DE LA FIGURE VERS LA DEMONSTRATION

D. BERGUE, J. BORREANI, B. POULAIN
Groupe didactique, IREN de Rouen

Introduction

Le raisonnement déductif et l'apprentissage de la démonstration sont, dans les nouveaux programmes, des objectifs de l'enseignement des mathématiques dans le 1er cycle.

"L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration".
Commentaires des programmes de 3ème B.O. n° 12 - 23 Nov. 89.

Le raisonnement ne s'applique pas seulement à la démarche de résolution de problèmes de géométrie mais il "mérite d'être poursuivi comme l'un des objectifs de la géométrie" (Pluvinage, 1989).

Les exigences dans ces nouveaux programmes ont été réduites, mais par rapport au raisonnement les difficultés restent nombreuses.

Elles sont liées :
- aux obstacles épistémologiques et didactiques. Par exemple la confusion entre droite et segment est commune dans le 1er cycle ;
- à l'hétérogénéité des élèves. Beaucoup n'ont pas atteint un stade d'abstraction nécessaire. Ils utilisent les connaissances empiriques qu'ils ont de l'espace et s'écartent difficilement du domaine physique. Or l'idéalisation des objets mathématiques est nécessaire à la démonstration ;
- à l'usage du français. Un premier obstacle se situe au niveau de la lecture (vocabulaire, compréhension d'un texte), un autre au niveau de la rédaction (argumentation, utilisation de la langue usuelle ou formalisée).

Souvent les résolutions de problèmes de géométrie sont proposées par le professeur sous forme d'exposé corrigé, de guidage par questions ou dialogue. Les élèves sont ensuite appelés à imiter ces méthodes. Or l'apprentissage par mimétisme n'a rien d'évident : "on cache aux élèves la partie heuristique du travail en ne restituant que le produit final rédigé alors que l'essentiel des difficultés se situe en amont de cette tâche" (Mesquita in "*sur une approche d'apprentissage à la démonstration*").

«petit x» n° 27 pp. 5 à 39, 1990-1991

Actuellement beaucoup d'enseignants se préoccupent de mieux comprendre les étapes de l'apprentissage du raisonnement en géométrie et de mettre en place les outils qui lui sont nécessaires.

Dans cet apprentissage, le rôle de la figure nous paraît essentiel. Une première étape est la prise en compte du dessin réalisé par l'élève comme figure générique ("primauté de l'appréhension perceptive sur l'interprétation figurale" mise en évidence par Duval, 1988).

Ensuite la perception de la figure intervient dans l'approche plus ou moins immédiate de résolution de problèmes et (ou) induit des formes de raisonnement. L'élaboration de la figure peut être congruente ou non à la démarche de résolution : figures et discours peuvent (ou non) utiliser les mêmes objets géométriques. En outre la figure risque de masquer des propriétés utiles à la recherche.

Notre façon d'envisager l'apprentissage s'avère proche de celle exprimée par l'IREM de Strasbourg dans la synthèse sur "le développement de compétences pour la géométrie" publiée dans le suivi scientifique 5ème.

Nous avons choisi :
- de travailler sur le statut de la figure ;
- d'observer son évolution dans les démarches de nos élèves ;
- d'évaluer l'influence de cette évolution sur leur méthodologie de raisonnement.

Pour le niveau 5ème - 4ème nous indiquons diverses situations permettant de faire prendre conscience de la différence entre dessin et figure et de la nécessité de justifier ses constructions. Nous analysons des difficultés liées à la résolution de problèmes de géométrie. Et nous proposons, pour aider à la mise en place de méthodologie de recherche, deux situations utilisant un outil peu usité dans le 1er cycle (les tangentes à un cercle), nécessitant en première partie un raisonnement simple mais dont les résultats ne sont pas évidents pour les élèves du 1er cycle, permettant de distinguer les aspects heuristiques et discursifs dans le travail des élèves.

I - Quelques remarques épistémologiques

Les mathématiques se sont dégagées peu à peu d'activités pratiques (contrôles d'aires, de volumes, d'échanges commerciaux) pour aboutir à une pensée logique rationnelle. Un des premiers documents connus, le papyrus Rhind, écrit par le scribe égyptien Ahmes vers le XVIIIème siècle avant J-C., est une compilation de problèmes : surfaces de rectangle, disque, triangle, trapèze.

A une époque antérieure au VIème siècle avant J-C. en Grèce antique, seuls des constructions, des pavages, des décors (poteries, murs...) ont pu inspirer le géomètre. A partir du VIème siècle avant J-C, une pensée logique se développe, le raisonnement devient prépondérant et peut même être considéré comme un "acte social" : il faut convaincre l'autre. Pour Aristote "*connaître, c'est connaître par le moyen de la démonstration*".

C'est dans l'ouvrage de référence les "ELEMENTS" d'Euclide que l'on rencontre les premiers "rituels" d'une démonstration :

- la proposition : c'est l'énoncé en général de ce qu'il faut démontrer ;
- l'exposition (ou ecthèse) : c'est la construction de la figure ;
- la détermination : c'est l'explication de l'énoncé sur la figure avec éventuellement des constructions auxiliaires ;
- la démonstration proprement dite ;
- la conclusion : c'est la reformulation de la proposition comme résultat général.

La géométrie a un but, un objet, un sens différent de ceux de la géométrie pratique (problèmes d'arpentage, de toisé, d'architecture qui obligent à "carrer", à construire des lignes données). Cette opposition entre concret et abstrait continuera à jouer un rôle important en mathématiques. Pour Platon, la mathématique travaille sur des concepts abstraits : "*Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient ; si elle se borne à ce qui naît, elle ne nous convient pas.*"

A la base du platonisme ("*Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre*") , il y a la dichotomie entre savoir et savoir-faire, la distinction entre le monde des objets sensibles, imparfaits, changeants et le monde des Idées, modèles parfaits, éternels, immuables. Le mathématicien qui a une réflexion sur le domaine des Idées oppose démonstration et procédés d'obtention des figures. Les figures sont le résultat de procédés de construction liés au sujet qui les produit. Pour le mathématicien, lorsqu'il envisage une figure géométrique qu'il dessine, ce n'est pas le support imparfait qu'il considère, mais l'objet idéal, celui qui est issu de la définition :

"... Tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures".

La république, livre VI.

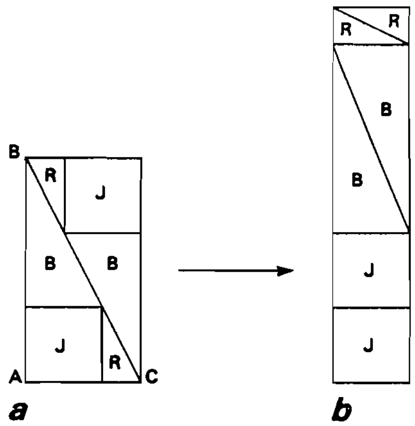
La construction d'une figure, support matériel, n'est alors qu'un symbolisme opératoire.

"Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et d'autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche ; qu'ils les traitent comme choses connues, et que, quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits ; qu'enfin partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquence à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher".

Ibidem

Les hypothèses posées, le raisonnement peut alors s'enchaîner sans plus faire appel au monde sensible. Il n'en est pas moins vrai que le géomètre s'écarte de l'énoncé abstrait pour élaborer une figure et appuyer son raisonnement sur les propriétés intuitives de l'espace (voir la 1ère proposition d'Euclide - construction d'un triangle équilatéral, deux arcs de cercle étant supposés se couper).

Cette rupture entre géométrie d'observation (tracés de figures, usage d'instruments) et géométrie de déduction a pris naissance en Grèce. Dans les civilisations hindoues, égyptiennes, chinoises, la preuve s'appuie sur la figure.



Calcul du côté du carré inscrit dans un triangle rectangle (Liu Hui, IIIème siècle de notre ère) : assemblant comme en (b) les pièces correspondant à deux exemplaires du triangle rectangle initial (a), on forme un rectangle de longueur AB + AC et d'aire S. Comme l'aire totale de toutes ces pièces n'a pas changé en passant de (a) à (b) et qu'au départ $S = AB \times AC$, on trouve que le côté du carré est égal à $(AB \times AC)/(AB + AC)$. Nous avons noté J, R, B ces pièces car Liu Hui utilise des figures colorées en jaune, rouge et bleu.

Le matin des mathématiciens - Martzloff - Belin

Le Moyen-Age qui vit paraître des traductions latines des oeuvres grecques fut fasciné par leur contenu philosophique. Avec les premières critiques des démonstrations d'Euclide, la soif d'inventer se substitue au souci de convaincre. A la suite de bouleversements religieux scientifiques, véritable révolution intellectuelle, une autre conception de l'Univers se fait jour. L'utilité pratique des mathématiques et le monde des Idées évoqué par Platon s'y rejoignent. Guidobaldo (1545-1607), maître de Galilée, publie en 1600 six livres de perspective qui constituent un lien entre la pratique professionnelle des architectes et la représentation de l'espace. Les constructions ne sont plus des recettes mais de véritables démonstrations géométriques justifiées en vue d'applications pratiques. Galilée s'intéresse plus à la mesure et au fonctionnement des phénomènes qu'à leur explication.

Dans "*Le discours de la méthode*", Descartes va aboutir à une algébrisation de la géométrie. La géométrie de la règle et du compas perd sa première place au bénéfice d'une géométrie analytique.

La géométrie analytique s'appuie sur le mesurable ; la mesure s'éliminera progressivement pour tendre vers une étude de configuration au cours du XIXème siècle avec la géométrie projective. Un précurseur, Dürer, théoricien de l'Art de la Renaissance, est directement marqué par la conception platonicienne. A la pratique de la peinture et de la gravure il a voulu donner une base rigoureuse de tracés. Dans son ouvrage de géométrie pratique (*Underweysung der Messung*), les objets sont étudiés sous l'angle de leur nature physique avec proposition de constructions. Ce problème de la représentation des objets solides par des figures planes constitue une étape importante dans la recherche géométrique.

A partir de la méthode de double projection de Desargues, Monge développe la géométrie descriptive, qui reste encore une géométrie de l'espace physique.

"La géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives".

Géométrie descriptive, 1799.

La recherche par Poncelet d'une méthode de validation du raisonnement, de méthodes générales et non plus de démonstrations particulières à chaque figure est proche de l'idée de Descartes.

La géométrie projective, opère elle sur des figures de l'espace, tout introduisant des éléments idéaux : éléments imaginaires ou à l'infini. Cette exposition de la méthode des transformations, se trouve dans l'"*aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*" écrit par Chasles en 1837 :

"Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues : qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformation, et qu'on suive les diverses modifications ou transformations qu'éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure, et une propriété de cette figure, qui correspondra à celle de la première".

Dans les écrits de Chasles, on a pu distinguer deux types de propriétés géométriques des figures :

- les propriétés métriques (dépendent des grandeurs) ;
- les propriétés descriptives (dépendent des formes, des situations) ;

Chasles écrit dans "Traité de géométrie supérieure" (1880) :

"Certaines parties d'une figure considérée dans un état général de construction, peuvent être réelles ou imaginaires, indifféremment... Quand ces parties sont réelles, nous dirons que le fait de leur existence est une propriété contingente de la figure, et, pour distinguer ces parties elles-mêmes de celles qui sont absolues ou permanentes, nous les appellerons parties contingentes.

