AIRES ET PESEES

(par Micheline BURGUN et Raymond GUINET)

Les activités mathématiques qui suivent ont été conduites dans un CM_2 de 29 élèves*, dans le courant du troisième trimestre 80-81.

Dans cette classe, nous avions travaillé pendant les six premiers mois de l'année avec des calculatrices**, à raison de une séance par semaine.

Nous voulions trouver une situation originale pour les élèves, se prêtant à des manipulations, à des calculs relativement nombreux justifiant l'emploi de calculatrices. Cette situation devait en outre permettre aux élèves d'utiliser leurs connaissances telles que la proportionnalité et déboucher sur de nouvelles acquisitions telles que le nombre π et l'aire du disque en particulier.

Le thème retenu était :

"Comment mesurer les surfaces de pièces de carton de formes variées ?".

Nous ne donnerons pas une description détaillée des séquences. Nous nous contenterons de rendre compte des résultats obtenus et des procédures employées par les élèves. L'ensemble des activités s'est déroulé sur six séances.

La classe a été partagée en cinq groupes de six élèves. Chaque groupe reçoit :

– des formes découpées dans du carton épais : carrés, rectangles, disques, "haricots", etc . . .
(un groupe ne reçoit que des disques et des carrés : à chaque carré est associé un disque dont le rayon a la même mesure que le côté de ce carré).

– du papier quadrillé centimétrique.

– une balance Roberval et des masses marquées.

– une calculatrice.

---

* *Dans la classe de Monique PAYAN – Ecole Louis Armand à Seyssins (38).*

** *Voir IN numéros 20 et 21.*

PREMIERE SEANCE .

Voici la consigne de départ :

"Trouvez un moyen pour mesurer les surfaces des morceaux de carton qui vous ont été distribués".

Après environ quarante-cinq minutes de tâtonnements et de recherches, chaque groupe a exposé sa façon de procéder et les résultats obtenus. Voici un compte rendu succint :

– Groupe 1

Après beaucoup d'hésitations, ce groupe a essayé d'utiliser tout le matériel fourni. Toutes les formes ont été pesées afin de calculer les différences de masses entre les objets. Puis, par une mesure directe, les élèves ont calculé l'aire des formes rectangulaires. Pour les formes moins simples comme le trapèze ou le haricot, ils déclarent pouvoir s'en sortir à l'aide du quadrillage.

La pesée leur a permis cependant de trouver la plus grande et la plus petite surface.

Les résultats sont plutôt maigres pour ce groupe.

– Groupe 2

La pièce rectangulaire a été pesée (31 g) et son aire a été calculée par mesure directe (157,56 cm^2). Les élèves admettent que deux formes qui ont la même masse (21 g) ont la même surface. Il se trouve que l'une des deux est un rectangle par bonheur. Mais ils émettent l'hypothèse que "peut-être" la différence de 10 g correspond à une différence de 10 cm^2. Cette hypothèse est vite réfutée.

Ce groupe est arrivé à ranger les surfaces de la plus petite à la plus grande.

– Groupe 3

L'aire de la pièce rectangulaire a été trouvée par mesure directe (208,62 cm^2), celle de la pièce triangulaire (72 cm^2) grâce au papier quadrillé.

La pesée a permis de déterminer la plus grande et la plus petite surface.

– Groupe 4

Ce groupe n'a reçu que des disques et des carrés. Il a trouvé une procédure intéressante.

Le plus grand disque a été pesé (50 g) puis les élèves ont essayé d'équilibrer la balance en remplaçant les masses marquées par des carrés dont ils connaissaient les aires. Ils trouvent ainsi que l'aire du disque est 309 cm^2.

Par une mesure directe (c'est à dire celle du rayon), on aurait trouvé 314 cm^2.

Le manque de temps n'a pas permis de mesurer les surfaces des autres disques. Les élèves ont cependant comparé les surfaces par la pesée.

