LES ERREURS EN ARITHMÉTIQUE UN SIÈCLE DE PRÉSOMPTION AMÉRICAINE[1]

Maurice BÉLANGER
CIRADE
Université du Québec à Montréal

Introduction

Durant la dernière décennie, il y a eu un nombre sans cesse croissant de publications s'intéressant aux erreurs en mathématiques. Cette littérature traite adéquatement de la recherche contemporaine et des idées théoriques qui pourraient nous éclairer davantage sur la compréhension de certains concepts mathématiques des élèves. L'étude de la littérature américaine en didactique des mathématiques publiée depuis le début du siècle, témoigne de l'intérêt porté aux erreurs des élèves en mathématiques depuis plus de cent ans. Par contre, un bref survol de cette période ne fournit pas de réponse unique à la question suivante : **«Qu'est-ce qu'une erreur dans la performance mathématique des élèves ?»**. En analysant ce que d'autres ont écrit par le passé, il devient clair que l'idée «d'erreur» dépend de qui pose la question, dans quel but et du contexte éducatif général du moment particulier.

Aux États-Unis, deux thèmes généraux ont dominé durant la période s'échelonnant de 1910 à 1970. Un de ces thèmes est centré sur «l'attitude» (croyance ? idéologie ?) voulant que si les erreurs des élèves en mathématiques sont **mesurées**, ces données fourniront un aperçu à la fois sur l'apprentissage et sur l'enseignement des mathématiques. La base du second thème est que les erreurs des élèves en mathématiques sont des indices d'un **«dysfonctionnement mental»** pouvant être «expliqué» par un *construct* psychologique. Les études actuelles sur les erreurs des élèves en mathématiques sont basées sur des assises moins simplistes. Néanmoins, les points de vue de la mesure et de la dysfonction sont encore présents sous diverses formes et il devient utile d'en étudier l'évolution telle que tracée par la littérature américaine portant sur la recherche en didactique des mathématiques depuis les cent dernières années. Une telle analyse devrait, tout au moins, montrer que cet intérêt porté aux erreurs des élèves n'est certes pas un phénomène nouveau.

[1] Traduction de l'anglais par Louise Poirier, Université du Québec à Montréal.

«petit x» n° 26 pp. 49 à 71, 1990-1991

1 - Les débuts au 19ème siècle

Il n'y a pas de méthode simple ou de mode d'emploi disponible pour saisir l'attitude face aux erreurs en mathématiques qu'avait l'éducation américaine au 19ème siècle, de sorte que seules quelques remarques seront faites ici. Vers la fin du 19ème siècle, la littérature américaine en éducation est étonnamment abondante. En 1893, le psychologue/éducateur G. Stanley Hall (souvent identifié comme le père de la psychologie développementale américaine) publie une bibliographie[2] de travaux sélectionnés (anglais, allemands, français et italiens) en éducation. Ce livre de 277 pages consiste en une liste classifiée de titres de livres et d'articles. La section intitulée «Nombre et mathématiques élémentaires» énumère 36 items reliés aux méthodes d'enseignement des mathématiques dont 4 en anglais, 1 en français (sur les méthodes d'enseigner la géométrie) et 31 en allemand. Ces «méthodes allemandes» s'inséraient à l'intérieur de vastes théories éducatives inspirées de la philosophie idéaliste allemande en vogue dans les milieux éducatifs américains de l'époque. Des traités de pédagogie volumineux, certains faisant 1 700 pages réparties en 3 volumes, ont été traduits en américain et utilisés pour la formation des maîtres dans les écoles normales (autre influence allemande).

Bien que tout cela soit sans grand intérêt pour nous aujourd'hui, il y a sûrement une «attitude» face aux erreurs mathématiques enterrée dans les dizaines de milliers de pages des traités de pédagogie qui ne demande qu'à être découverte, si nous voulons mieux comprendre le changement d'attitude qui s'est opéré vers le début du 20ème siècle ; par exemple, les erreurs pourraient dénoter des «facultés mentales» incomplètes ou sous-développées. Dans la bibliographie de G.S. Hall de 1893, nous retrouvons des éléments qui seront repris dans des études ultérieures tels *The Contents of Children's Minds* (G. Stanley Hall, 1882) traitant «d'un **test empirique et statistique** élaboré pour des élèves débutant le cours primaire dans les écoles publiques de Boston», et *The Growth of Children* (de Perez) «une étude **statistique** et **anthropométrique**». Vers la fin du 19ème siècle, tout était en place pour une attitude qui prévaudrait à l'aube du 20ème siècle, c'est-à-dire afin de développer une Science de l'Education, la meilleure voie pour y arriver est la mesure, incluant par le fait même la mesure des erreurs.

2 - Les erreurs et la qualité de l'enseignement

Les historiens de l'éducation qui se sont intéressés à l'évolution de la recherche ont souvent désigné Joseph Rice comme étant le pionnier dans la mesure de la performance des élèves. Rice, un médecin devenu éducateur et journaliste, a développé des tests en épellation administrés à 30 000 élèves et en arithmétique administrés à 6 000 élèves. Rice ne définit pas ce qu'il entend par «erreur», si ce n'est que «la mauvaise réponse» soit dans l'épellation du mot demandé ou dans la réponse calculée d'un problème arithmétique. En 1902 et 1903, il a publié ses résultats dans FORUM[3], un journal populaire dont il était l'éditeur. Ses conclusions ont été largement discutées

---

[2] Hall, G. Stanley and John Mansfied. «Bibliography of Education». Boston : D.C. Heath, 1893.

[3] Rice, J.M. «Educational Research : A Test in Arithmetic», *Forum*, XXXIV (oct-dec, 1902), 281-97. Rice, J.M. «Educational Research : Causes of Success and Failure in Arithmetic» *Forum*, XXXIV (jan-march, 1903), 437-52.

et aussi ridiculisées par les éducateurs professionnels de l'époque puisqu'elles étaient contraires au sens commun.

La conclusion que Rice tirait de l'analyse de ses données (par des méthodes qualifiées de statistiquement naïves par ses critiques) était que le temps passé à l'apprentissage de l'épellation ou de l'arithmétique **n'était pas** proportionnel aux bonnes réponses au test. En d'autres termes plus actuels, il n'y a pas de corrélation entre le temps passé à l'école à faire de l'arithmétique et l'obtention des bonnes réponses à un test. Pire encore, Rice tirait comme conclusion que certaines erreurs commises à un certain niveau scolaire, (par exemple en 3ème année par des élèves de neuf ans) pouvaient se retrouver à la fois à des niveaux scolaires inférieurs et supérieurs. Dans une classe, des élèves d'un même niveau scolaire réussissaient tout aussi bien que des élèves plus avancés de deux ans alors que d'autres ne pouvaient faire mieux que des élèves de deux ans moins avancés.