Cela posé, il arrive souvent que ces parties contingentes (c'est-à-dire qui peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires) servent utilement, dans le cas de la réalité, pour la démonstration d'un théorème, et que cette démonstration n'ait plus lieu quand ces mêmes parties deviennent imaginaires. Alors on dit qu'en vertu du principe de continuité le théorème démontré dans le premier cas s'étend au second, et on l'énoncera d'une manière générale.

Quelquefois le contraire a lieu, et c'est quand certaines parties d'une figure sont imaginaires que l'on y trouve les éléments d'une démonstration facile, dont on *applique ensuite les conséquences, en vertu du principe de continuité au cas où ces mêmes parties sont réelles et où la démonstration n'existe plus".*

La véritable rupture n'interviendra qu'au XIXème siècle : c'est le raisonnement formel qui permet de définir l'objet géométrique. Cependant, il est remarquable de voir que Gauss et Lobatchevski ont une démarche euclidienne dans leur méthode : raisonnement appuyé sur les figures tout en essayant de se dégager de l'intuition. En 1838, Lobatchevski écrivait dans les "*Nouveaux Principes de la Géométrie*":

"En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement, c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement, et pour cette raison, l'espace lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous. Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines formes de la nature suivent une géométrie, et d'autres, leur géométrie propre...

Les surfaces, les lignes, les points, comme la géométrie les définit, n'existent que dans notre imagination, tandis que nous mesurons les surfaces et les lignes en recourant aux corps".

Même s'il s'agit de dépasser l'intuition, les constructions géométriques abstraites jouent le rôle de possible pour représenter le réel. C'est ce qui permet à Riemann de définir "la vraie géométrie" comme un cas particulier parmi les espaces abstraits. Dans le programme d'Erlangen (1872), la vision physique de l'espace s'élargit avec une formalisation des concepts. Avec la théorie des groupes de transformations, Félix Klein va dégager des structures et transformer le point de vue. Il n'y a plus une géométrie, mais des géométries et c'est la structure du groupe qui caractérise une géométrie.

Jusqu'au XIXème siècle, la géométrie a reposé sur l'intuition. Avec l'introduction des structures, les objets mathématiques (figures, nombres, fonctions) sont écartés au profit des relations entre les objets. C'est sur ces relations que va porter le raisonnement. En principe, les propriétés des figures et leurs utilisations sont exclues des démonstrations des mathématiques actuelles. *"Aujourd'hui comme en 250 avant J-C, le mathématicien ne peut s'empêcher de tracer des figures (fût-ce discrètement, dans un petit coin de tableau), de raisonner sur des diagrammes et de spatialiser les relations les plus abstraites (surface de Riemann, graphes associés à des groupes)".*
F. de Gandt - Actes de l'Université d'été sur l'Histoire des Mathématiques, juillet 1984.

Avec le formalisme, le statut d'axiome change et cela pose le problème de démonstration sur le plan didactique. La connaissance des cheminements essais-erreurs qui ont été nécessaires à l'élaboration de notions mathématiques permettent une analyse des étapes d'apprentissage nécessaires à nos élèves et à la compréhension des obstacles auxquels ils se heurtent.

Si l'épistémologie permet de retrouver du sens et peut être une aide à la compréhension des difficultés, néanmoins "le développement (cognitif) d'individu n'est pas le calque en réduction du développement de l'espèce humaine (G Brousseau dans *Le Dire et Le Faire*).

II - Parallélogrammes et triangles

1 - REFLEXIONS PREALABLES

En début d'année, au travers d'exercices de constructions ou de lecture de dessins nous avons examiné la manière dont la figure était utilisée concrètement dans nos classes de 4ème. Quelles démarches met "naturellement" en oeuvre un élève de 4ème avant tout apprentissage de la démonstration ?

Nous pouvons dégager les remarques suivantes :

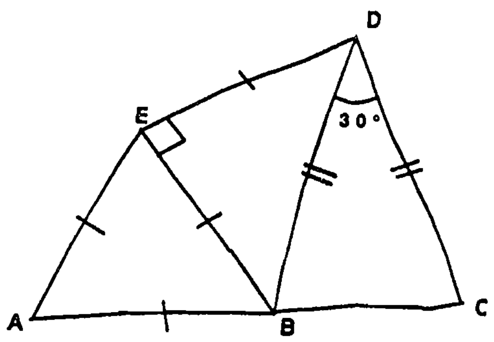
1) Une figure construite permet d'effectuer des mesures qui aux yeux des élèves sont forcément exactes. Il n'y a pas pour eux de problème d'approximation. Ces mesures sont en elles-mêmes une preuve.

Exemple : "Je mesure : AC = 4 cm et AB = 4 cm sur mon dessin donc AB = AC et le triangle ABC est isocèle."

De plus pour beaucoup, les seuls nombres qui existent, sont, comme pour les Grecs, les nombres entiers ou les rapports de nombres entiers.

2) La simple observation de la figure construite constitue en soit une réponse.
Exemple : "Le triangle est équilatéral, je le vois sur mon dessin."

3) La vision du dessin est globale.



Dans cette figure, de nombreux élèves restent bloqués ou donnent pour les angles des valeurs qui paraissent aléatoires. Ils cherchent, semble-t-il une réponse globale en refusant de "séparer" les triangles.

Nous pouvons aussi remarquer que la méthode de construction d'une figure peut induire la nécessité de répondre implicitement à la question qui sera posée ensuite.

Exemple : "Construire l'image C du point D dans la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?". La construction sous-entend que l'élève sait déjà que ABCD est un parallélogramme. Quel sens peut-il donner à la question ?

Au travers des divers exemples ci-dessus, on se rend compte que les renseignements fournis par l'observation d'une figure peuvent en fait induire un blocage dans l'évolution du raisonnement de l'élève et s'opposer à la recherche d'autres outils de preuve.

La construction des diverses séquences est le reflet de quelques options quant à la manière de faire travailler nos élèves :

- nous souhaitons les sécuriser : en effet, l'accessibilité d'un concept n'est possible que si les outils nécessaires à sa construction sont familiers. L'élève peut s'approprier les situations proposées, s'il ne se sent pas "agressé par un milieu" qui lui resterait extérieur ;

- nous acceptons et valorisons l'ensemble des productions d'un élève : son travail - indépendamment de son adéquation au problème posé - est respectable. Ce respect entraîne une réaction immédiate et visible, un souci d'une présentation plus soignée, et plus important, beaucoup d'élèves cherchent à mener une réflexion plus approfondie ;

- nous voulons aussi favoriser une meilleure mémorisation par la création d'images mentales. La mémorisation passe par la formation d'images mentales associées aux objets, concepts, idées. Les différents domaines sensoriels, auditif, visuel, kinesthésique doivent être mobilisés (effet de synergie possible).

Nous pensons qu'en mathématique cette mémorisation ne se fait ni par dressage, ni facilement. Il faut du temps. C'est pourquoi nous choisissons par exemple de faire fabriquer des fiches en géométrie sur lesquelles chaque propriété est associée à un petit dessin (fiches à la disposition des apprenants à tout moment qui seront lues et relues au cours des activités réactivant ainsi la mémoire sous toutes ses formes).

2 - DEMARCHE MISE EN PLACE

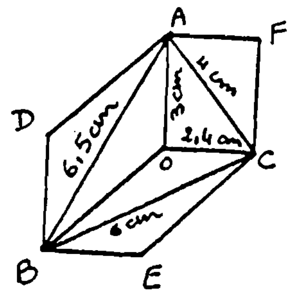
Nous avons donc pensé qu'il fallait dès la 6ème - 5ème proposer des exercices qui, sans parler de démonstration, fassent évoluer progressivement le statut de la figure de façon qu'à l'entrée en 4ème celle-ci ne soit plus un obstacle à l'apprentissage de la démonstration. Si beaucoup d'élèves de 4ème n'osent plus faire état des "évidences" qu'ils voient sur la figure, car ils savent que le professeur attend d'eux qu'ils écrivent des propriétés, ils ne peuvent pour autant amorcer un raisonnement car leur vision est incomplète et faussée.

Au travers d'activités centrées sur les thèmes parallélogrammes et droites remarquables d'un triangle* :

1) Nous avons présenté la ou les notions qui ont été ensuite institutionnalisées :
- centre de symétrie d'un parallélogramme ;
- propriété du parallélogramme (Annexe 1) ;
- droites dans le triangle (par pliage puis par construction) ;
- somme des angles d'un triangle.

2) Nous avons ensuite fait fonctionner ces notions de manière implicite :
- dans des constructions à réaliser ;

exemple : reproduire en vraie grandeur.

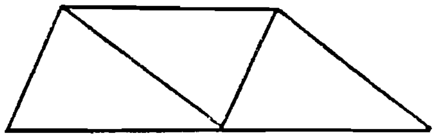


* Les séquences sont décrites dans "De la figure vers la démonstration I" IREM de Rouen. La séquence parallélogramme n°2 est partiellement présentée en annexe.

Une rédaction de la méthode de construction est ensuite demandée avec mise en évidence de la propriété utilisée (un pas vers l'explicitation est ici fait).

Remarque : Suivant le niveau d'abstraction atteint par les élèves, il semble que l'ordre de construction des points soit important. Des élèves sont persuadés obtenir des résultats différents suivant le point de départ. Seule la confrontation des différents dessins obtenus les convaincra de l'unicité de la figure.

- dans des exercices comme celui-ci (à partir d'un exercice proposé dans le "Suivi scientifique 5ème" par l'IREM de Strasbourg)



ABCD est un parallélogramme.
On mène par C, la parallèle à la diagonale DB.
Cette parallèle coupe en E la droite AB.
Placer les lettres sur la figure ci-contre.

Le dessin est donné aux élèves. La consigne est : "ne pas effectuer soi-même la construction mais placer les lettres pour que la figure corresponde au texte".

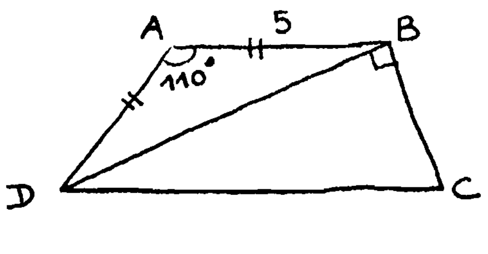
Au travers de ces exercices nous avons cherché à montrer :
- la différence entre dessin et figure ;
- le rôle que les figures peuvent jouer dans l'explicitation de propriétés.

3) Nous avons enfin proposé des exercices nécessitant dans leur réalisation une explicitation (description ou approche de raisonnement). Les données de départ n'étant plus seulement un dessin, mais pouvant être un petit texte.

exemple 1 : Droites particulières du triangle.

A partir d'une activité proposée par l'APM en 1985 (repris dans Pythagore 5ème p. 169) les élèves réalisent les constructions, indiquent à l'aide de symboles les "caractéristiques" de chaque droite, décrivent leur construction, et récrivent les définitions à leur manière.

exemple 2 :



(AB) // (OC)
Calculer les mesures de tous les angles et les justifier.

exemple 3 : Sur une droite (D), marquer deux points A et B. Prendre un point O extérieur à la droite. Construire les symétriques A' et B' de A et B par rapport à O. Expliquer votre construction. Que peut-on dire des droites A'B' et AB ?

Dans cette partie, les diverses notions ne sont pas objet d'étude et fonctionnent en tant qu'outil permettant des constructions (outil implicite) ou des justifications de propriétés (outil explicité par écrit ou oralement).