– **Groupe 5**

Par une mesure directe, les élèves ont calculé l'aire d'une pièce carrée (64 cm^2). Ils l'ont pesée (13 g) et ont trouvé l'aire d'un objet pesant 1 g. "On a voulu trouver l'aire d'un gramme, on a divisé 64 par 13 : on a trouvé 4,9230769. C'est pas exact mais on a quand même essayé de calculer les autres".

Ce groupe, avec la précision permise par la balance a trouvé l'aire des différentes formes.

Les groupes 1, 2 et 3 n'ont été capables que de ranger les surfaces ; cependant le groupe 2, malgré l'hypothèse fausse "1 g correspond à 1 cm^2" aurait pu aller plus loin.

Les groupes 4 et 5 ont des résultats plus intéressants. La méthode du groupe 4 est originale : elle s'appuie sur le fait que deux pièces de même masse ont la même aire. Avec un peu plus de temps et un matériel plus riche (plusieurs pièces de formes carrées ou rectangulaires), les enfants auraient pu trouver tous les résultats attendus.

Le groupe 5 nous a comblés : c'est le seul à avoir émis avec précision l'hypothèse de proportionnalité.

Le fait que 1 g de carton corresponde à une aire de 4,9230769 cm^2 (!) ne semble pas les avoir gênés. Mais aucun des élèves n'a osé arrondir à 4,9 ou 5. Certes ce genre d'attitude est facilité par l'emploi de calculatrices d'une capacité de 8 chiffres. Mais, ce problème a été abordé par la suite et partiellement résolu par l'emploi des mêmes calculatrices : on a essayé de trouver la masse de carton correspondant à 0,05 cm^2 ; c'est environ $\frac{1}{100}$ g !, précision qui n'est pas à la portée des balances Roberval, ce dont les élèves sont conscients.

DEUXIEME SEANCE.

L'objectif de cette séance est de mesurer effectivement les surfaces des différentes formes dans chaque groupe. Le point de départ pour tous est la méthode du groupe 5.

Voici les résultats obtenus :

– **Groupe 1**

Le rapporteur annonce que 1 gramme correspond à 5 cm^2 et il écrit au tableau 1 g → 5 cm^2. Voici ses explications : "On a pris la forme G, la plus petite (il s'agit d'un rectangle 7 × 10 cm^2). On l'a pesée c'était 14 g. Ca faisait 70 cm^2 car c'est un rectangle. On a multiplié la longueur par la largeur. Après on a divisé 70 par 14, c'était 5. Donc 1 g faisait 5 cm^2."

L'élève poursuit en affichant au tableau les résultats obtenus.

$\times 5$

Formes	masse en g	aire en cm^2
B	33	165
C	27	135
D	33	165
E	20	100
F	25	125
G	14	70
A	21	105

Les pièces E et F sont aussi rectangulaires. Nous nous sommes donc posé le problème de la précision. Nous avons mesuré la pièce F dont les dimensions sont 9,3 cm et 14 cm, ce qui donne une aire de 130,2 cm^2 ; elle est à rapprocher des 125 cm^2 trouvés par pesée. L'explication de cette différence, donnée par les élèves, est que les mesures de masses ne sont pas précises : "pour G, on a trouvé entre 13 et 14, mais c'était plus près de 14. Il aurait fallu des poids plus petits." Il est remarquable que seule la précision des mesures de masses soit remise en question, mais pas celle des mesures de longueurs.

– **Groupe 2**

"On a d'abord cherché la surface de la pièce E (il s'agit d'un rectangle) on a trouvé 156,55 cm^2, puis on a divisé par son poids : 31, on a trouvé 5,05. Donc 1 g correspond à 5,05 cm^2".

$\times 5{,}05$

Pièces	masse en g	aire en cm^2
C	25	126,25
F	9	45,45
D	22	111,1
B	21	106,05
A	21	106,05
E	31	156,55

– **Groupe 3**

"On a pris la forme G, on a calculé l'aire 208,62 cm^2. Ensuite, on l'a pesée : c'était 41 g. On a divisé 208,62 par 41, on a trouvé la surface de 1 g, c'est 5,08. Donc 1 g correspondait à 5,08 cm^2."