Ces résultats peuvent nous sembler aujourd'hui banals et même relever de la catégorie «tout le monde sait ça». Quelques remarques doivent être faites ici sur le contexte éducatif américain au tournant du siècle afin de mieux comprendre la controverse soulevée par les résultats de Rice chez les éducateurs professionnels. Afin de réfuter ses critiques sur l'enseignement, ses adversaires n'avaient qu'à attaquer ses méthodes (basées sur les bonnes et mauvaises réponses) qui, nous devons en convenir, étaient grossières même selon les standards de l'époque.

Il est à peu près impossible de tracer les changements dramatiques qui ont eu lieu dans l'éducation américaine durant la période de 1865 à 1900. Soulignons toutefois que de 1860 à 1900 le nombre d'élèves inscrits dans les écoles a doublé à chaque décennie impliquant par le fait même une augmentation du nombre d'écoles, d'enseignants, de manuels scolaires, d'administrateurs (de bureaucratie), d'écoles normales et pour payer tout cela, une augmentation des taxes. Et voilà qu'en 1902-1903 arrive Rice, un journaliste arrogant qui a l'audace de suggérer que les écoles échouent dans leur enseignement des habiletés de base telles l'épellation et l'arithmétique.

Dans son article de 1902, Rice a soulevé deux questions :

«Dans cet article, je vais présenter des faits appuyés par un test en arithmétique et je vais concentrer mon attention sur deux questions fondamentales auxquelles sont confrontés les enseignants à chaque fois qu'une matière est incorporée dans le programme scolaire :

1. Quels sont les résultats escomptés ?
2. Combien de temps doit être alloué à chaque matière à l'étude ?». (Rice, 1902, p. 281).

En soulevant ces questions sur la performance (résultats) et le temps consacré en arithmétique, Rice a ouvert une série de débats épineux qui ont hanté les éducateurs et les chercheurs en mathématiques durant les trois décennies qui ont suivi.

3 - La mesure des erreurs en mathématiques (1900-1930)

Le document publié en 1925 par Buswell et Judd[4] fournit un guide rapide aux divers articles et livres portant sur la recherche américaine en enseignement des mathématiques publiés durant cette période et le vocabulaire employé nous rappelle quels étaient les slogans de l'époque. Le mot-vedette qui revient régulièrement à travers la littérature de cette période est «efficacité». Commentant cette période, Callahan[5] a caractérisé les forces sociales en jeu de la façon suivante :

«Les éléments majeurs ont été l'accès à une position de grand prestige de l'homme d'affaires et l'acceptation grandissante des américains de l'idéologie des affaires. Un autre facteur a été le climat de doute créé par l'apparition du journalisme d'enquête. Ces facteurs ont été mélangés et renforcés par les réformateurs lorsqu'ils ont proposé de résoudre plusieurs si ce n'est la majorité des problèmes du pays en appliquant ce qu'on appelait les **méthodes modernes des affaires**». (Callahan, pp. 7-8).

Les termes tels «efficacité», «méthodes scientifiques», «standards», «exactitude», «vitesse», «solutions correctes», «éviter le gaspillage» tirés du résumé de Buswell et Judd sur la recherche en enseignement des mathématiques, reflètent quelques-unes des forces sociales et psychologiques sous-jacentes à l'attitude de l'époque. Les idées de Taylor sur l'analyse de la tâche, sur l'utilisation de mesures du temps et du déplacement dans la production industrielle et l'établissement de standards de travail s'apparentent de près à tout ceci.

Buswell et Judd ont identifié une série d'articles publiés entre 1909 et 1911 par Courtis comme marquant «le début d'un mouvement vers standardisation de l'arithmétique». Les extraits de l'article de Courtis[6] présentés ci-dessous illustrent pertinemment l'attitude de l'époque (c'est l'auteur qui souligne) :

Le test de Courtis... «a démontré la nécessité d'une plus grande connaissance de ce qui se passe réellement dans l'esprit de l'enfant lorsqu'il progresse d'un niveau scolaire à l'autre. Cela a mis en évidence l'incertitude du **produit** du système éducatif actuel ainsi que la valeur d'un entraînement complet et varié dès les premiers niveaux si nous voulons voir de grandes habiletés dans les niveaux ultérieurs. Au-dessus de tout, cela a prouvé, du moins pour l'auteur, la possibilité de **mesurer** non seulement l'état général de l'enseignement des mathématiques dans une école, l'augmentation de l'habileté et de l'**efficacité** d'un niveau à l'autre, les **carences** et **besoins** d'un niveau ou d'un individu, mais aussi les effets des changements de méthode ou de procédure. Par une **série de tests** administrés durant un certain nombre d'années, il devrait être possible de construire une **véritable science de l'enseignement** et de déterminer par des **méthodes expérimentales rigoureuses**, la véracité ou la fausseté de toute hypothèse en éducation». (Courtis, 1909).

---

[4] Buswell, Guy Thomas & Judd, Charles Hubbard. *Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic*. Chicago, The University of Chicago, 1925.

[5] Callahan, Raymond. «Changing Conceptions of the Superintendency in Public Education, 1865-1964», Fifth Simpson Lecture, New England School Development Council, 1964.

[6] Courtis, S.A. «Measurement of Growth and Efficiency in Arithmetic», *Elementary School Teacher*, X 1909, XI 1910, XI 1911.

L'extrait ci-dessous, tiré d'un écrit de 1911, nous éclaire sur la vision de l'éducation qu'avait Courtis :

«L'éducation, du moins selon un point de vue, est un **processus manufacturé**. Le **matériel brut** qui est envoyé à l'école est moulé et façonné par les forces et les expériences qu'il subit».

Durant les deux décennies suivantes, une grande variété de tests en arithmétique ont suivi ceux de Courtis. Ces tests et les recherches associées ont fait l'objet de plusieurs revues de littérature. De plus, les travaux de cette période se trouvent mentionnés dans les ouvrages contemporains portant sur les erreurs en mathématique. Nous devons nous rappeler que durant la période 1910-20, la recherche en mathématiques faisait partie d'un mouvement important dans l'éducation américaine pour «la mesure scientifique» et «l'efficacité scolaire». La création d'instruments de mesure leur permettait d'obtenir des «données scientifiques» par la suite utilisées pour améliorer les manuels scolaires, les méthodes d'enseignement et même les politiques éducatives. Pour nos besoins ici, nous essayerons de résumer quelques-unes des principales caractéristiques qui semblaient les plus pertinentes en ce qui a trait aux erreurs mathématiques.

3.1 Les erreurs en arithmétique peuvent être utilisées en tant que mesure de difficulté

Durant la période 1910-1930, des études avaient maintes et maintes fois confirmé la grande variété de performance à la fois d'un niveau scolaire à l'autre et à l'intérieur d'un même groupe d'âge. Les résultats controversés de Rice au tournant du siècle ne pouvaient plus être remis en question : la variabilité était un fait reconnu. Durant cette période où l'accent était mis sur l'efficacité, les erreurs étaient perçues comme un «gaspillage» et de plus, on recherchait la «réduction du pourcentage de variabilité»[7]. Une stratégie pour atteindre ceci était de mesurer dans quels domaines de l'arithmétique les erreurs se produisaient et, par la suite, de développer des moyens pour les éliminer.