3 - CONCLUSION

Au terme de ce travail, les élèves de 5ème font encore une grande confusion entre description d'une figure ou d'une construction et justification de la construction. Autrement dit malgré les thèmes étudiés il semble bien qu'en 5ème (même avec des élèves plus âgés ce qui est le cas dans les cycles en 3 ans) on ait du mal à faire dépasser le premier stade de description et de reconnaissance de structures d'une figure-dessin.

Le deuxième stade de formulation de preuves, beaucoup plus difficile même sans formalisme excessif, n'est abordé que pour environ un quart des élèves (mais pas toujours maîtrisé). Est-ce utile de souligner que ce sont ceux dont les résultats généraux sont satisfaisants ? Fonctionnant avec des élèves pleins de bonne volonté mais ayant des difficultés d'apprentissage, un environnement peu favorable, peut-être après tout qu'un tel résultat est un encouragement à approfondir ce travail.

III - A partir d'une proposition d'Euclide : activités en 4ème

Dans les programmes de 4ème l'accent est mis sur "l'entraînement au raisonnement déductif tout en évitant les exigences prématurées de formulation. La description et la représentation d'objets géométriques usuels du plan demeurent des objectifs fondamentaux".

Parmi ces objets, la bissectrice reliée à la notion d'équidistance présente bien des difficultés pour les élèves de 4ème - 3ème. Elle est perçue comme divisant un angle en deux angles de même mesure. Cette vision prégnante, issue de l'école primaire, masque la propriété d'axe de symétrie ou d'ensemble de points équidistants des côtés de l'angle de la bissectrice. La construction traditionnelle au compas est bien réalisée la plupart du temps mais son sens se trouve perdu lors d'applications.

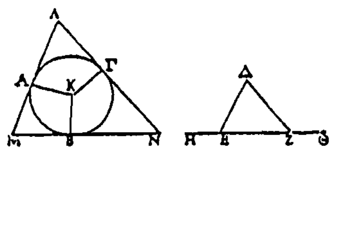
Nous avons cherché des problèmes d'inscription de figures régulières dans un cercle où cette construction de la bissectrice est un outil performant, l'utilisation de l'équidistance étant souvent nécessaire à l'explicitation de la preuve.

On trouve dans les "éléments" d'Euclide Livres III et IV des propositions concernant le cercle et les figures planes régulières circonscrites à un cercle. En particulier la proposition III du livre IV :

PROPOSITION III.

A un cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Soit ABΓ le cercle donné, et ΔEZ le triangle donné ; il faut au cercle ABΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔEZ.



Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère ΑΜΒΚ peut se diviser en deux triangles ; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles ΜΑΚ, ΚΒΜ sont droits ; donc les angles restants ΑΚΒ, ΑΜΒ sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔΕΗ, ΔΕΖ sont égaux à deux droits (13. 1) ; donc les angles ΑΚΒ, ΑΜΒ sont égaux aux angles ΔΕΗ, ΔΕΖ ; mais l'angle ΑΚΒ est égal à l'angle ΔΕΗ ; donc l'angle restant ΑΜΒ est égal à l'angle restant ΔΕΖ. Nous démontrerons semblablement que l'angle ΛΝΜ est égal à l'angle ΔΖΕ ; donc l'angle restant ΜΛΝ est égal à l'angle restant ΕΔΖ (32. 1). Donc le triangle ΛΜΝ est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

D'un point de vue mathématique la résolution du problème se base chez Euclide sur :

- le concept de géométrie du mouvement (report d'angles égaux) ;
- les constructions et propriétés de perpendicularité d'une tangente ;
- la théorie des parallèles et son application à la somme des angles d'un triangle et d'un quadrilatère ;
- l'application d'un axiome (en soustrayant des quantités égales à des quantités égales, on obtient des quantités égales) ;
- la définition de figure circonscrite à un cercle.

La multiplicité des tâches, l'introduction d'éléments supplémentaires (définitions, propriétés, théorèmes) complexifient les démarches heuristiques et les démarches de preuve de façon trop importante pour des élèves de 4ème - 3ème.

Nous avons donc proposé aux élèves une première activité qui les conduise à travailler dans une recomposition progressive de la figure : "inscrire un cercle dans un triangle donné" (proposition IV livre IV).

Pour faire émerger la richesse des stratégies possibles, la consigne donnée aux élèves a pris finalement la forme suivante :

Construire :
* *des cercles tangents à une droite ;*
* *des cercles tangents à deux droites ;*
* *des cercles tangents à trois droites ;*
pour chaque cas :
* *écrire une description des méthodes en justifiant si possible par des propriétés ;*
* *écrire une conclusion.*

Après un passage dans une classe de 4ème nous avons noté pour que la quasi totalité des élèves :

- Pour une droite, il existe une infinité de cercle tangents mais à rayon constant.
- Pour deux droites, l'ordre des constructions est : 1ère droite, cercles, 2ème droite.

Les élèves rajoutent des contraintes qui induisent des cas particuliers en transformant le texte de la consigne. Pour pallier ces difficultés la première partie de la consigne a été modifiée comme suit :

Construire :
* *une droite et des cercles tangents à cette droite ;*
* *deux droites et des cercles tangents à ces 2 droites ;*
* *trois droites et des cercles tangents à ces 3 droites*

Cette première activité permet :
- une pratique des tracés de figure mettant en jeu des triangles et des cercles
- une explicitation des outils que l'on manipule (la réalisation de la figure peut être l'occasion d'un raisonnement explicite).

Elle va être une préparation à la recherche de la proposition III livre IV des Elements d'Euclide que nous proposons aux élèves sous la formulation suivante :

Voici un cercle de centre O, on veut l'inscrire dans un triangle ABC dont les angles mesurent $A = 40°$ $B = 60°$ $C = 80°$;
* *Comment construire un triangle ABC ;*
* *Ecrire les étapes de la construction en justifiant au fur et à mesure par des propriétés.*

A - activité droites et cercles

1 - METHODOLOGIE

L'activité a été proposée à des élèves en groupe de 2, 3 ou 4 :
* Avec la première formulation de la consigne (*consigne 1*) dans une classe de 4ème-3ème en 3 ans (2ème année du cycle) de 15 élèves répartis en 4 groupes.
* Avec la consigne modifiée (*consigne 2*) dans 2 classes de 4ème de 18 élèves chacune, l'une d'un niveau correct (5 groupes et un élève qui a travaillé individuellement), l'autre d'un niveau beaucoup plus faible (5 groupes) .

Les élèves ont travaillé 2 heures sur l'activité. Certains groupes étaient observés, les observateurs ayant une grille d'observation et des conseils d'intervention pour éviter certains blocages ou encourager des recherches plus approfondies.

Tous les travaux des élèves ont été relevés (brouillons compris). Des feuilles blanches ont été fournies pour réaliser les constructions et rédiger les conclusions, les explications, les validations.

2 - ANALYSE A PRIORI

2.1 Prérequis

Les élèves connaissent et ont écrit dans leur cours la définition de la tangente à un cercle ainsi que la définition de la bissectrice comme ensemble de points équidistants des côtés d'un angle. Ils connaissent aussi la propriété d'axe de symétrie de la bissectrice d'un angle.

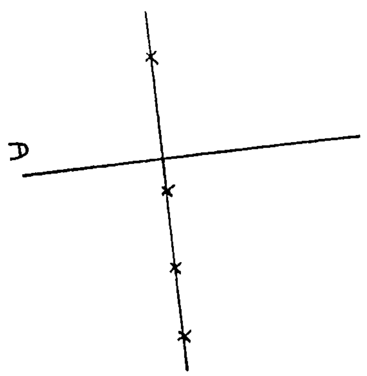
2.2 Analyse de la tâche

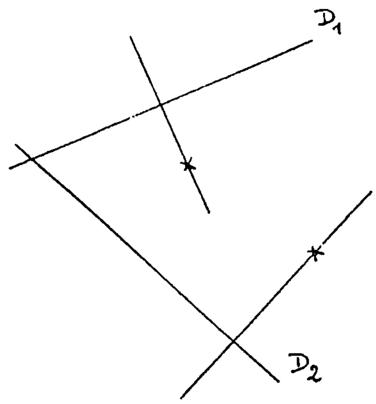
Cette activité est fondée sur la perception de la figure. Isoler un morceau de figure puis le réintroduire dans l'ensemble est une stratégie de recherche. La formulation de la consigne devrait amener les élèves à travailler ainsi.

Les stratégies envisagées sont :

a) découverte de centres convenant par tâtonnement, puis la construction étant réalisée retour sur une validation à l'aide de propriétés ;

b) En partant de la définition de la tangente, construction de perpendiculaires à une droite, puis deux droites, puis trois droites, découverte de l'alignement des centres, puis utilisation de l'équidistance.





c) Utilisation directe des bissectrices dans la construction ou bien après tâtonnement reconnaissance de la nécessité d'utiliser une bissectrice.

d) Réalisation de la construction à l'envers : cercle puis droites. Prise de conscience d'avoir traité le problème à l'envers - Analyse de la construction réalisée en supposant le problème résolu. Mise en évidence de la ou des bissectrices et utilisation de cet outil pour obtenir une construction correcte.

Les outils utilisés seront :

- la tangente à un cercle
- la bissectrice (dont la construction se fera au compas ou au rapporteur).

A chaque étape de la consigne, la manière dont est obtenue le premier cercle est déterminante pour l'évolution de la figure. Si les élèves privilégient une certaine habilité visuelle (tâtonnement), le temps d'apparition des autres cercles (et même le fait d'envisager leur existence) montre le passage à une construction raisonnée. En effet l'alignement des centres entraîne l'utilisation de perpendiculaires (dans le cas d'une droite) pensé comme ensemble de tous les centres de cercles tangents à la droite donnée. La bissectrice peut jouer le même rôle dans le cas de 2 et 3 droites.

On peut aussi voir si d'une étape à l'autre il y a réinvestissement dans le cas où il y a eu mise en place d'une méthode de construction : le cas de 3 droites sera-t-il partagé en sous-figure qui seront ensuite recombinées ?

Dans ce cas, la vision du triangle qui est "dominante" dans la figure empêche-t-elle l'utilisation de la méthode de construction pour obtenir les cercles exinscrits ?

Toutes les positions des droites sont-elles envisagées ? Pour que les élèves ne restent pas bloqués, les observateurs peuvent poser la question *êtes-vous sûrs qu'il n'y en a pas d'autres possibles ?*"

Dans le cas de trois droites concourantes les élèves se posent-ils la question de l'existence d'un cercle point ?

3 - ANALYSE DES DEMARCHES

3.1 Cas d'une droite :

Avec la consigne 1 : Dans la classe de 4ème - 3ème en 3 ans, tous les élèves construisent une droite, puis les cercles dont les centres sont alignés sur une parallèle : ils ajoutent une consigne supplémentaire, le rayon est fixe. La validation se fait par la propriété de la tangente.

Un seul cercle avait été tracé dans le cours, peut-être est-ce cela qui induit la construction à rayon constant.

Avec la consigne 2 : Dans les 2 autres classes de 4ème, le "théorème élève" rayon constant, n'est plus vérifié. La majorité des élèves construit des cercles de chaque côté de la droite avec des rayons différents. La validation se fait également par la propriété de la tangente. L'apparition de cercles de rayons différents est sans doute liée avec une situation étudiée précédemment : ensemble de points situés à distance donnée d'une droite donnée.