× 5,08

Pièces	masse en g	aire en cm^2
E	18	91,44
C	14	71,12
B	12	60,96
F	18	91,44
A	16	81,28
D	20	101,6
G	41	208,62

La pièce C est un rectangle dont les dimensions sont 8 cm et 9 cm ; son aire est donc 72 cm^2. La pesée donne une aire de 71,12 cm^2. Les élèves ont remarqué cette différence et l'ont trouvée peu importante.

– **Groupe 4**

Ce groupe a reçu des disques et des carrés découpés dans un matériau différent de celui des autres groupes. "On avait E qui faisait 100 cm^2 et 16 g. Après, 16 : 100 = 0,16. Donc 1 cm^2 pour nous cela faisait 0,16 g".

Contrairement aux autres groupes, celui-ci calcule la masse correspondant à 1 cm^2 au lieu de l'aire correspondant à 1 g.

: 0,16

Pièces	masse en g	aire en cm^2
E	16	100
C	50	312,5
A	32	200
D	41	256,25
B	13	81,25
G	6	37,5
H	18	112,5
J	13	81,25
I	10	62,5
F	4	25

Remarquons que les pièces B, G, I et F, sont des carrés dont un calcul direct des aires respectives donne en cm^2 : 81 ; 36 ; 64 et 25.

– **Groupe 5**

Voici sans commentaire les résultats de ce groupe :

Pièces	masse en g	aire en cm^2
C	13	64
B	27	132,92
A	30	147,69
D	24	118,15
E	18	88,61
F	15	73,84

TROISIEME SEANCE *

Les séances qui suivent ont été menées collectivement. Nous avons repris l'expérience du groupe 4 et avons repesé les pièces circulaires à l'aide d'un trébuchet et de masses divisionnaires. Puis nous avons fourni le tableau ci-dessous. La consigne est : "Calculez l'aire des différentes pièces. Un centimètre carré correspond à 0,16 gramme".

Pièces	masse en g
C	50,3
D	40,7
A	32,2
H	18,1
J	12,6

Après un rapide calcul fait à la machine, on inscrit les résultats au tableau.

Pièces	Aire en cm^2
C	314,37
D	254,37
A	201,25
H	113,12
J	78,75

* *Entre temps, il y a eu une séance de rappel sur le cercle.*

Les objectifs que nous nous sommes fixés sont :

– mettre en évidence le rapport constant entre l'aire du disque et le carré de son rayon.

– en déduire un procédé pratique pour calculer l'aire d'un disque connaissant la mesure de son rayon.

Pour ceci, nous sommes partis du tableau suivant dont seules les deux premières lignes étaient remplies.

Rayon en cm	10	9	8	6	5
Aire en cm²	314,37	254,37	201,25	113,12	78,75
$R \times R$	100	81	64	36	25
$\frac{\text{Aire}}{R \times R}$	3,143	3,140	3,144	3,142	3,15

L'observation du tableau complété montre que le rapport entre l'aire d'un disque et le carré de la mesure de son rayon est voisin de 3,14. Nous avons expliqué aux élèves que cette propriété est générale et avons longuement parlé du nombre π .

QUATRIEME SEANCE.

L'objectif de cette séance est de calculer l'aire d'un disque connaissant la mesure de son rayon, à partir des résultats obtenus précédemment. Les élèves disposent de calculatrices pour effectuer les calculs.