Prenons un exemple de ces essais pour mesurer le degré de difficulté des combinaisons en addition de deux chiffres. Cette approche «fonctionne selon le principe que le nombre d'erreurs faites par les élèves aux diverses combinaisons est un indice de leur difficulté relative, la plus difficile étant celle pour laquelle il y a le plus grand nombre d'erreurs»[8].

Une telle étude a été menée par Clapp[9] où 7 000 élèves de 4ème à la 8ème (9-13 ans) ont été testés sur 100 combinaisons de deux nombres d'un chiffre en addition, soustraction et multiplication. Cette liste, selon Buswell et Judd, «est sans aucun doute le meilleur indice de la difficulté relative disponible actuellement» (1925).

---

[7] Monroe, Walter (Ed.) *Studies in Aritmetic, 1916-1917,* Indiana University Studies, n° 38, 1918.

[8] Buswell & Judd, 1925, p. 62.

[9] Clapp, Frank L. *The number Combinations : Their Relative Difficulty and the Frequency of Their Appearance in Text-Books.* Bureau of Educational Research Bulletin n° 1 and n° 2, Madison, Wisconsin : University of Wisconsin, 1924.

En examinant cette liste (tableau 1), du plus difficile (le plus d'erreurs) au plus facile (le moins d'erreurs), nous pouvons essayer de dégager les tendances ou encore nous poser des questions telles «est-ce que **0 + nombre** est plus difficile que **nombre + 0** ?». L'intérêt pour Buswell et Judd d'une telle étude est que l'importance de connaître «la difficulté relative des combinaisons d'addition devient clairement apparente, puisque sans une telle information, il s'avère difficile de déterminer adéquatement la quantité requise d'exercices» (Buswell & Judd, p. 62). D'autres ont perçu la valeur de ce genre d'étude en examinant les manuels scolaires pour s'assurer de la présence des 100 combinaisons possibles et que plus de temps et d'exercices étaient accordés aux combinaisons les plus difficiles. Clapp a mené des études similaires sur des combinaisons de nombres à un chiffre en soustraction, multiplication et division et ce pour des raisons et buts semblables.

8 + 8	9 + 0	0 + 7	7 + 1
7 + 9	2 + 6	0 + 1	2 + 9
5 + 8	9 + 3	7 + 2	2 + 5
9 + 7	0 + 6	1 + 9	2 + 8
6 + 8	6 + 5	0 + 5	4 + 4
6 + 9	3 + 8	8 + 1	4 + 1
5 + 7	3 + 4	6 + 2	3 + 1
7 + 8	3 + 9	0 + 4	4 + 0
8 + 7	2 + 3	3 + 6	1 + 8
9 + 6	3 + 5	0 + 2	9 + 9
5 + 9	6 + 3	2 + 4	7 + 7
8 + 9	7 + 3	3 + 0	2 + 0
8 + 6	2 + 7	4 + 5	6 + 1
4 + 7	8 + 4	0 + 8	5 + 4
7 + 5	4 + 8	6 + 0	3 + 3
4 + 9	8 + 0	8 + 3	1 + 1
9 + 5	1 + 0	8 + 2	9 + 2
9 + 4	5 + 2	6 + 4	8 + 8
6 + 7	4 + 2	1 + 4	1 + 3
5 + 6	1 + 2	9 + 1	1 + 6
4 + 6	5 + 3	5 + 0	1 + 7
7 + 6	0 + 3	6 + 6	2 + 1
7 + 4	0 + 5	3 + 2	2 + 2
9 + 8	5 + 1	4 + 3	5 + 5
3 + 7	7 + 0	1 + 5	0 + 0

Clapp, Frank L. : The Number Combinations, 1924
Ordre de la difficulté des combinaisons d'addition
Tableau 1

Une autre méthode utilisée alors consistait à mesurer le temps de réaction requis pour arriver à une bonne réponse. A ce sujet, Buswell et Judd mentionnent :

«que l'argument principal en faveur de cette méthode est que quoique l'on puisse avoir recours au comptage pour arriver à la bonne réponse, ceci va augmenter le temps de réaction et par le fait même indiquer que la réponse ne pouvait être donnée automatiquement». (p. 64).

Il semblerait que peu d'efforts ont été faits pour déterminer par exemple, pourquoi une combinaison d'addition était «plus difficile» (plus d'erreurs ou plus de temps requis) qu'une autre bien qu'il y ait eu quelques tentatives de relier cette difficulté au comptage. Le bagage théorique qui aurait pu être retiré de ceci, ou de tout autre type d'erreur était très limité. La théorie de la pensée dominante qui circulait dans les milieux éducatifs était l'associationisme qui proposait l'existence de liens internes. Après avoir dit que l'apprentissage consistait en la création de liens internes, il n'y avait plus grand chose à ajouter à l'intérieur de ce cadre conceptuel. Les «erreurs» de performance doivent-elles être perçues comme étant des liens erronés ou l'absence de liens ou quoi encore ?

3.2 La classification selon le type d'erreur

Depuis longtemps, il a été reconnu que les erreurs en arithmétique peuvent être regroupées et que certaines erreurs se produisent malgré les divers programmes et méthodes d'enseignement. Buswell et Judd ont identifié pour la période de 1913 à 1925 vingt études «destinées spécifiquement à l'analyse d'erreurs» (p. 115). Les premières études (1913) ont décrit des catégories générales d'erreurs, qui ne fournissaient que peu d'information, comme le démontre le tableau 2.

types d'erreur	fréquence
Erreurs de calcul en addition, soustraction ou multiplication lors d'une multiplication ou division avec des gros nombres	39
Erreurs de calcul en addition lors d'une addition	14
Erreurs de calcul en soustraction lors d'une soustraction	7
Erreurs de calcul en multiplication lors d'une multiplication	7
Erreurs de calcul en division lors d'une division	13
Erreurs de transcription des nombres	35
Confusion d'une opération sur une autre, après suggestion	14
Difficultés liées au symbolisme (fractions)	25
Connaissance insuffisante de l'opération	28

Smith, James Henry, «Individual Variations in Arithmetic», *Elementary School Journal*, 1916

Tableau 2

La tendance générale durant cette période consistait à développer des catégories d'erreurs de plus en plus détaillées. Comme des batteries de tests étaient maintenant disponibles pour les divers degrés scolaires, le système de classification pouvait désormais inclure de l'information sur la fréquence des erreurs pour chaque groupe d'âge comme l'illustre le tableau 3 ci-dessous. Bien que pour chaque opération, les catégories d'erreurs soient plus détaillées, une sous-catégorie telle «l'emprunt» en soustraction réunit encore un nombre important d'erreurs spécifiques à l'emprunt qui pourraient être subdivisées davantage.