Les élèves qui ont construit le cercle tangent par tâtonnement n'ont pas réussi à fournir une justification de leurs résultats.

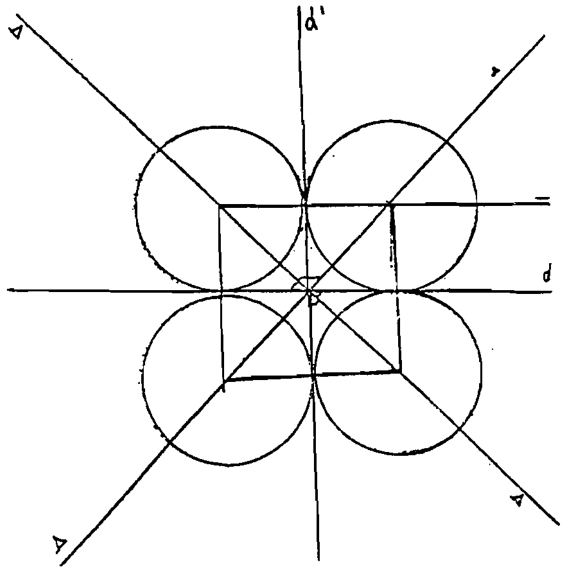
*En conclusion :*1) Certains élèves ne tracent qu'un seul cercle et veulent passer immédiatement à l'étape suivante avec deux droites. Pour inciter l'élève à davantage de réflexion, l'observateur a la consigne d'intervenir en posant la question : *"êtes - vous sûr qu'il n'y en a pas d'autres possibles ?"*.

2) L'influence de l'évolution de la consigne n'est pas visible dans ce cas. Les élèves ont tous construit une droite puis un ou des cercles tangents.

3.2 Cas de deux droites :

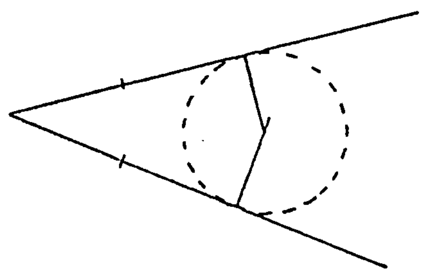
Avec la consigne 1 : Dans la classe de 4ème-3ème en 3 ans, on retrouve la contrainte d'un rayon constant ajoutée par les élèves à la première question.

Deux groupes n'envisagent au départ que des droites parallèles. Quand sur l'insistance de l'observateur ils envisagent une autre position des droites : elles sont perpendiculaires avec des cercles tangents dont les centres sont les sommets d'un carré.

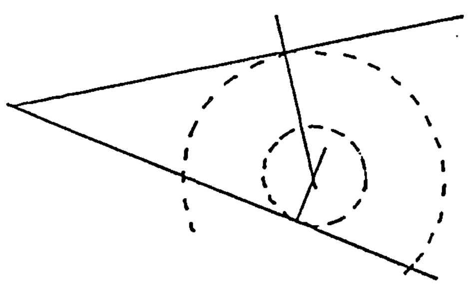


Les deux autres groupes envisagent 2 droites sécantes non perpendiculaires.

Avec la consigne 2 : Dans la classe de 4ème de niveau faible, un groupe d'élèves a d'abord tracé un cercle puis construit les 2 tangentes à ce cercle issues d'un même point. Ces élèves ont sans doute voulu réinvestir cette construction réalisée en classe précédemment.



Pour les droites sécantes, l'influence des activités de la recherche précédente se fait également sentir dans les 2 classes de 4ème. La notion de bissectrice d'un angle a été abordée par construction de l'ensemble des points équidistants à 2 droites données. Une grande partie des élèves retrouve les centres des cercles tangents par construction de 2 perpendiculaires.



Dans 3 groupes on voit apparaître une erreur de construction : les pieds des 2 perpendiculaires aux 2 droites sécantes ne sont pas situées à égale distance du point d''intersection des 2 droites. On obtient alors un cercle tangent à une droite et un cercle tangent à l'autre droite de rayons différents.

D'autre part, si la construction classique de la bissectrice est amorcée au compas avec construction d'arcs de cercles sécants, la bissectrice elle-même n'est pas tracée. C'est le seul point d'intersection des 2 arcs de cercles qui est pris comme centre du cercle tangent. Les autres centres des cercles tangents sont obtenus par la même construction réitérée plusieurs fois.

Les élèves font fonctionner l'outil bissectrice de manière implicite mais il semble qu'ils n'utilisent que les points construits sans envisager la bissectrice comme ensemble de points équidistants aux deux côtés de l'angle.

En conclusion :

1) La plupart des élèves ayant envisagé une seule position, ont eu du mal à accepter d'imaginer d'autres situations possibles. Pour essayer de les faire apparaître, l'observateur est intervenu en posant la question : *"y a-t-il d'autres positions des droites ?"*.

L'ordre d'apparition des dessins successifs est le suivant :

- il est toujours dessiné en premier deux droites parallèles. Cela est compréhensible pour les élèves qui n'avaient que des cercles de même rayon dans le cas d'une droite, mais la priorité de ce choix pour tous les autres groupes est surprenante
- en second apparaît souvent pour les sécantes la position de deux droites perpendiculaires particulièrement dans les deux classes de niveau plus faible
- enfin la construction de deux droites sécantes quelconques apparemment plus facile à tracer, n'est envisagée que sous l'influence de l'intervention de l'observateur pour la plupart des groupes, particulièrement dans les deux classes de niveau plus faible.

2) C'est dans cette deuxième partie que les dessins à main levée commencent à apparaître sur les brouillons et montrent que des élèves sans arriver à une construction correcte envisagent bien plusieurs positions possibles des droites et des cercles. Le passage du dessin "exact" à la figure représentant l'objet géométrique a été fait par ces élèves qui peuvent raisonner sur leurs dessins à main levée.

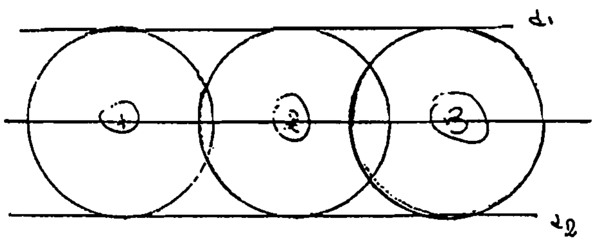
3) L'influence du changement de la consigne est plus notable dans ce deuxième cas.

Avec la consigne 1 on obtient des stratégies de types :

1) on trace les cercles.
2) rayon des cercles //
3) on trace la ligne des extrémités des rayons
2e cas
① on trace le premier cas + une autre tangente
②

1°) Méthode
nous avons tracé une droite
puis le rayon (O H) et le
cercle tangent à Δ ensuite
nous avons tracé la // à Δ
et tracé sa ⊥.

Dans le cas de la consigne 2 les droites sont toujours tracées en premier (sauf pour un élève). On voit alors de réels problèmes de construction se poser nécessitant l'utilisation de propriétés d'équidistance.



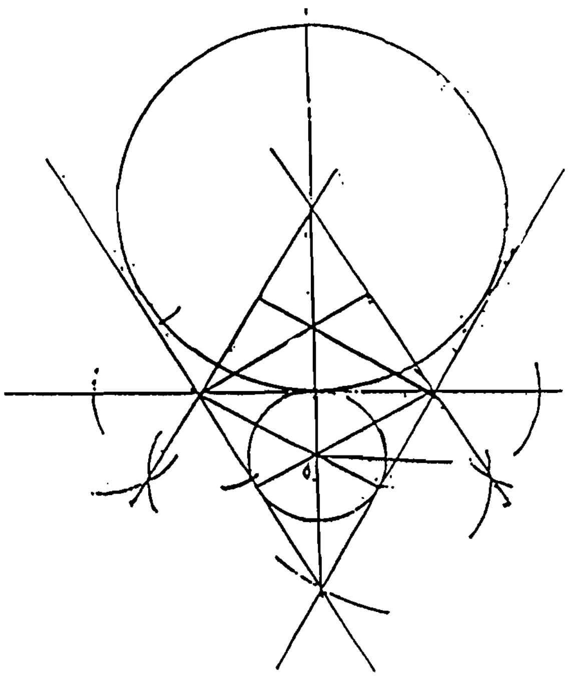
3.3 Cas de trois droites :

Avec la consigne 1 : Dans la classe de 4ème -3ème

- La position la plus souvent envisagée est celle de 2 droites parallèles perpendiculaires à une même troisième - on retrouve encore le rayon constant.

Le fait de ne trouver que 2 cercles seulement gêne les élèves qui pour en trouver d'autres oublient la condition des 3 droites tangentes et tracent des cercles extérieurs tangents à 1 ou 2 droites seulement.

- Si 3 droites sécantes quelconques sont envisagées, alors les élèves trouvent qu'un triangle équilatéral simplifie la question. Ils n'arrivent que dans un seul cas à envisager non seulement le cercle intérieur mais aussi les cercles extérieurs au triangle : un élève trouve, essaie de valider en cherchant une "espèce de symétrie" du centre du cercle intérieur et d'un des cercles extérieurs.

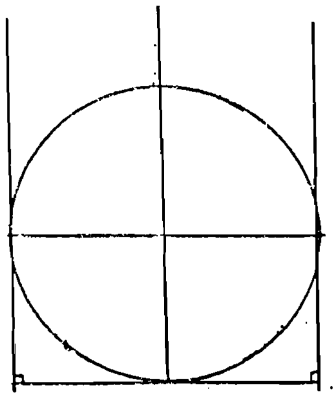


Avec la Consigne 2 : Dans les 2 autres classes on trouve les même types de construction.

On rencontre de plus :

* 3 droites parallèles entre elles, cette construction envisagée au brouillon est très rapidement abandonnée, après s'être fait préciser auprès du professeur que les cercles doivent être tangents simultanément aux trois droites.

* 3 droites, considérées comme des segments perpendiculaires 2 à 2, les élèves obtiennent alors un seul cercle.



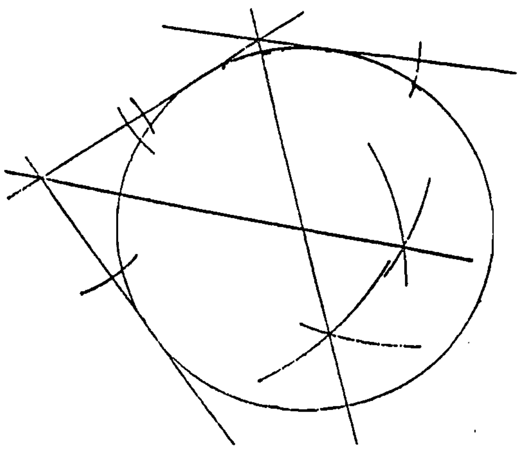
Nous avons pris le milieu de chaque droite et nous avons tracer de tel façon qu'elles se croisent. Nous avons pris le point d'intersection et nous avons tracer le cercle.
il n'y a qu'un cercle dans ce cas.

* 2 droites parallèles et une sécante (non perpendiculaire), la construction de la bissectrice est alors bien réinvestie.

* Droites sécantes, le triangle obtenu est quelconque et 2 bissectrices seulement sont tracées pour obtenir le cercle intérieur tangent.

* Dans 2 groupes, le centre du cercle intérieur se construit avec des droites perpendiculaires comme dans la figure 2.

