

GÉOMÉTRIE OU TRAHISON DES DESSINS ?

Francis REYNÈS
Collège Grand Air, Arcachon

Ce titre un peu provocateur m'est venu à l'esprit après la visite d'une exposition de peinture où j'avais vu le tableau reproduit ci-dessous :



Ceci n'est pas une pipe.

Magritte

Ce tableau de Magritte est intitulé «*La trahison des images*»... J'avais souri de l'association du tableau et de son titre ; et puis j'ai pensé à la télévision et à la géométrie... Et j'ai cessé de sourire. Je ne parlerai pas ici de la télévision.

En géométrie bien plus encore qu'en algèbre on ignore à quel jeu l'on joue du fait du statut ambigu de la «figure». En algèbre, une erreur de calcul peut être facilement circonscrite : les règles sont nettes et précises. En géométrie une «erreur de dessin» ne doit pas empêcher de raisonner correctement. Pourquoi ?

Pire que partout ailleurs, la confusion entre *objet mathématique* et *représentation* s'installe et sévit de façon dramatique en géométrie.

Pourquoi faire des dessins «précis» si ce n'est parce qu'on ne se trouve pas dans le monde mathématique ? Et parce qu'on voudrait s'en rapprocher. Prétention

illusoire : le passage au **modèle** mathématique est bien plus qu'une sorte de «passage à la limite» (point sans dimension, ligne sans épaisseur, etc.). C'est une véritable **rupture épistémologique**, c'est un changement radical de champ conceptuel.

Lorsqu'on donne, dessinés sur une feuille, un cercle et un point extérieur, et que l'on demande «*construire une tangente au cercle passant par le point donné*», tous les élèves prennent leur règle et tracent, avec la meilleure précision possible, une droite passant par le point et «frôlant» le cercle. Et ils semblent fort satisfaits du résultat ; et ils n'ont pas tort ! Car leur dessin est en général réussi avec une excellente approximation.

Il faut en effet avoir assimilé très profondément qu'une droite est définie par la connaissance de deux de ses points pour comprendre que le problème posé n'est autre que la détermination du «point de contact» et que, de plus, cette détermination ne doit pas être empirique mais théorique car il est demandé de **raisonner sur le modèle** en dépit du dessin qui se fait sur le papier. La confusion entre *modèle* et *image*, ainsi que la facilité technique à dessiner une représentation qui corresponde à la demande font obstacle au changement de point de vue, donc de démarche. Car il s'agit là d'un véritable renversement : ce n'est pas, comme on le dit trop souvent, «*construire et justifier*», mais élaborer la genèse de la définition de l'objet mathématique demandé, **puis** faire un dessin illustrant le **résultat** de cette élaboration hypothético-déductive. Le travail conceptuel sur le modèle, et lui seul, permet de prévoir et d'organiser la stratégie de la représentation graphique, alors que le dessin, par lui-même, n'apprend rien.

La figure géométrique n'est pas une représentation de la réalité physique mais une représentation du modèle mathématique de cette réalité. C'est pour cela qu'elle constitue une aide au raisonnement : elle ne visualise pas des objets mais des concepts et des relations entre ces concepts, et c'est en cela qu'elle facilite leur appréhension car on ne pense pas avec des objets mais avec des concepts.

Or, au collège presque autant qu'à l'école élémentaire, le dessin géométrique est considéré soit comme une représentation d'objets physiques (cf. par exemple la perspective cavalière), soit comme un objet d'étude en tant que tel (cf. les «propriétés de la figure»). Ce faisant, on occulte totalement la conceptualisation de l'objet géométrique, l'élaboration de l'objet mathématique et le rôle central qu'il joue, on fausse l'enchaînement de la démarche intellectuelle qui n'est pas, comme l'élève est porté à le croire,

$$\begin{array}{l} \text{objet physique} \longrightarrow \text{dessin} \longrightarrow \text{concept,} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{mais} \\ \text{objet physique} \longrightarrow \text{concept} \longrightarrow \text{dessin.} \end{array}$$

A quelles occasions offre-t-on aux élèves la possibilité de réfléchir sur la construction, le sens et la portée des concepts géométriques ?

Il n'est pas du tout trivial que deux droites sécantes aient un seul point commun. Surtout si l'on essaie d'y réfléchir à partir d'un dessin : la plupart des élèves de 6ème en «voient» plusieurs !

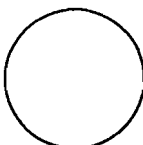
Il ne serait peut-être pas ridicule de les faire alors réfléchir sur des «trahisons» du genre

ceci n'est pas un point .

ou *ceci n'est pas une droite*



ou *ceci n'est pas un cercle*



Les dimensions de l'univers sont dans une fourchette qui va environ de $1,5 \cdot 10^{26}$ m (15 milliards d'années de lumière) à 10^{-18} m (taille d'un quark). Valeurs impossibles à se représenter et pourtant misérablement bornées au regard des possibilités mathématiques ! Possibilités qui sont celles de l'imagination créatrice.

La rupture avec le monde physique se manifeste dès les premières propriétés «élémentaires» reliant les concepts de *point* et de *droite*. Il impose donc de marquer cette rupture le plus franchement possible et de faire réfléchir aux **avantages** du modèle mathématique imaginé : il est d'une remarquable commodité d'accepter que par deux points il passe une droite unique ! Avec son concept de «point sans dimension», le mathématicien se libère de la «limite du pouvoir de résolution» qui gêne le physicien. Et il s'en libère grâce à un saut dans l'imaginaire qui sera structuré par la logique.

Il est notoirement connu que les enfants ne sont pas dépourvus d'imagination, non plus que de perspicacité. Quel merveilleux champ d'application et de développement pour ces capacités devrait alors être l'exploration de cette dialectique concret-abstrait que propose la géométrie ! A condition que les règles du jeu soient clairement explicitées, en particulier celles qui déterminent les **conventions** du dessin géométrique. On se désole de constater que les élèves confondent hypothèses et conclusion, mais confondre le dessin d'un cercle avec l'idée de cercle, n'est-ce pas prendre l'effet pour la cause ?