	niveau		% d'erreur		
	IV	V	VI	VII	VIII
SOUSTRACTION					
Emprunt	54	56	52	51	55
Combinaison	36	38	45	44	41
Omission	2	1	2	3	1
Inversion	1	2	0,5	0	0
7 - 0,0, etc.	5	3	0,5	0	0
Chiffre le plus à gauche	0	0	0	0	2
MULTIPLICATION					
Tables	79	73	73	77	75
Addition	18	20	22	19	20
Zéro dans le multiplicateur	1,5	6	5	4	5
DIVISION					
Reste trop élevé	34	39	27	19	10
Multiplication	22	15	19	37	33
Soustraction	11	14	18	25	23
Dernier reste 0 dans le dividende	7	15	19	7	11
Multiplicande supérieur au dividende	7	4	1	1	1
N'abaisse pas tout le dividende	7	4	3	0	6
N'abaisse pas le bon chiffre	2	1	4	4	6
Ne place pas tout le quotient	7	1	1	3	3
Zéro dans le quotient	3	7	8	4	7

Gist, Arthur S. «Errors in the Fundamentals of Arithmetic», *School and Society*, 1917.
Pourcentage d'erreurs en soustraction, multiplication et division
Tableau 3

Cette tendance à identifier des sous-catégories d'erreurs de plus en plus fines a conduit certains chercheurs à analyser les erreurs d'un seul type d'opération. Ceci a eu pour conséquence la prolifération de «listes» d'erreurs éparpillées un peu partout dans la littérature de cette époque. Le tableau 4 présente une telle liste pour la division et fournit aussi le nombre d'erreurs par niveau scolaire.

	NIVEAU					TOTAL
	secondaire	VIII	VII	VI	V	
Nombre total d'erreurs	190	61	70	104	145	570
Combinaisons	15	19	14	29	13	90
Emprunt	9	2	1	3	5	20
Soustraction	43	4	7	18	19	91
Persistance d'un nombre	0	6	2	2	3	13
Retenue	25	7	5	14	13	64
Inversion des chiffres	3	0	1	0	2	6
Multiplication	18	3	3	12	10	46
Sur-estimation	13	17	16	14	38	98
Sous-estimation	9	9	13	42	27	100
Mauvaise association	14	13	9	27	12	79
Aucune association (au hasard)	1	3	5	2	1	12
Non classé	3	12	11	2	5	24
Incomplet	51	7	9	11	10	93

Staker, Moses «A study of the Mistakes in the Fundamental Operation in Arithmetic», 1917
(From Buswell and Judd, p. 119).
(note : les erreurs dans les totaux se trouvent dans l'original)
Tableau 4

Une des difficultés liée à ces listes d'erreurs était que chaque auteur élaborait ses propres catégories rendant par le fait même la comparaison avec d'autres listes très difficile. Au mieux, peut-on examiner un certain nombre de listes en espérant y retrouver des régularités. Par exemple, la catégorie «emprunt» se retrouvant d'une liste à l'autre pour la soustraction et la division, de sorte qu'il est permis de croire qu'il s'agit d'un type d'erreur persistant. L'existence d'une catégorie aussi globale que «l'emprunt», nous indique que dans le contexte de l'époque, les algorithmes avec emprunt exigeaient plus d'attention (dans les manuels scolaires, par exemple) ou que l'enseignant devait consacrer plus de temps à faire de tels exercices avec ses élèves. Cela pouvait aussi favoriser la création de méthodes pour enseigner l'emprunt et l'invention de diverses techniques.

3.3 Erreurs en tant que reflets des processus mentaux des élèves

Tandis que la mesure des erreurs pouvait entraîner des découvertes considérées utiles pour la standardisation et pour l'étude de la performance de groupes (classes, écoles, commissions scolaires), il était aussi souligné que la mesure et l'identification des erreurs était une composante importante de l'étude des différences individuelles. A partir du début du siècle «les différences individuelles» étaient devenues un thème courant de l'éducation américaine (et de la psychologie américaine) et demeurent encore aujourd'hui une croyance de l'idéologie éducative. Le mouvement de mesure avait soulevé une variabilité beaucoup plus grande que ce qui avait été d'abord soupçonné et ce thème est sans cesse repris dans la revue de littérature de Buswell et Judd qui ajoutent :

«Aucune leçon plus significative n'a découlé du mouvement de la mesure en éducation que celle montrant chez les élèves des différences individuelles très importantes». (p. 45).

Cette reconnaissance et acceptation d'une telle variabilité a eu au moins deux conséquences. Tout d'abord, à quelque distance imprécise d'une norme moyenne, deux catégories légitimes d'élèves ont été identifiées soit les «élèves en difficultés» (qui ont besoin d'aide) et les «élèves talentueux». A des distances encore plus éloignées de la norme, nous retrouvons les «pathologies» et les «doués». (Dans la section 4, nous analyserons brièvement le tumulte causé par l'application des modèles médicaux aux pathologies des élèves en difficulté). Deuxièmement, le concept psychologique des «liens mentaux» était nettement trop faible pour expliquer ces variations de performance en arithmétique. A ce sujet, Buswell & Judd ont écrit :

«Lorsqu'on étudie soigneusement la variété complexe de processus pour l'addition, nous pouvons facilement remettre en question la valeur éducative d'une formule qui décrit ce processus en termes de simples liens et connections... Alors que le but ultime de l'addition est d'établir des liens simples entre les nombres, le problème didactique d'atteindre cet objectif ne peut être compris que **si le caractère intime de ces processus utilisés par des élèves immatures est connu**».

Dans leur revue de littérature, Buswell et Judd commentent souvent et de façon très élogieuse ce qu'ils nomment la «méthode de Uhl». Ceci fait référence à un bel article[10] daté de 1917 duquel Buswell et Judd disent :

«Uhl a analysé ses cas en observant l'élève et en le questionnant pendant son travail. Il était ainsi en mesure de déterminer quelques unes des causes fondamentales d'erreurs en allant chercher l'information spécifique sur les processus mentaux par l'élève. L'avantage de cette procédure sur la méthode d'analyse des tests écrits ne peut être surestimée». (p. 118).