* Dans 3 groupes, en fait le triangle n'apparaît pas et les 2 bissectrices construites sont les bissectrices extérieures du triangle.



on a tracé la bissectrice des deux angles puis le point
d'intersection nous a donné le centre du Cercle
les 3 droites sont les tangentes du Cercle

Le cas de cercles tangents extérieurement a été envisagé dans de nombreux groupes, soit dans des dessins à main levée, soit avec une construction des bissectrices.

Les 3 droites concourantes sont apparues dans 2 groupes sans provoquer de discussion quant à l'existence du cercle réduit à un point. Cette position n'est pas étudiée par les élèves.

Les constructions menées le sont sans validation (un groupe a même obtenu les cercles par tâtonnement en imaginant visuellement le tracé des bissectrices).

Les élèves bien que gênés par le manque de temps envisagent des positions variées pour les 3 droites. Les observateurs n'auront pas à intervenir.
L'ordre d'apparition des figures est différent selon les groupes.

En conclusion :

Dans ce cas plus difficile, la consigne 2 a permis encore d'éviter la construction des cercles avant celle des tangentes. Il faut noter cependant que les élèves souvent choisissent des positions particulières des 3 droites. (triangle équilatéral, deux parallèles et une perpendiculaire, deux parallèles et une sécante).

Dans la classe de 4ème-3ème en 3 ans un groupe sur quatre et dans chacune des 2 autres classes de 4ème, la moitié des groupes ont envisagé une construction de cercles tangents à 3 droites dans le cas plus général.

4 - CONCLUSION

Les élèves ont été très actifs dans ce travail. A l'aise dans le maniement des divers outils, ils ont l'impression de bien maîtriser l'évolution du problème.

Les notions à utiliser (tangente, bissectrice) sont bien apparues, mais pour beaucoup de groupes, seuls des cas particuliers de positions des droites ont été envisagés. Pour que toutes les positions soient envisagées, peut-être faut-il modifier la consigne en parlant de "cercles aussi variés que possibles" cela pourrait éviter que les élèves ajoutent d'eux-mêmes des contraintes qui les bloquent dans leur recherche.

On retrouve ici des fonctionnements qui entraînent dans des problèmes de géométrie la construction de figures particulières et qui introduisent des erreurs dans la recherche des solutions. Par des activités avec constructions de diverses figures pour un même texte on peut conduire les élèves à discerner les contraintes de la figure, des contraintes qu'ils se créent.

Par ailleurs les observateurs ont pu noter que de nombreuses fois la consigne n'était pas respectée : les élèves traçaient le cercle avant la ou les tangentes. Cela s'était produit avec la première consigne, et sa modification n'a pas entraîné un changement réel de comportement. Les élèves n'ont pas compris que l'ordre de la construction "droite et cercle" était fixé, et introduisant une notion de succession. Pour eux, la figure finalement construite dans un ordre ou dans l'autre est la même.

L'analyse de la figure obtenue dans "le mauvais sens" pour remettre le programme de construction dans "le bon sens" n'est pas faite. Les élèves s'arrêtent à la construction estimant avoir répondu à la question. Ceux qui réalisent des dessins à main levée ont eu, dans tous les cas, davantage tendance à se poser des questions de réalisation avec les instruments de géométrie.

Nous pensions que d'une étape à l'autre (1, 2 puis 3 droites) il y aurait réinvestissement des résultats. Or chaque problème est pratiquement traité indépendamment : il y a juxtaposition. Ceci est particulièrement visible dans le cas de 3 droites. Si pour 2 droites, des élèves ont fini par utiliser les bissectrices, ils n'ont pas pensé que 3 droites conduisent à utiliser 3 fois cette construction. Ils ont construit une première bissectrice, puis ont cherché le centre du cercle tangent par tâtonnement.

Cette activité permet également de voir comment la représentation que les élèves ont d'un outil, favorise ou non leur démarche heuristique. A chaque étape, la découverte de la méthode de construction coïncide avec la démarche de validation. Or, suivant la représentation que les élèves ont de la bissectrice, l'émergence d'un procédé a été plus ou moins aisé. La bissectrice *axe de symétrie* est un concept trop peu opérationnel en 4ème pour que les élèves qui l'utilisent procèdent autrement que par tâtonnement. Par contre la bissectrice *ensemble de points équidistants* entraîne la construction de perpendiculaires et le lien "visuel" avec la tangente se fait plus aisément.

Enfin ce travail est aussi le moyen de mettre en oeuvre une certaine méthodologie de recherche. Observer et analyser une figure par morceaux et non dans sa globalité est souvent nécessaire pour orienter la recherche d'une question.

Ici le problème proposé se complexifie au fur et à mesure et permet de montrer aux élèves l'intérêt d'une telle analyse des figures (même si ici la figure globale n'apparait qu'à la fin).

B - Activité Cercles et Triangles

1- METHODOLOGIE

Les 3 mêmes classes ont travaillé en groupe pendant 2 heures.

La consigne a été dans les 3 classes :
Voici un cercle de centre O, on veut l'inscrire dans un triangle ABC dont les angles mesurent A=40°, B=60° et C=80°
* *comment construire un triangle ABC*
* *écrire les étapes de la construction en justifiant au fur et à mesure par des propriétés.*

La plupart des groupes ont été observés. Les observateurs avaient une grille d'observation et des consignes d'intervention pour éviter certains blocages.

Par groupe on a fourni 1 feuille avec le texte de consigne, 2 feuilles avec le cercle et des feuilles blanches pour le compte rendu.

Le dessin final a été exigé sur une des feuilles distribuées pour éviter la construction d'un triangle puis celle du cercle.
Tous les travaux d'élèves ont été relevés, brouillons compris.

2- ANALYSE A PRIORI

2.1 Prérequis

Quelques jours avant, un rappel de la 1ère situation a été fait sous la forme suivante :

- pour chacun des 3 cas (cercles tangents à 1 droite, à 2 droites, à 3 droites) une figure a été affichée au tableau.(annexe 2)
- une liste des propriétés utiles à la justification des constructions a été élaborée avec les élèves et écrite dans le cahier. A l'occasion du travail sur la figure n°3 (annexe 2), des quadrilatères apparaissent. La propriété concernant la somme des angles d'un quadrilatère qui peut être utilisée dans une des stratégies a été rappelée et notée.

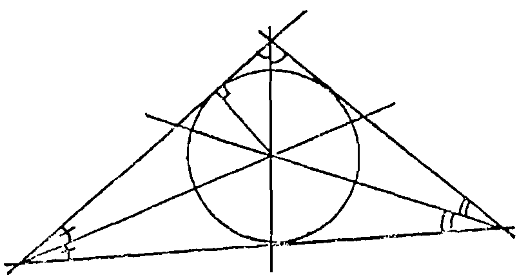
2.2 Analyse de la tâche

Trouver l'adéquation entre un cercle de rayon donné et un triangle dont les mesures des angles sont connues ne semble pas a priori évident.

Une variable de cette situation se situe au niveau de la taille du cercle et du triangle. Pour éviter des schémas trop petits (tendance manifeste pour une moitié de nos élèves) ou qui induisent des particularités, nous avons choisi des angles de 40°, 60°, 80° et le cercle a été donné (le même pour tous).

Les stratégies envisagées sont :

a) Construction à l'envers.

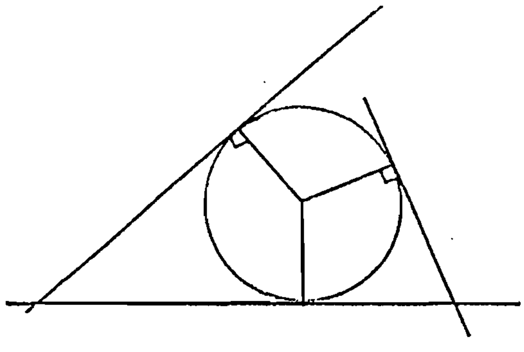


1) tracé d'un triangle par tâtonnement
2) tracé des bissectrices
3) tracé des rayons perpendiculaires aux côtés.

On peut penser que des élèves estiment avoir répondu sans s'inquiéter de la validité de la construction ni de sa justification.

b) Une autre démarche suppose le problème résolu, en raisonnant sur une figure "fausse" mais complète faisant apparaître tangentes et rayons.

Le programme de construction peut être le suivant :



1) tracé d'une tangente

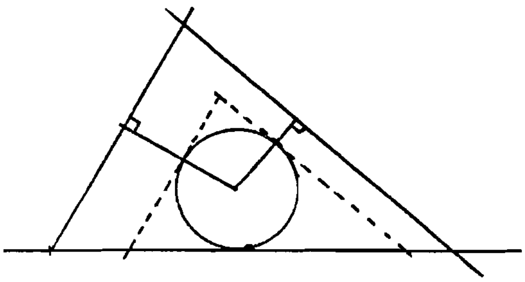
2) construction de 3 angles de centre O
(180° - 40°)
(180° - 60°)
(180° - 80°)

3) construction des perpendiculaires aux points d'intersections des côtés des angles avec le cercle.

Le quadrilatère qui est construit alors et la formulation de la consigne attire l'attention sur les angles.

Cette phase d'appropriation de la figure et d'analyse de la situation risque de ne pas apparaître.

c) Une démarche qui donne la solution et peut la justifier repose sur la construction d'une part d'un triangle répondant à la question et d'autre part de droites parallèles aux côtés du triangle et tangentes au cercle.



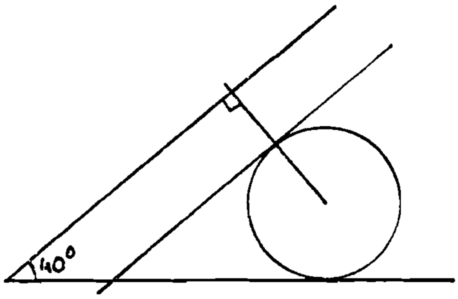
1) tracé d'une tangente
2) construction d'un triangle semblable
3) construction de perpendiculaires au 2ème côté des angles
4) construction des parallèles tangentes au cercle.

La figure demandée se constitue par tâtonnement divers (glissement de règles et équerre, ...) pour obtenir les droites parallèles et les tangentes au cercle.

Les éléments à prendre en compte pour la justification (droites parallèles et angles correspondants) sont visibles sur la figure, mais il faut que l'attention se déplace des parallèles aux angles correspondants égaux.

Les outils nécessaires à la justification sont :
* tangentes à un cercle
* angles correspondants
* droites perpendiculaires à une même troisième.

d) Une vision plus partielle de la figure conduit à une construction proche de la précédente.



1) tracé d'une tangente
2) construction d'un angle de 40°, ayant comme côté cette tangente
3) construction de la parallèle à ce côté, tangente au cercle.

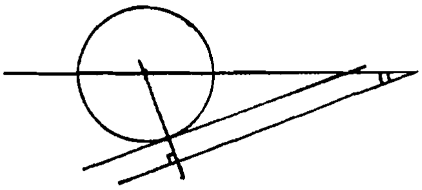
Les outils nécessaires sont les mêmes que pour c).

e) L'activité "droites et cercles" peut être réinvestie en utilisant le centre du cercle comme point de concours des bissectrices des angles du triangle.