Quelle est l'aire d'un disque dont le rayon est 7 cm ? 3,5 cm ? 12 cm ? 14 cm ? Pour ce calcul on prendra $\pi = 3{,}14$. On fournit le tableau suivant.

rayon R en cm	7	3,5	12	14
$R \times R$				
Aire cm²				

Si la première ligne est remplie sans mal, la seconde a pu l'être après un rappel de la séance précédente. D'où, les résultats :

rayon R en cm	7	3,5	12	14
R × R	49	12,25	144	196
Aire cm^2	153,86	38,47	452,16	615,44

× 3,14

Voici un dernier tableau servant de contrôle :

rayon R en cm	6,75	2,9		5,4		3,25
R × R						
Aire cm^2			28,26		254,34	

Le tableau précédent est rempli comme ci-dessous :

rayon R en cm	6,75	2,9	3	5,4	9	3,25
R × R	45,5625	8,41	9	29,16	81	10,5625
Aire cm^2	143,06	24,41	28,26	91,56	254,34	33,16

× 3,14 : 3,14

On conclut la séance par la formule donnant l'aire du disque : $S = 3{,}14 \times R \times R$ en mettant l'accent sur le fait que 3,14 représente une approximation de π et que dans chaque problème posé, on doit préciser l'approximation choisie.

CINQUIEME SEANCE.

Quelle est l'aire d'un disque de rayon 3,75 m ?

En fait le but réel n'est pas de calculer l'aire du disque en question, mais de déterminer le programme de calcul le plus court. On convient que chaque fois que l'on utilise une touche, cela coûte 1 T.

Voici les différents résultats obtenus avec le coût de chacun d'eux. Dans les tableaux suivants, la lettre P désigne le programme, A l'affichage :

P	A	P	A	P	A
3,75	3,75	3,75	3,75	3,75	3,75
X	3,75	X	3,75	X	3,75
3,75	3,75	=	14,0625	3,14	3,14
X	14,0625	X	14,0625	=	11,775
3,14	3,14	3,14	3,14	=	44,15625
=	44,15625	=	44,15625		
15 T		12 T		11 T	

Le deuxième exercice est un peu plus complexe mais toujours orienté vers la recherche de programmes.

Déterminer un programme de calculs unique permettant de calculer l'aire et la circonférence d'un disque dont le rayon est 2,57 m.

Remarque : dans les trois tableaux suivants, $\frac{1}{2}C$ désigne la moitié de la circonférence, S la surface, C la circonférence.

P	A	
2,57	2,57	
X	2,57	
3,14	3,14	
=	8,0698	$\frac{1}{2}C$
=	20,73986	S
2,57	2,57	
X	2,57	
2	2	
X	5,14	
3,14	3,14	
=	16,1396	C
23 T		

1

P	A	
2,57	2,57	
X	2,57	
3,14	3,14	
=	8,0698	$\frac{1}{2}C$
=	20,73986	S
2	2	
=	5,14	
X	5,14	
3,14	3,14	
=	16,1396	C
19 T		

2

P	A		
2,57	2,57		
×	2,57		← le facteur constant × 2,57 est enregistré à cette ligne
3,14	3,14		
=	8,0698	$\frac{1}{2}$ C	
M +	8,0698		
=	20,73986	S	← à cette ligne, le facteur constant × 2,57 est utilisé en appuyant sur $\boxed{=}$
M R	8,0698		
×	8,0698		
2	2		
=	16,1396	C	

16 T (3)

Nous remarquons que le programme (1) le plus long, utilise les formules brutes de l'aire du disque et de la mesure de sa circonférence.

SIXIEME SEANCE.

Les deux exercices qui suivent ont un double but :

– d'une part réaliser des dessins à l'échelle les plus proches possibles de la réalité,

– d'autre part appliquer les acquisitions précédentes dans une situation inattendue.

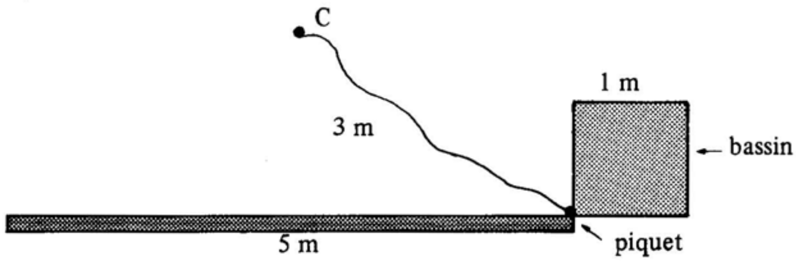
1er problème.