Il est intéressant de noter que ce qu'ils nomment «les processus mentaux utilisés» nous semble familier. Ils reprennent l'exemple suivant tiré de l'article de 1917 de Uhl :

(Fille de cinquième année, 11 ans) «En additionnant 4, 9 et 6, explique-t-elle, on prend le 6 puis on lui ajoute 3 du 4, ensuite 9 et 9 font 18 plus 1 ça fait 19». D'autres problèmes ont été résolus de la même façon ; ainsi, le problème 3, 9 et 8 a été résolu comme suit : 8 et 8 font 16, et 3 font 19 et 1 ça fait 20 : 5, 6 et 9, comme ceci, 6, 7, 8, 9 et 9 font 18 et 2 font 20. Cette tendance à construire les combinaisons de 8 et 9 persiste dans le cas d'un autre problème : 6, 5 et 8 ont été additionnés comme ceci : 6, 7, 8 et 8 font 16 et 3, 19. Elle a probablement résolu le premier problème de la même façon mais j'ai dû lui demander de m'expliquer à deux reprises sa méthode avant que je ne la saisisse, elle a ensuite donné l'explication reprise ci-dessus». (Uhl, 1917).

Il serait dangereux avec 70 ans de recul d'appeler ceci une «entrevue clinique» comme nous l'entendons maintenant avec toutes les idées théoriques dont nous disposons. Mais, tout au moins, ceci illustre que certains chercheurs étaient très conscients que de simples listes ou catégories d'erreurs ne suffisaient pas. Buswell et Judd d'ajouter : «Il (Uhl) nous démontre la valeur d'une technique qui, si on l'utilise systématiquement et de façon exhaustive sur un grand nombre d'élèves, pourrait devenir un plan de diagnostic efficace».

Dans son article, Uhl fait référence aux processus mentaux des élèves comme étant des «difficultés», mais Buswell et Judd y voient quelque chose de plus subtil. Après avoir analysé une étude qui présentait une liste d'erreurs en division, ils écrivent :

«La liste des types d'erreurs dans l'opération de division est de plus intéressante mais une analyse plus poussée serait nécessaire pour montrer les processus mentaux impliqués... La découverte des types d'erreurs est une base nécessaire à une analyse diagnostique mais le véritable diagnostic consiste non pas en une énumération d'erreurs ni même en une identification des types d'erreurs mais plutôt en une analyse détaillée des processus mentaux qui provoquent l'erreur». (p. 120).

En 1925, on avait connu au moins 30 ans d'intérêt et de recherche sur les erreurs des élèves en arithmétique. Toutefois, les cadres conceptuels d'alors ne permettaient pas d'englober toutes les catégories d'erreurs, ni de justifier les listes sans cesse

[10] Uhl, W.L. «The Use of Standardized Materials in Arithmetic for Diagnosing Pupils' Method of Work» *Elementary School Journal*, nov. 1917, 215-18

croissantes d'erreurs. La notion de liens mentaux n'était pas suffisamment féconde pour suggérer des théories explicatives plus puissantes ou de nouvelles approches de recherche. Néanmoins, pour les contextes éducatifs et politiques de l'époque, ce travail utilisait des mots vedettes tels «efficacité», «méthodes scientifiques» et «standardisation». Dans tout retour en arrière, il est tentant (et futile) de réfléchir sur ce qui aurait pu arriver dans les décennies suivantes si la «technique de Uhl» avait pris de l'importance et si les «processus mentaux» des élèves avaient été perçus non plus en termes de «difficultés» mais simplement en tant qu'indices du «fonctionnement du cerveau». Mais, comme nous allons le constater, il en est allé autrement.

4 - Le modèle médical et les mathématiques

Parallèlement au développement du mouvement s'intéressant à la mesure scientifique, un autre faisait son apparition aux Etats-Unis et dans plusieurs autres pays soit celui du «diagnostic et correctif». Ce mouvement s'insérait à l'intérieur d'un phénomène plus important s'intéressant à la déviance. La sociologue française Monique Vial[11] a analysé en profondeur les forces sociales, politiques, économiques et légales en place vers la fin du 19ème siècle et qui ont donné naissance à la conception médicale qui fut appliquée à l'éducation en France au début du 20ème siècle. Je ne connais pas d'étude comparable menée aux Etats-Unis.

Par modèle médical, j'entends une attitude caractérisée par trois croyances fondamentales :

1. existence (création, invention) par un groupe influent d'une certaine norme ;
2. la tolérance d'un certain degré de déviation à cette norme au-delà duquel une intervention spéciale devient nécessaire pour «renormaliser» cette aberration ;
3. le besoin de développer des **méthodes et techniques** permettant :
• a. d'établir un système de catégorisation de la déviance,
• b. de recueillir des indices en vue d'identifier cette déviance,
• c. de renormaliser la déviance.

Une telle conception médicale s'est implantée dans les milieux scolaires américains par on ne sait trop quel processus. Notons ici que cette attitude médicale s'est faufilée dans l'enseignement des mathématiques et s'est mêlée au mouvement de la mesure scientifique qui rappelons-le, pouvait fournir certaines techniques et méthodes pour recueillir des indices de déviance. Mais ce n'est pas tant les techniques et les méthodes qui nous intéressent ici mais le fait que le «diagnostic et le correctif» soit devenu un mouvement en didactique des mathématiques (avec éventuellement ses propres organisations professionnelles et ses périodiques). Ce mouvement a développé ses propres conceptions de l'erreur en mathématique.

Le livre daté de 1930 de Leo Brueckner[12] nous fournit des indices de ce qu'est l'erreur mathématique pour une telle approche dite «diagnostic et correctif». Dès 130,

[11] Vial, Monique. «Les débuts de l'enseignement spécial en France», Sresas, Vol. 18, Institut National de Recherche Pédagogique, Paris, 1979, 7-161.

[12] Brueckner, Leo. *Diagnostic and Remedial Teaching in Arithmetic*, J.C. Winston, 1930.

les tests arithmétiques foisonnaient et le livre de Brueckner porte essentiellement sur l'utilisation de ces tests à des fins de diagnostic. Il écrit :

«Les premiers tests de rendement ont été grandement améliorés en les rendant plus analytiques. Au lieu de surcharger un test avec plusieurs habiletés, nous avons développé avec grand soin des tests diagnostics pour chaque opération grâce auxquels l'enseignant peut localiser les faiblesses spécifiques causant des difficultés à l'élève et ce pour une opération donnée». (p. 3).

En résumant le but de son livre, le langage tenu par Brueckner révèle la signification qu'il attribue à l'erreur (texte souligné par M. Bélanger).

«Les résultats d'études importantes ont permis le développement :
1. de méthodes adéquates, fiables pour déterminer le **rendement** des élèves en arithmétique ;
2. des **techniques scientifiques** pour **diagnostiquer** la nature des **difficultés** et les **déficiences** entravant un progrès adéquat dans les diverses opérations et en résolution de problèmes ;
3. **d'exercices correctifs** qui peuvent être utilisés pour enrayer certains types de **difficultés** et pour amener le travail en arithmétique à un niveau satisfaisant». (p. 6).