Deux programmes de construction peuvent être envisagés :

1er programme

1) tracé d'un diamètre



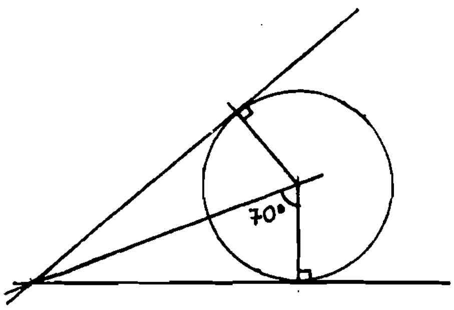
2) tracé de l'angle moitié (40°/2 par exemple), un côté est le diamètre

3) tracé de la perpendiculaire au 2ème côté

4) construction de la parallèle tangente au cercle.

Les outils nécessaires à la justification sont ici :
* droites perpendiculaires à une même troisième
* centre du cercle point d'intersection des bissectrices
* tangentes à un cercle.

2ème programme



1) tracé d'un angle au centre (90° - 40°/2)
2) tracé d'une tangente perpendiculaire à un des côtés
3) tracé du symétrique de l'angle par rapport à l'autre côté
4) tracé d'une deuxième tangente
5) tracé d'un deuxième angle au centre (90° - 60°/2) adjacent au premier
6) tracé d'une troisième tangente.

Les outils nécessaires à la justification sont :
* bissectrice :
  - angles de même mesure
  - équidistance
* tangente à un cercle.

Selon que l'élève va privilégier les tangentes ou les angles, son approche sera différente : perception globale de la figure et de ses propriétés (c), perception de sous-figure avec calculs d'angles (b et e) ou alors utilisation de constructions intermédiaires (d).

3 - ANALYSE DES DEMARCHES

3.1 La répartition des démarches utilisées par les élèves est la suivante :

type de stratégies	a	b	c	d	e
avec aide	2	1	8		
sans aide		3	1		1

Les élèves dits "aidés" le sont par l'intermédiaire d'une fiche (annexe 3). Elle est conçue au départ pour les groupes n'ayant pas de production écrite au bout de 40mn. Nous souhaitons en effet amener le maximum d'élèves à des démarches de raisonnement et à des formalisations écrites.

En fait, la fiche a été utilisée comme prévu par un seul groupe d'élèves. Les autres élèves, ou groupes d'élèves, avaient déjà des éléments de dessin et/ou de justification mais n'arrivaient pas à écrire leur raisonnement.

La fiche d'aide élaborée n'est pas satisfaisante. Elle induit l'utilisation d'une stratégie de type c (8 groupes sur 11), mais le principe d'une telle fiche est à conserver.

3.2 Sur les différents dessins construits par les élèves, les étapes de la construction sont apparentes ou non.

Particulièrement, pour celles liées à la stratégie c, nous avons observé des élèves déplaçant le rapporteur jusqu'à obtenir une droite tangente au cercle.

J'ai tracé un rayon

J'ai tracé ses tangentes en faisant la ⊥

J'ai glissé un rapporteur sur la tangente.

~~J'ai~~ Je suis partie du point d'intersection de la tangente et du rayon que je venais de tracer

J'ai glissé le rapporteur comme Sylvie jusqu'à ce que 40° et 0° soient sur le cercle

J'ai tracé la droite

Nous avons tracer le rayon ⊥ à la tangente

Nous avons fait glisser le rapporteur sur la 1ère tangente que ns avons faite vers le bas jusqu'à ce que on obtienne 60° et 0°

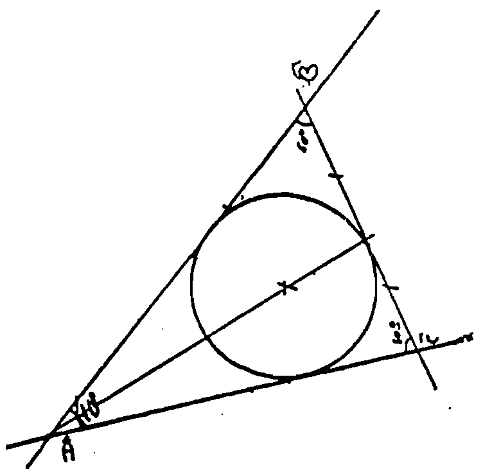
Est-ce une construction d'angles correspondants ? Ou plutôt une construction intuitive de parallèles par analogie avec le glissement de l'équerre le long d'une règle. Quelle que soit la stratégie utilisée, les élèves, pour lesquels la construction est visible, ont tous écrit une justification complète ou non (nous n'appelons pas justification la seule description du programme de construction).

stratégies		a	b	c	d	e
absence de justifications	constructions visibles					
	constructions invisibles	2		5		
justifications	justifications complètes		3	1		
	justifications incomplètes		1	3		1

La majorité des justifications apparaissent dans les cas b et c. Il est à remarquer que pour les huit groupes d'élèves qui ont reçu la fiche d'aide dans le cas c, cinq d'entre eux n'ont pas réussi à écrire une justification et elle est restée incomplète pour les trois autres.

Ce n'est pas vrai pour la stratégie b où le groupe "aidé" a fourni une justification complète.

3.3 La consigne est déformée au départ par trois groupes, avec une confusion entre cercle inscrit et circonscrit. L'un a rectifié de lui-même et deux autres après intervention des observateurs, demandant de relire la consigne. Lors de la construction, la confusion bissectrice - médiatrice persiste dans l'esprit de ces élèves. Ils utilisent le mot médiatrice pour caractériser la bissectrice, ce n'est qu'un problème de confusion du vocabulaire.



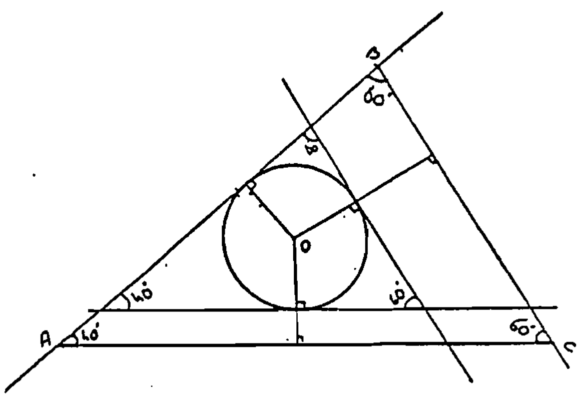
Par contre, pour deux élèves la confusion se fait non seulement au niveau du vocabulaire mais aussi du codage et donc des propriétés.

Pour commencer tous les groupes ont construit un triangle, par tâtonnement, répondant à la consigne. Les angles ne correspondent pas forcément aux valeurs données. On obtient des réflexions du type :

"j'ai pris les droites tangentes au cercle et ce n'est pas bon"
"39° ... un degré ça peut aller"
"là il faut 40°, là il faut 60°, ben oui mais pas au pif ! "
"j'ai regardé 30° et j'ai ajusté"

Certains groupes ne trouvent pas d'autres stratégies et donc n'ont pas de justification écrite. Pourtant pour se persuader que leur construction convient ils la redessinent plusieurs fois. A chaque construction, se rappelant de la propriété du centre du cercle inscrit, ils tracent les bissectrices pour vérifier que leur point de concours coïncide avec le centre du cercle donné. Ils font autant de constructions que nécessaire en les affinant, obtenant successivement une puis deux, puis trois bissectrices qui passent enfin par le centre. Une élève écrit "*pour me rassurer j'ai tracé les bissectrices qui se sont coupées en un point O le centre du cercle*".

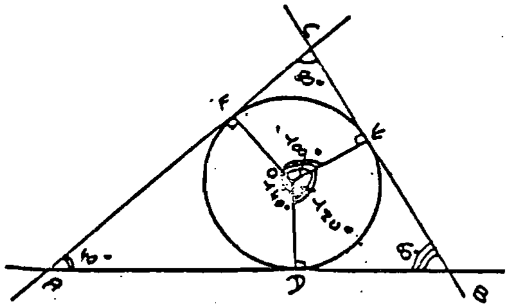
Les élèves ont employé majoritairement la stratégie c. C'est aussi celle pour laquelle l'existence et la formalisation d'une justification sont les moins réussies.



En effet, il n'est pas nécessaire d'expliciter la notion d'angles correspondants qui permet de justifier la construction de parallèles pour réaliser la figure.
De même la construction de tangentes se fait par tâtonnement même si le concept de droite perpendiculaire au rayon est sous-jacent.
Le rayon est souvent tracé a posteriori et l'angle droit marqué (même si ce n'est pas toujours exact).

En ce qui concerne la stratégie b, les constructions et les justifications sont bien structurées.

Pourquoi cette différence ?

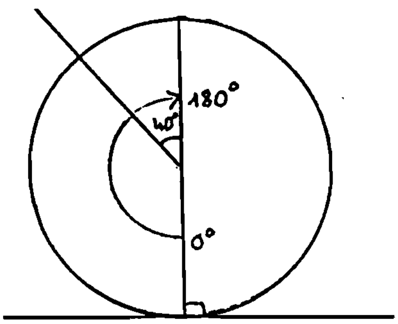


Après avoir dessiné la 1ère tangente, il faut construire un angle au centre dont la mesure n'est connue que lorsque le quadrilatère est envisagé. La justification est alors concomitante à la construction. Pourtant ce raisonnement n'est pas facilement accepté par les élèves.

Diverses réflexions apparaissent :
"on n'a pas les angles là 100° - 120° - 140° on les a trouvé avec la construction."
"où il est l'angle de 140° ? il n'est pas dans le texte".

D'autres élèves veulent nommer le quadrilatère, mais *"a-t-on le droit de mettre des lettres à des points qui ne sont pas encore placés ?* ". Cette stratégie supposait le problème résolu, méthodologie peu utilisée dans le premier cycle.

Voici dans ce cas une utilisation particulière du rapporteur qui conduit à l'apparition d'un raisonnement.



Pour construire, une élève utilise son rapporteur de la façon ci-contre en mesurant un angle de 40°. Puis elle construit la deuxième tangente et avec la même démarche termine correctement le triangle.

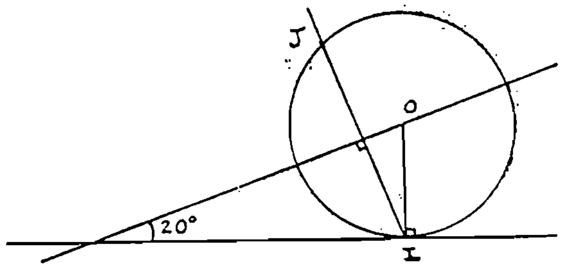
Lorsqu'elle veut expliquer à ses camarades son travail, elle dit *"j'ai posé mon rapporteur et j'ai mesuré pas du bon côté - Ah en fait au lieu de prendre 40° c'est 140° - Alors pour 60° j'ai pris"* et une autre complète en disant *"120°"*.

C'est le calcul de la valeur de 140° qui leur permettra d'écrire un début de raisonnement correct.

On trace un cercle de centre O, un des rayons. On construit sa tangente. le cercle est tangent à chacun des côtés du triangle. On a pris le rapporteur et fixé sur le centre O. On a pris 140° nous avons tracés le rayon et on a tracés une tangente. Nous avons pris un angle de 140° car on sait que les angles d'un quadrilatère sont égaux à 360°.

Donc : 90 + 40 + 90 + 140 = 360°

Un élève n'arrive pas à formaliser, il est gêné par la non-existence des angles de 140°, 100°, 120° dans le texte et refuse de les utiliser. Il va choisir comme outils la bissectrice et la somme des angles d'un triangle.



