrée s'effectue en relation à un système de nombres en fonction des problèmes à résoudre.

### VII.5. La conception CP, obstacle épistémologique et didactique

En conclusion de cette étude nous voyons que la conception CP est un bon candidat comme obstacle épistémologique (Brousseau 1983). En particulier les conditions données par Duroux (1982) sont vérifiées :

a) Il s'agit d'une connaissance, non pas d'une difficulté ou d'un manque de connaissance. Elle produit des réponses correctes pour certaines situations et pour certaines valeurs des variables.

b) L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou pour d'autres valeurs des variables, va provoquer des erreurs spécifiques, repérables, analysables.

c) L'obstacle est une connaissance stable, elle résiste aux contradictions par une adaptation à tout prix.

d) Même, après une prise de conscience de contradictions ou d'erreurs provoquées par cette connaissance, elle continue à se manifester.

De plus l'enseignement effectif de cette connaissance en 8ème (avec  $\mathbb{N}=\mathbb{D}$ ) en fait aussi un obstacle didactique renforçant l'obstacle épistémologique CP constitutif du concept.

### VII.6. La réussite de l'apprentissage

Pour réussir l'apprentissage de ce concept il faut que l'élève fasse sa *crise des irrationnels*. On ne peut espérer que la plupart des élèves la réalise et la franchisse facilement et rapidement. Une certaine maturité est à atteindre comme le suggèrent les travaux sur les connaissances des élèves et les difficiles tentatives de dépassement de l'obstacle des illustres mathématiciens grecs.

Le fonctionnement correct aux situations des exercices 2 et 3 est aussi une étape décisive sur l'évolution des connaissances à propos du concept de racine carrée. Cette évolution ne peut être effective que parallèlement à une évolution sur les nombres. Le concept de racine carrée va se former sur plusieurs années et nécessite une remise en cause des connaissances antérieures sur les nombres.

Les conditions de négociation de cette *crise* est un problème de didactique à étudier.

## BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. (1989), Racines carrées : Conceptions et mises en situations d'élèves de 4ème et 3ème, *Petit x n° 20 pp. 5 à 33*.

BRONNER A. (1991), Modélisation de connaissances d'élèves à propos de la racine carrée, *DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université J.Fourier, Grenoble*.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactiques des décimaux, *RDM Vol 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble*.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactiques des décimaux, *RDM Vol 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.*

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *RDM Vol 4.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.*

DUROUX A. (1982), La valeur absolue, difficultés majeures pour une notion mineure, *Mémoire de DEA de didactique, Université de Bordeaux 1.*

DUROUX A. (1983), La valeur absolue, difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit x n° 3 pp. 43-67.*

SOKONA M. (1989), Erreurs et conceptions d'élèves de 9ème, 10ème, 11ème sur la notion de racine carrée, *Mémoire de fin d'étude, ENSUP, Bamako.*

VERGNAUD G. (1984), Interactions sujet-situation, *Actes de la 3ème école d'été de didactiques des mathématique, Institut Imag, Université J.Fourier, Grenoble.*

**ANNEXE****SCHEMA DES HIERARCHIES DE MODELES**