Les erreurs des élèves dénonçaient une difficulté attribuable à une déficience. Une liste des catégories d'erreurs quoique utile pour identifier les types de difficultés n'est plus suffisante, on devait aller plus loin et trouver les racines de ces difficultés c'est-à-dire les déficiences pouvant expliquer les erreurs. Nous pouvons caractériser cette idée de la sorte :

1. les erreurs peuvent être identifiées à l'aide de tests ou d'entrevues auprès des élèves ;
2. les erreurs sont des indices de **difficultés** ;
3. une difficulté peut être attribuée à (expliquée par) des **déficiences.**

En termes plus contemporains, nous pourrions qualifier ceci de «modèle de la déficience». Toutefois, il est difficile de bien saisir ce qu'entend Brueckner par difficulté et déficience puisque tout au long de son livre, des termes tels «habileté», «habitude», «dextérité», «procédure», «processus» sont interchangeables ; à d'autres moments, il utilise une expression telle «une habitude défectueuse imparfaite de travail» en se référant à une erreur qui s'est produite durant l'utilisation d'une procédure. Cette idée chez Brueckner de mauvaises habitudes de travail englobe plusieurs notions : procédures de vocalisation, comptage au moyen de diverses méthodes (sur les doigts, etc.), manque de propreté dans le travail écrit, énoncé incorrect de la procédure, et plusieurs autres.

Ainsi le mot-clé «difficulté» devient un terme générique qui remplace le mot «erreur» dans une approche plus limitée de test et mesure. En fait, ce qui était des **listes d'erreurs** dans la revue de Buswell et Judd (1925) devient dans le livre de Brueckner (1930) des **listes de difficultés**. Ceci a eu pour effet d'étiqueter comme étant une «difficulté» des éléments qui, aujourd'hui, seraient caractérisés bien différemment. Le comptage illustre bien ceci. Brueckner cite ce qui suit d'un rapport sur le «diagnostic psychologique des difficultés de 45 élèves de la quatrième à la sixième année (10-12 ans)» :

«Les types de difficultés relevés s'avèrent des plus intéressants. La faute la plus courante est l'habitude de compter. Les enseignants ont travaillé consciencieusement l'apprentissage de toutes les combinaisons mais malgré leurs efforts, 23 élèves ont utilisé une méthode de comptage. Ils ont compté de manières pour le moins surprenantes : avec leurs lèvres, langue, orteils et doigts. Parfois, leur comptage était à peine perceptible». (p. 71).

Brueckner présente une liste des difficultés avec des exemples pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ; cette liste remplit quinze pages. Quelques exemples seront repris ici (pour fin d'explication).

Sont considérées comme étant des difficultés :

Comptage : les élèves trouvent la réponse en donnant un petit coup avec leur crayon, en comptant sur leurs doigts, en bougeant leurs lèvres, etc.

Morcellement de combinaison :

```
 66
 47
 99
------
212
```

L'élève fait la combinaison qu'il connait. Il dit «9 plus 3 ça fait 12» ; «12 plus 4, 16» ; «16 et 6 font 22».

Addition par dix :

```
 114
   5
7365
  59
-------
```

L'élève dit «5 plus 5 font 10 ; 10 plus 9 plus 1 font 20 ; 20 plus 3 ça fait 23».

Bien que le comportement de l'élève dans chacun des exemples ci-dessus entraîne la bonne réponse et n'aurait pu être coté «erreur» selon l'approche stricte de test et mesure, Brueckner les classe comme étant des difficultés. Il semblerait qu'il n'était pas permis de morceler les combinaisons ou d'additionner par dix. il y avait non seulement des bonnes et des mauvaises réponses mais aussi des bonnes et des mauvaises méthodes pour obtenir ces réponses. Si un élève utilisait une telle mauvaise méthode, cette dernière était étiquetée en tant que difficulté et par le fait même, était attribuable à un déficience. Dans ce cas, quelle pouvait être la déficience ? Brueckner a une solution fort simple pour «expliquer» ces difficultés. Tout au long de son texte, il invente une déficience. Dans ce cas-ci, la difficulté est attribuée à de **mauvaises habitudes** qui, bien entendu, expliquent peu de choses.

Brueckner présente dans des chapitres distincts les difficultés liées aux nombres entiers, aux fractions et aux nombres décimaux. Des listes élaborées d'habiletés sont présentées avec des listes encore plus longues de difficultés. Celle portant sur les difficultés liées aux opérations avec des fractions s'étend sur dix-huit pages (pp. 177-194) et fournit le pourcentage d'erreurs et le niveau de difficulté.

Je sursimplifie probablement le modèle médical de 1930 de Brueckner, mais il s'agit d'un modèle simpliste basé en partie sur une vision très réductioniste du calcul. Il écrit au début de son livre :

«L'arithmétique est composée d'un grand nombre d'habiletés spécifiques, chacune d'entre elles devant être développée grâce à des exercices approfondis».

Outre l'utilisation de la notion d'habitudes, il y a très peu d'essais dans son livre pour développer des concepts psychologiques qui pourraient fournir une théorie plus solide des déficiences pour expliquer les difficultés. Ce livre de 1930 était une tentative de rapprocher les études sur les erreurs des trente dernières années menées par les chercheurs de l'approche «test et mesure» aux problèmes soulevés par l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique. Nous devrions peut-être dire, en toute justice, qu'il s'agissait d'un essai primitif de construction d'un modèle médical qui durant les cinquante années suivantes, est devenu de plus en plus élaboré alors que les tenants de l'approche «diagnostic et correctif» ont cherché des concepts théoriques plus adéquats et un schéma conceptuel emprunté à d'autres domaines de connaissance.

5 - La quête des erreurs se poursuit : 1926-1927

5.1 L'élaboration d'un système de catégories d'erreurs

Comme nous l'avons déjà mentionné, la revue de littérature de 1925 de Buswell et Judd présentait des résumés d'études sur les erreurs couvrant la période 1900 à 1925. En 1926, Buswell et John[13] ont publié la liste des erreurs de calcul la plus complète de l'époque, basée sur leurs propres études menées auprès d'élèves de la troisième à la sixième années (8 à 12 ans). La liste des erreurs en soustraction tirée de cette étude est reproduite ci-dessous au tableau 5. Il est à noter que la catégorie «emprunt» est maintenant divisée en sous-catégories. Tout comme dans l'original, le tableau s'intitule «fréquence des habitudes en soustraction», tandis que dans son livre de 1930, Brueckner regroupe ces erreurs sous l'étiquette «les erreurs les plus communes». La liste des erreurs élaborée par Buswell et John est en quelque sorte devenue la liste maîtresse à laquelle d'autres chercheurs ont ajouté encore plus d'erreurs tout en raffinant certains détails et ce durant les cinquante ans qui suivirent[14].

De telles listes d'erreurs, avec les années, ont servi à la construction de listes de vérification utilisées lors de diagnostics individuels. On présentait une série de problèmes à un élève où chaque problème représentait un cas typique d'une erreur

[13] Buswell, G.T. & L. John. *Diagnostice Studes in Arithmetic,* Supplementary Educational Monograph, n° 30, U. of Chicago Press, 1926.