L'angle de 20° se déduit plus facilement du texte car dans une construction précédente, la bissectrice a été utilisée comme axe de symétrie. C'est cette propriété qu'il utilise pour compléter la figure et écrire sa justification.

① on trace la perpendiculaire de la bissectrice passant par I, on la fait prolonge de l'autre coté et coupe le cercle en J
② la bissectrice est l'ensemble des points equidistants des cotés de l'angle

3.4 Nous avons plusieurs fois constaté que bien qu'ayant sous les yeux les outils nécessaires pour écrire la justification, les appliquer à la situation pose problème aux élèves. Il ne suffit pas de connaître les propriétés pour savoir quand et comment les utiliser !! ...

Lorsque les groupes n'arrivent plus à avancer dans la situation, ils vont systématiquement feuilleter livres et cahiers, même si c'est au hasard.

4- CONCLUSION

Dans cette deuxième partie, les élèves ont été moins à l'aise. Les outils à utiliser (cercle inscrit dans un triangle, bissectrice, tangentes, angles correspondants, somme des angles d'un quadrilatère...) sont plus nombreux. La situation n'est plus complexifiée au fur et à mesure, mais d'emblée complexe.

La plupart des groupes procèdent au départ par tâtonnement, puis apparait la construction de tangente à un cercle (sa propriété d'être perpendiculaire au rayon au point de tangence étant connue de **tous** les élèves).

Le travail heuristique nécessite la construction de figures fausses mais complètes pour analyser "ses propriétés". Lorsque cette phase n'a pas eu lieu, les élèves ont construit la figure par tâtonnement.

Dans l'analyse, a priori, nous pensions que les élèves réinvestiraient facilement la figure obtenue en fin de l'activité "Droites-Cercles". Or les groupes ont rarement utilisé le fait que le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices. Ils ont préféré utiliser les angles des 3 quadrilatères (dans ce cas la justification de la construction étant souvent très correcte), ou la construction de parallèles et la propriété des angles correspondants (cette solution étant orientée par l'exercice d'aide fourni).

Là encore la conception que les élèves ont de la tangente a favorisé ou non leur démarche heuristique :

a) droite perpendiculaire au rayon.

Cela va permettre (plus ou moins facilement) une justification correcte du calcul des angles du quadrilatère, puis de la mesure de l'angle au centre.

Cela permet aussi une construction justifiée de la tangente parallèle à une droite donnée pour ceux qui utilisent les angles correspondants.

b) droite ayant un point commun avec le cercle.

Cela entraîne une construction par tâtonnement et non justifiée.

Le réinvestissement de méthodes de recherche, travail par essais - erreurs, analyse de la figure en supposant le problème résolu, semble se faire plus facilement que celui de l'utilisation des propriétés. Dans ce type de travail, les élèves qui sont en échec scolaire s'investissent d'emblée dans la situation. Ils n'ont plus le réflexe de demander des explications avant de commencer le travail.

Les observations nous ont permis de mettre en évidence la variété des rôles dans le groupe. Il y a des élèves qui "trouvent des idées", ceux qui les "exploitent", ceux qui les "rédigent", les rôles n'étant ni figés, ni dissociés.

Conclusion

Au travers des différentes séquences nous avons mis en place une progression qui permet aux élèves d'apprendre à évoluer d'un type d'activités à un autre:

- Constructions de figures à partir d'un texte
- Explications des étapes de la construction
- Enoncés des propriétés utilisées à l'oral puis à l'écrit.

L'élève est mis en situation de prendre conscience du passage du raisonnement implicite au raisonnement explicite et de l'intérêt de cette démarche. L'acquisition simultanée des concepts étudiés et de la démarche de raisonnement est alors possible. Les propriétés du parallélogramme et les diverses notions liées au triangle ont été utilisées dans une grande diversité d'exercices toujours liés au dessin. L'apparition ou l'utilisation de mêmes propriétés dans des dessins différents favorise la prise de conscience de la valeur générale de ces propriétés.

L'apprentissage du raisonnement se fait en géométrie au travers de différentes tâches sollicitant des activités de tracés puis (et) des activités "langagières". La démonstration prend ses origines dans des actes de communication, dans le but de convaincre. D'où l'intérêt d'instaurer dans les classes un débat. Le type de méthodes de travail utilisé lors de la communication des résultats (réalisation de fiches, d'affiches, présentation par groupe) permet la confrontation de plusieurs "mêmes" dessins, de plusieurs démarches. Les constantes caractérisant la figure peuvent alors apparaître : le dessin passe du cas particulier au cas général. Les mesures n'ont plus raison d'être : c'est à ce moment que l'utilisation des propriétés (énonciation écrite ou orale) apparaît. L'explicite n'est plus seulement demandé par le professeur, il devient nécessaire pour se comprendre.

Les démarches adoptées par les élèves font référence à un ensemble de définitions et théorèmes souvent compris mais ils éprouvent des difficultés à mettre ces outils en adéquation aussi bien avec la solution qu'ils ont pressentie qu'avec la justification du problème. Ceux qui ont produit un raisonnement en restent souvent à la compilation des énoncés. Quand ils dépassent ce stade, l'écriture d'une démarche déductive vient alors comme réorganisation des démarches heuristiques.

Il faut souligner que les activités choisies favorisaient particulièrement les étapes de construction et de recherche de solutions plus que de formalisation d'un raisonnement. Dans ces situations, la figure permet d'appréhender le problème et suggère le raisonnement. Les élèves ont pris conscience de son intérêt dans l'analyse d'une situation. Par contre la prégnance de la figure a masqué l'intérêt, la nécessité de la rédaction.

Pourtant même si certains exercices utilisés ne nous semblent pas après coup satisfaisants (figure trop "pauvre", donc propriétés trop évidentes et manque d'enjeu), cela nous permet, quand même, d'affirmer qu'il n'est pas aisé pour un élève de passer du stade du dessin particulier à la figure "générale" et que cela prend du temps. Cette évolution est absolument nécessaire à la compréhension de ce qu'on attend de lui dans les activités de raisonnement puis dans la rédaction des démonstrations. Le passage de la construction implicite à son explication qu'elle soit écrite ou orale est une étape importante. Il devrait être plus structuré et prendre beaucoup plus de temps dans les activités proposées à la classe.

Bibliographie

Actes de l'université d'été sur l'histoire des Mathématiques, 6 - 13 Juillet 1984, *Université du Maine.*

BARBIN Evelyne, La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques, *in Bulletin APM n° 366, déc. 88.*

DAHAN-DALMEDICO Amy - PEIFFER Jeanne, *Routes et Dédales,* Etudes vivantes, 1982.

DHOMBRES Jean, *Nombre mesure et continu,* Cedic-Nathan, 1978.

Mathématiques au fil des âges, IREM groupe épistémologie et histoire des mathématiques, Gauthier-Villars, 1987.

Le matin des mathématiciens, France culture, Belin, 1985.

Oeuvres (les) d'Euclide . Trad.F.Peyrard, Paris, Blanchard, 1966.

La Rigueur et le Calcul, groupe inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, Cedic, 1982.

ARSAC G., L'origine de la démonstration. Essai d'épistémologie didactique.*in : Recherches en didactique des mathématiques, vol. 8/3, 1987.*

BARTH B.M., *L'apprentissage de l'abstraction,* Retz, 1987.

Didactique des mathématiques. Le Dire et le Faire, sous la dir. .d'Alain Bouvier. Cédic-Nathan, 1986.

DUVAL R., Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *In : Annales de didactique et de sciences cognitives, vol.1, 1988*

DUVAL R., EGRET M.A., L'organisation déductive du discours : interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *In : Annales de didactique et de sciences cognitives, vol.2, 1989*

EGRET M.A, DUVAL R., Comment une classe de 4ème a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *In : Annales de didactiques et de sciences cognitives, vol.2, 1989.*

GAUD D., GUICHARD J.P, Géométrie 4ème, fasc.1 Initiation à la démonstration Poitiers, *IREM, 1988.*

MESQUITA A.L., RAUSCHER J.C., Sur une approche d'apprentissage de la démonstration. *In : Annales de didactiques et de sciences cognitives vol.1, 1988.*

PLUVINAGE F., Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie.*In : Annales de didactique et de sciences cognitives vol.2, 1989.*

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de cinquième, 1986-87. *Bulletin Inter-IREM, premier cycle, rééd. 1989.*

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de quatrième, 1987-88. *Bulletin Inter-IREM premier cycle, rééd. 1989.*

TROCME-FABRE H., *J'apprends, donc je suis. Introduction à la neuropédagogie.* Ed. d'organisation, 1987

Annexe 1 : PARALLELOGRAMME Séquence 2

Objectifs : Mettre en évidence les propriétés du parallélogramme autres que le parallélisme des côtés, propriétés des longueurs des côtés, du point de concours des diagonales, des angles.

Savoir prendre en compte ces propriétés (savoir quelle propriété est la plus "efficace" et fonctionne dans tel type de constructions et d'exercices).

Utiliser les instruments règle, équerre, compas, rapporteur.

Savoir se faire comprendre et convaincre.

Propriétés à connaître :

S_o (A) = A' S_o (B) = B', le symétrique de [AB] est [A'B']

Si 2 segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à un point alors AB = A'B'.

Angles opposés par le sommet, alternes internes.

Déroulement et commentaires :

Durée 2 h.

A partir de l'activité sur les propriétés d'un parallélogramme (Mathématique 5° Collection Pythagore - ED. Hatier p. 159), les élèves ont fabriqué une affiche. Chaque affiche, élaborée par un groupe de 3 à 4 élèves, doit expliciter le déroulement de la méthode suivie, et donner une justification de chaque résultat trouvé. Pour chaque groupe, un rapporteur présente à la classe l'affiche établie en commun et expose ses conclusions. Par le jeu de questions-réponses, la classe fait préciser au rapporteur ses explications et les résultats écrits sur l'affiche.

Il est intéressant de voir l'application des élèves pour présenter une affiche claire et correctement argumentée. Leur curiosité est vive et le degré de "critiques" est à remarquer. La demande de précision et de rigueur est quelquefois plus exigeante de la part des élèves que du professeur. Le plaisir de parler de certains semble évident. Au cours de la discussion d'autres solutions ou cheminements ont émergé.

Quelques démarches

- 4 groupes ont travaillé sur les angles :

* 1 groupe s'est interdit les mesures et en privilégiant les angles alternes internes ou opposés par le sommet, a mis en évidence tous les angles égaux du parallélogramme

* 3 groupes ont utilisé une mesure d'angle particulière et ont calculé et justifié la mesure de l'angle consécutif.

Pour l'explication, 1 groupe a utilisé les angles correspondants. Les deux autres ont fait reposer leur "raisonnement" sur la propriété de la somme des 4 angles d'un quadrilatère et sur les angles opposés égaux d'un parallélogramme.