Une chèvre est attachée à un piquet par une corde de 3 m de long. Ses déplacements sont limités par un bassin carré de 1 m de côté et par un mur de 5 m de long, selon le schéma ci-dessous. On demande :

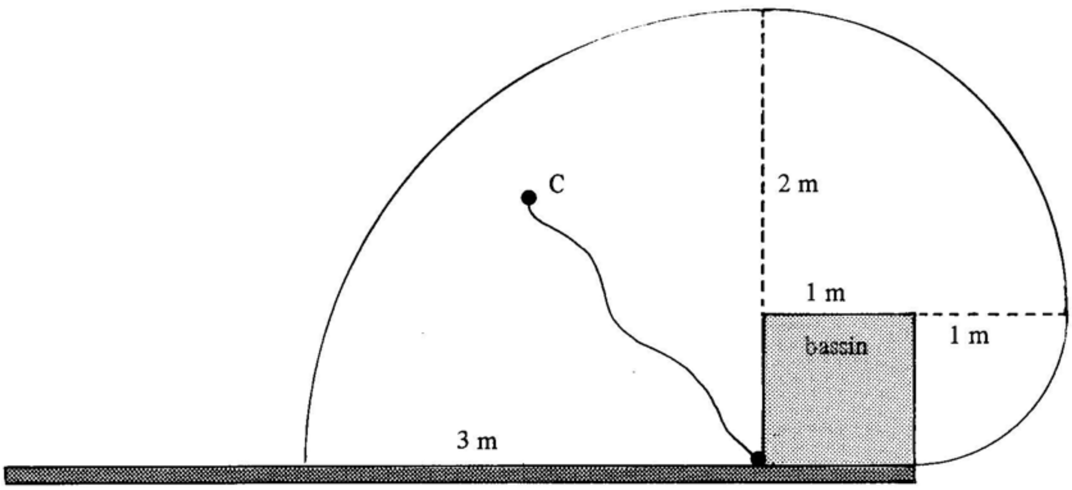
– faire un dessin à l'échelle $\frac{1}{50}$ e

– calculer l'aire du champ que peut brouter la chèvre ainsi que le périmètre de ce champ.

On prend $\pi = 3,14$



Les élèves calculent les différentes dimensions à l'échelle puis recherchent la forme du champ. Après de nombreux tâtonnements, hésitations, les élèves trouvent cette forme.



La partie broutée par la chèvre se décompose en trois quarts de cercles de rayons respectifs 3 m, 2 m et 1 m.

D'où : — l'aire en m^2 :

$$\frac{1}{4} \times (3{,}14 \times (3 \times 3) + 3{,}14 \times (2 \times 2) + 3{,}14 \times (1 \times 1)) = 10{,}99$$

— le périmètre en m :

$$\frac{3{,}14 \times 3}{2} + \frac{3{,}14 \times 2}{2} + \frac{3{,}14 \times 1}{2} + 1 + 3 = 13{,}42$$

SEPTIEME SEANCE.

2e problème.

Ce problème est une variante du précédent.

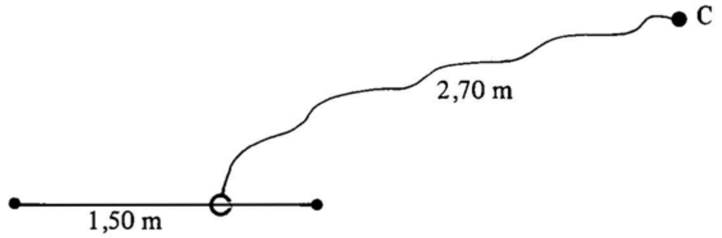
Il s'agit encore d'une chèvre attachée à une corde de 2,70 m de long. Cette corde coulisse sur un câble de 1,50 m selon le schéma joint.