[14] On peut retrouver des tableaux d'erreurs tirés des principales études depuis 1926 dans la revue de littérature disponible dans le système ERIC, Document ED 134-468 :
Burrow, J.K. *A Review of the Literature on Computational Errors with Whole Numbers.* Mathematics Education Diagnostic and Instructional Centre, The University of British Columbia, Vancouver, 1976.

potentielle et le comportement de cet élève était noté à chaque item. Jusqu'à nos jours, divers éditeurs ont publié des «trousses» de diagnostics de toutes sortes et d'une grande variété incluant des fiches, des objets concrets, des listes récapitulatives, des normes statistiques, du matériel pour illustrer graphiquement les résultats, etc. L'emballage est nouveau mais l'idée de base date d'un certain nombre d'années.

	niveau				total
	III	IV	V	VI	
1. Erreurs de combinaison	62	75	69	40	246
2. Emprunt :					
a. Ne considère pas l'emprunt effectué	19	50	57	36	162
b. Présence d'un zéro au «2ème terme»	25	39	26	15	105
c. Soustrait le 1er terme du 2ème terme	47	33	12	4	96
d. N'emprunte pas : donne zéro comme réponse	21	20	14	4	59
e. Enlève du premier terme bien qu'aucun emprunt n'était nécessaire	2	8	10	5	25
f. Enlève 2 du premier terme après emprunt	1	5	8	6	20
g. Augmente le chiffre du premier terme	2	2	6	2	12
h. Enlève tous les nombres empruntés du chiffre le plus à gauche	1	0	1	0	3
3. Comptage	43	44	39	10	136
4. Procédures erronées :					
a. Dit l'exemple à l'envers	21	28	29	12	100
b. Additionne au lieu de soustraire	18	9	19	1	47
c. Utilise le même chiffre dans deux colonnes	18	15	3	4	40
d. Oublie une colonne	9	13	8	5	35
e. Sépare les nombres	7	5	10	2	24
f. Ignore un chiffre	12	6	2	3	23
g. Utilise un des deux termes comme reste	10	6	2	0	18
h. Commence par la colonne de gauche	2	0	1	0	3
5. Erreurs diverses :					
a. Détermine l'inconnu du connu	12	9	13	3	37
b. Erreur de lecture	14	5	13	10	42
c. Chiffres identiques dans le premier et le deuxième termes	1	5	10	3	19
d. Inverse les chiffres dans le reste	4	7	2	4	17
e. Confusion avec le processus de division ou multiplication	5	6	3	2	16
f. Saute une ou plusieurs colonnes	3	4	7	0	14
g. Soustraction basée sur une combinaison en multiplication	1	2	3	0	6
h. Erreur en écrivant la réponse	2	1	0	1	4
NOMBRE TOTAL	84	109	109	70	372

Données originales de Buswell et John (1926), nouvelles catégories par Brueckner (1930)

Fréquence des habitudes en soustraction

Tableau 5

5.2 La recherche d'erreurs systématiques

Les listes d'erreurs contenaient plusieurs items qui apparaissaient sporadiquement ou encore n'apparaissaient que dans une seule liste. Déjà en 1924, Meyers[15] avait remarqué que chez certains élèves, les erreurs étaient stables et persistantes sur une certaine période de temps. Durant les années 1930, Brueckner[16] a étudié le phénomène de la persistance des erreurs en multiplication de fractions ; Grossnickle[17] a fait une étude similaire pour la division de nombres entiers. Une étude très élaborée sur ce sujet a été publiée en 1974 par Linda Cox[18]. Elle définit ce qu'elle entend par «erreur systématique» lorsqu'il y a «récurrence d'une réponse incorrecte dans le calcul d'un algorithme spécifique. Ce processus incorrect doit se reproduire dans trois problèmes sur cinq d'un certain type». Cox a présenté plus de cinquante tableaux de données sur les erreurs d'élèves de la deuxième année à la sixième année (7 à 12 ans) pour les quatre opérations arithmétiques, tout en comparant des enfants «normaux» et «handicapés». Un suivi a été mené un an plus tard sur 115 des 191 enfants qui avaient participé à la première étude ; les résultats ont montré que 14% de tout l'échantillonnage faisait les mêmes erreurs un an plus tard.

Les tableaux de Cox présentent des descriptions de l'erreur en termes de processus utilisés. Le tableau 6 illustre 4 erreurs en soustraction (sur un total de 14 erreurs).

Nombre d'erreurs			
normal	handicapé		
27	16	32 50 24 -6 -8 -5 34 58 21	Soustrait le plus petit chiffre du plus gros, peu importe leur position
0	6	32 50 24 -6 -8 -5 36 52 29	Soustrait correctement la colonne des unités mais inscrit à la réponse la dizaine originale du premier terme
3	2	32 50 24 -6 -8 -5 6 2 9	Soustrait correctement la colonne des unités mais oublie d'inscrire la réponse à la colonne des dizaines
1	1	32 50 24 -6 -8 -5 30 50 20	Inscrit zéro à la colonne des unités et abaisse le chiffre à la colonne des dizaines
Note : 10 autres erreurs sont listées			

Erreurs de soustraction d'un nombre à un chiffre enlevé d'un nombre à deux chiffres (Cox, 1974)
Tableau 6

---

15 Meyers, G.C. «Persistence of Errors in Arithmetic». *Journal of Educational Research,* june 1924, 19-24.

16 Brueckner, L. J. & M. Elwell. «Realiability of diagnosis of error in Multiplication of Fractions», *Journal of Educational Research,* nov. 1932.

17 Grossnickle, F.E. «Reliability of Diagnosis of Certain Types of Errors in Long Division with a One-Figure Divisor». *Journal of Experimental Education,* sept. 1935.
Grossnickle, F.E. «Constancy of Error in Learning Division with a Two-Figure Divisor». *Journal of Educational Research,* nov. 1939.

18 Cox, Linda. *Analysis, classification and Frequency of Systematic Error Computation Patterns in Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Vertical Algorithms for Grades 2-6 and Special Education Classes.* U. of Kansas Medical Center, Kansas City, Kansas, 1974.
(Disponible dans le système ERIC, document ED 092-407.)

En 1977, Graeber et Wallace[19] ont publié une étude encore plus élaborée menée auprès de 1088 élèves de la maternelle à la huitième année (5 à 13 ans) dans le but d'obtenir plus d'information sur les types et la fréquence des erreurs systématiques. Ils ont utilisé les mêmes critères que Cox, «les erreurs étaient classées **systématiques** si au moins trois items montraient le même pattern d'erreurs». Chaque erreur a été recoupée avec la liste de Cox et si une nouvelle erreur était trouvée, elle était ajoutée à leur tableau. Ici encore, de longs tableaux d'erreurs sont présentés pour l'addition, la soustraction et la multiplication où sont reproduites la fréquence de chaque erreur et la comparaison faite avec les erreurs de l'étude de Cox. Une partie du tableau de la soustraction d'un nombre d'un chiffre soustrait d'un nombre à deux chiffres est présentée au tableau 7.