Un seule maladresse est à noter, un groupe écrit 80 - 360 = 240

- un groupe a calqué sa démonstration sur celle du livre en changeant le nom des côtés pour prouver que 2 côtés opposés ont même longueur

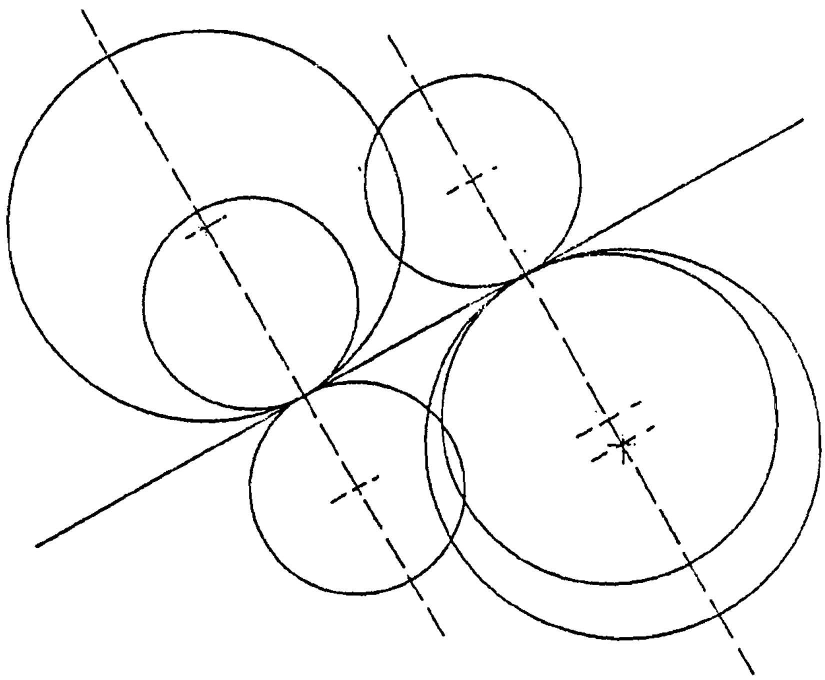
- un groupe a montré que le centre de symétrie est le milieu d'une diagonale.

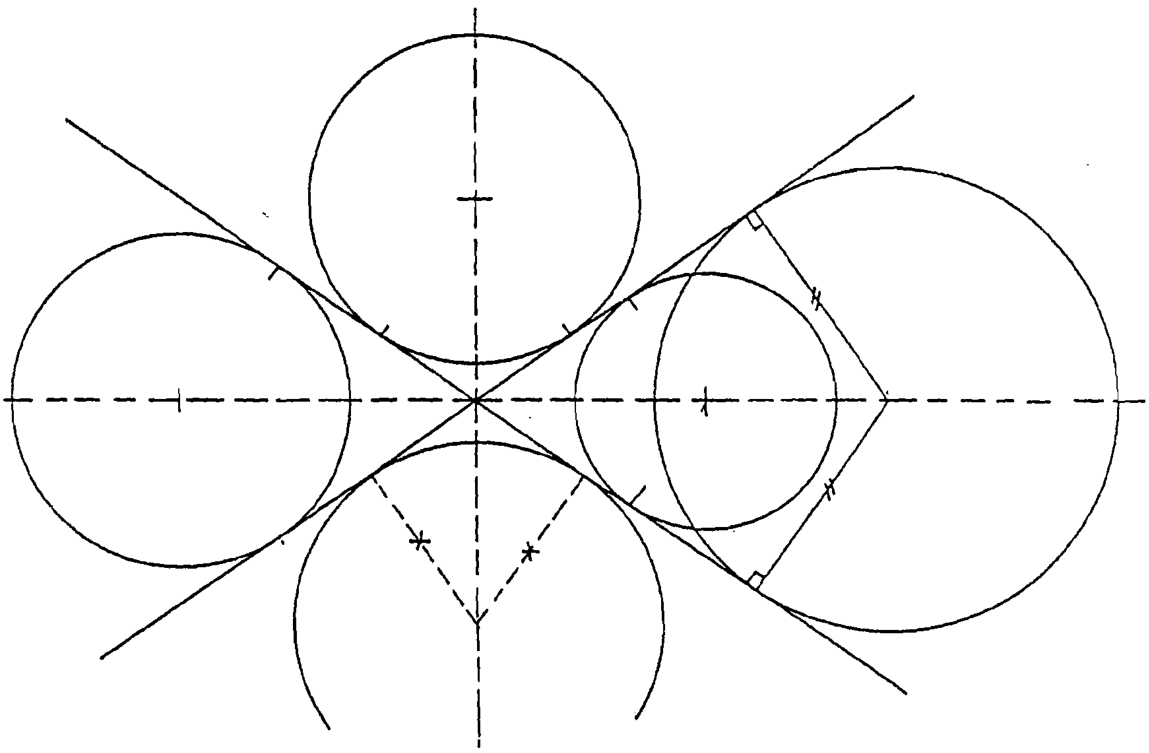
Aucune aide n'a été fournie par le professeur et chaque groupe a travaillé de façon autonome en utilisant au maximum les renseignements fournis par le livre et les énoncés déjà écrits sur les fiches répertoires.

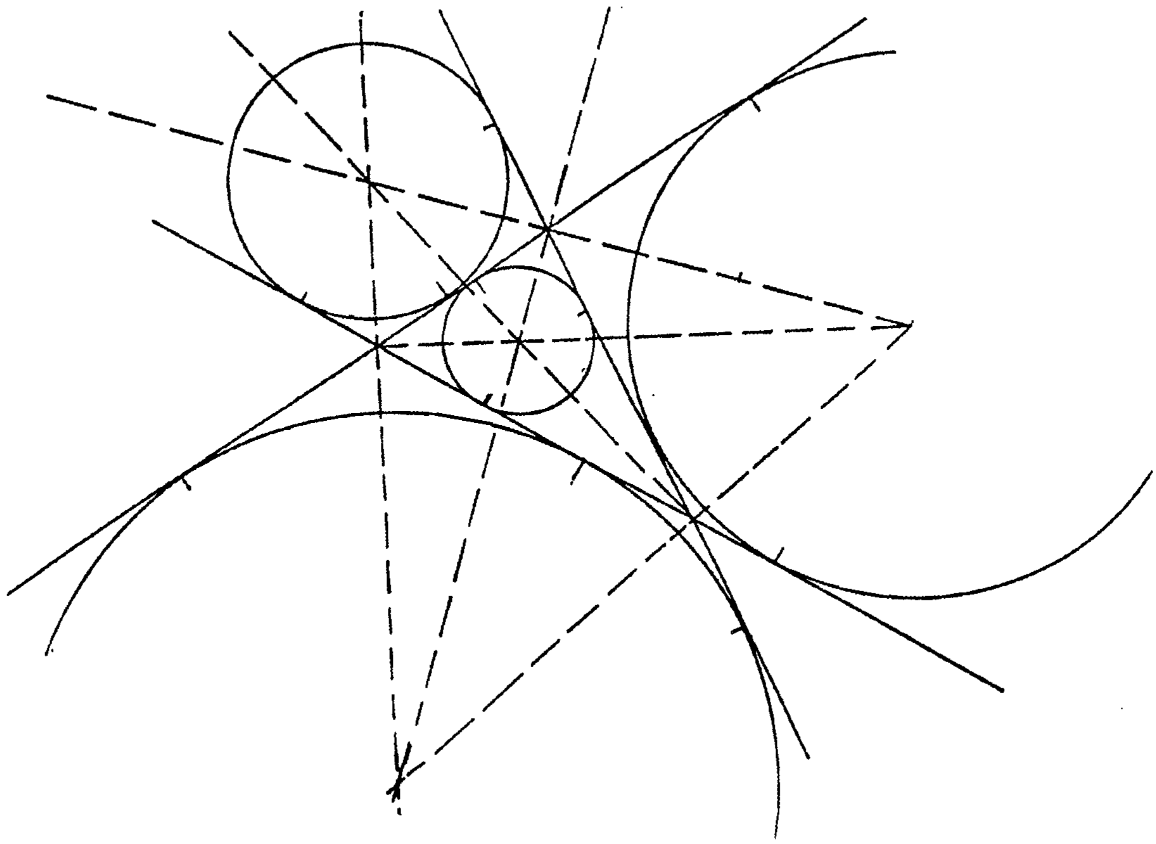
A la fin de l'exposé de toutes les affiches, les propriétés du parallélogramme ont été rédigées en commun et écrites sur le cahier pour institutionnalisation.

Applications : divers exercices de construction ont été proposés.

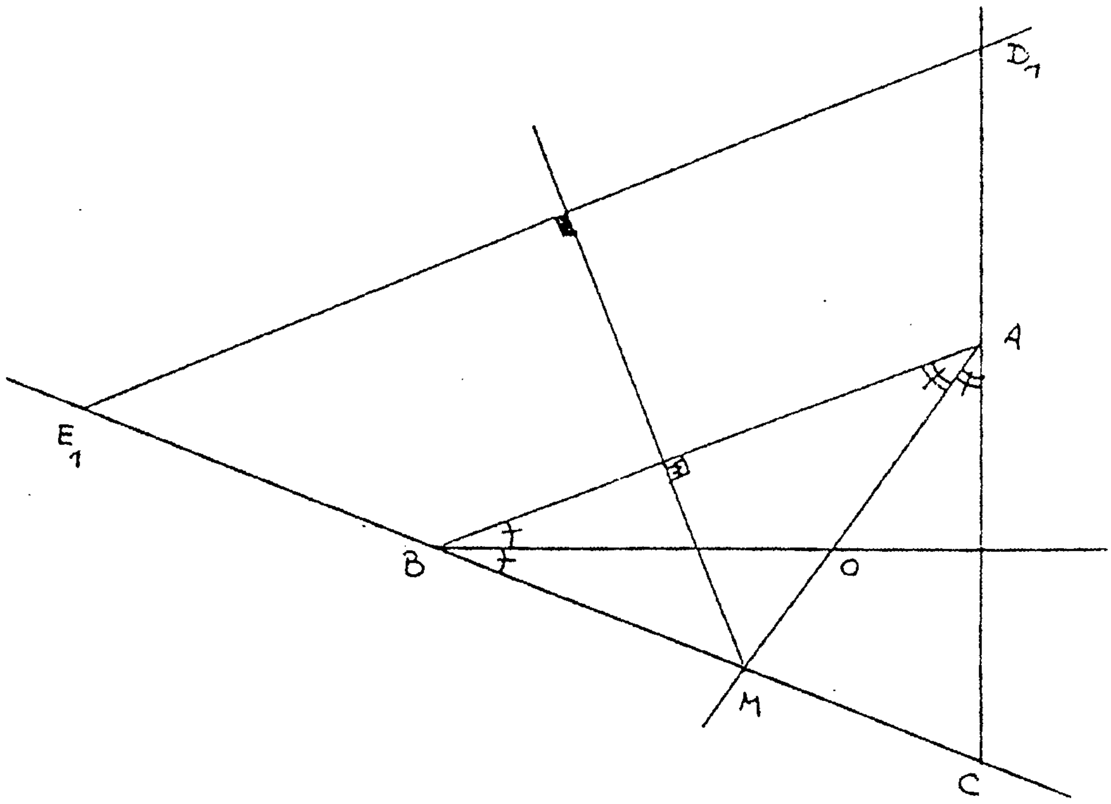
ANNEXE 2







ANNEXE 3



A l'aide des indications portées sur le dessin, répondre aux questions suivantes :

1) Que représentent les demi-droites [AO) et [BO) ? Pourquoi ? (nommez la propriété).

2) Que pouvez-vous dire des droites (AB) et (E_1D_1) ? Pourquoi ?

3) Comparez les angles D_1E_1B et ABC, E_1D_1C et BAC. Justifiez votre réponse.

4) Construire des parallèles à (E_1D_1) passant par les points E_2, E_3, E_4 .... choisis sur (BC). Comment faites-vous ? Que pouvez-vous dire des angles D_2E_2B etc. ?