– quelle est l'aire de la portion de champ pouvant être broutée par la chèvre ?

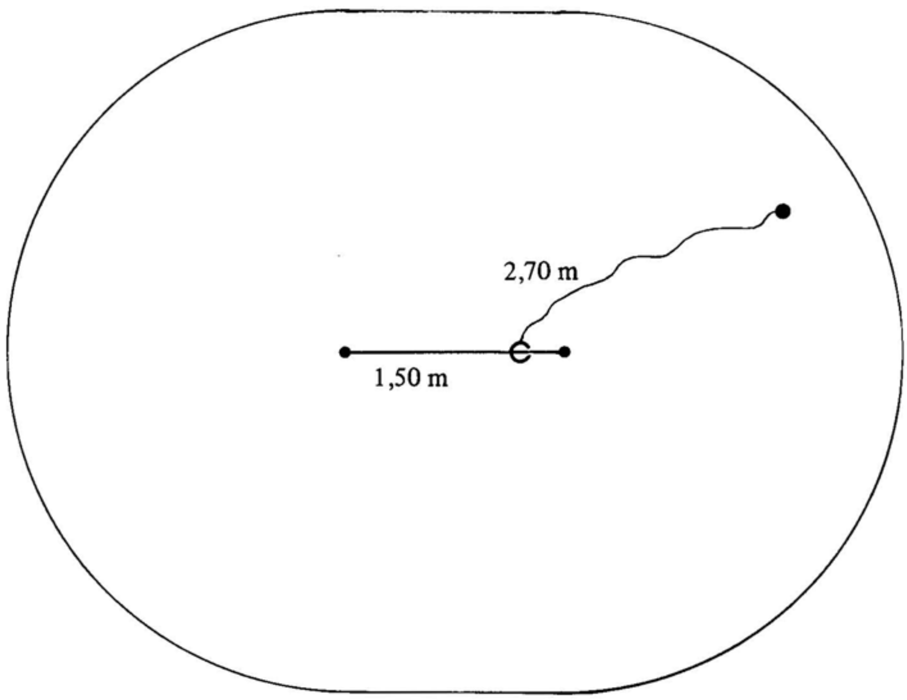
– quel est son périmètre ?

– faire un dessin à l'échelle $\frac{1}{50}$e

On prend $\pi = 3{,}14$.



Ce problème, apparemment plus simple pour la situation que le précédent a donné des résultats sensiblement équivalents. De nombreux élèves pensent que la forme du champ est un ensemb!e de trois cercles centrés sur le câble (un à chaque extrêmité, le 3e au milieu).



D'où : – l'aire du champ en m^2 : $(3{,}14 \times 2{,}7 \times 2{,}7) + (5{,}4 \times 1{,}5) = 30{,}99$

– le périmètre en mètres : $(2 \times 3{,}14 \times 2{,}7) + (2 \times 1{,}5) = 19{,}956$

L'ensemble des activités qui précèdent, centrées sur la notion de proportionnalité, ont nécessité l'emploi d'un matériel varié (balances, calculatrices, papier quadrillé, . . .) et de procédures de calculs et d'expérimentation non moins variées. L'usage des calculatrices, qui raccourcit très sensiblement la phase calcul, paraît donc indispensable.

Le lecteur qui veut s'inspirer de cet article pour mener une activité similaire dans sa propre classe doit être conscient du travail préalable à faire sur les calculatrices (voir IN - numéros 20 et 21). Cependant, l'activité peut être adaptée à une classe sans calculatrices ; il faudra alors, pour éviter les calculs longs et fastidieux qui font perdre de vue l'intérêt des leçons, organiser la classe différemment, avec par exemple la création d' "ateliers de calcul".