Exemples	Description	Fréquence Nombre (pourcentage)
51 43 76 -6 -8 -9 55 45 73	A la position des unités le plus petit chiffre est soustrait du plus gros. Le chiffre à la position des dizaines dans la somme est inscrit dans la colonne des dizaines de la réponse. •••	33 (40.7%)
51 43 76 -6 -8 -9 05 05 03	Le plus petit chiffre à la position des unités est soustrait du plus gros. Un zéro est inscrit dans la colonne des dizaines de la réponse. •••	2 (2.5%)
51 46 76 -6 -8 -9 50 40 70	Un zéro est inscrit dans la colonne des unités de la réponse. Le chiffre à la position des dizaines de la somme est inscrit dans la colonne des dizaines de la réponse. •••	2 (2.5%)
Note : 8 autres erreurs sont listées		
••• Même erreur que dans l'étude de Cox (1974)		

Erreurs en soustraction d'un nombre d'un chiffre enlevé d'un nombre à deux chiffres
(Graeber & Wallace, 1977)
Tableau 7

Graeber et Wallace entendent par erreurs systématiques, «les erreurs répétitives causées par une **règle erronée**».

Si nous comparons les listes, les tableaux et les catégories d'erreurs produits durant les soixante-dix dernières années, il est intéressant de noter que plusieurs erreurs se retrouvent sur **toutes** les listes. Nous pouvons changer les étiquettes des erreurs en tant que «habitudes erronées», «erreurs d'algorithme» ou «basées sur des règles» mais peu importe comment les chercheurs les caractérisent, le fait demeure que les enfants continuent à faire les mêmes erreurs et ce, génération après génération.

Par exemple, les tableaux 5, 6 et 7 présentent tous des erreurs en soustraction. Chacun de ces tableaux liste ce qui a été identifié comme étant les erreurs les plus communes en soustraction. Dans un problème tel 18 - 7, certains enfants durant une

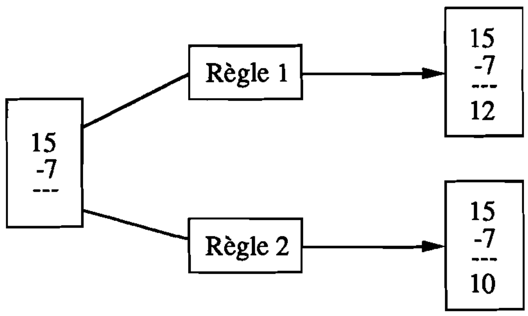
---

19 Graeber Anna & Lisa Wallace. *Identification of Systematic Errors : Final Report.* Research for Better Schools, Inc, Philadelphia, 1977.
(Disponible dans le système ERIC, ED 139-662)

entrevue pourront dire : «on ne peut enlever sept de cinq, alors sept moins cinq çà fait deux». D'autres diront «sept de cinq, c'est impossible alors c'est zéro».

Nous n'avons pas besoin de recourir à une «habitude erronée» ou à une «déficience» mais à l'instar de Graeber et Wallace, nous pouvons y référer comme étant une application de règles construites par l'enfant. Comme l'illustre le tableau ci-dessous, l'utilisation de la règle 1 entraîne l'erreur observée le plus fréquemment en soustraction (40% dans l'étude de Graeber et Wallace) et ce durant les soixante-dix dernières années. L'utilisation de la règle 2 entraîne une autre erreur commune aussi relevée dans toutes les listes d'erreurs en soustraction. Cette caractérisation des erreurs basées sur des règles par Graeber et Wallace souligne un changement d'attitude devenue monnaie courante dans les années 1970 et 1980.

Règle 1 : toujours retirer le plus petit du plus gros.
Règle 2 : puisque le plus gros du plus petit c'est impossible alors c'est zéro.



5.3 Un rapide regard en arrière

J'ai porté mon attention plus spécifiquement au calcul arithmétique tout simplement parce qu'avant les années 1970, l'accent était mis sur les erreurs de calcul. Il y a dans la littérature américaine, une rubrique modeste et déroutante datant de 1910 et portant sur les «erreurs en résolution de problème» que j'ai délibérément mise de côté. Durant les années 1920 et 1930, les erreurs en résolution de problème étaient liées à des problèmes de «lecture» et de «raisonnement» qui selon moi, n'expliquaient pas grand chose. Les domaines de recherche en «lecture» et en «raisonnement» reliés à la résolution de problèmes en mathématiques devraient être traités ailleurs, séparément.

L'attention presque exclusive portée depuis 1900 sur les erreurs de calcul devrait être analysée dans le contexte des intérêts et des mots vedettes de l'éducation américaine de ce siècle-ci. Avec l'accent mis sur la «méthode scientifique» et un désir pour la rigueur, la mesure et l'efficacité, les erreurs sont commodes à étudier même si cela demeure un travail laborieux. Grâce à des tests, nous avons rapidement accès à des données que nous pouvons compiler et classer. En parallèle au développement de l'approche «test et mesure», l'intérêt pour les différences individuelles et la déviance a produit un vaste domaine d'éducation spécialisée à l'intérieur duquel l'apprentissage des mathématiques occupe un petit espace.

6 - Quelques points d'intérêts actuels

6.1 Erreurs - algorithmes, stratégies et règles

Vers la fin des années 1960 et 1970, les erreurs étaient souvent caractérisées comme étant dues à des «algorithmes défectueux»[20], des «algorithmes erronés»[21], et des «techniques d'algorithme incorrectes»[22]. En 1977, Graeber et Wallace ont publié leur étude sur les erreurs systématiques où l'erreur est perçue comme étant due à une «utilisation d'une règle défectueuse». Durant la même année, Herbert Ginsburg[23] a publié son livre «Children's Arithmetic» dans lequel un chapitre est consacré aux «erreurs». Ginsburg écrit :

«Cela n'aide en rien d'expliquer les erreurs en termes d'un manque d'intelligence ou d'aptitude en mathématiques. De tels concepts obscurcissent le fait que les erreurs sont le résultat de stratégies systématiques d'origine sensée. Tout comme les bonnes réponses, les erreurs des enfants sont souvent produites par des stratégies personnelles particulières, mais significatives». (p. 107).

L'attribution des causes des erreurs à une application d'un algorithme, d'une stratégie ou d'une règle représente un changement significatif d'intérêt allant de l'erreur elle-même vers le processus qui la génère.

6.2 Erreurs et conceptions erronées

Durant les vingt dernières années, il y a eu un intérêt croissant non plus seulement pour les «mauvaises réponses» mais plutôt pour les connaissances que les enfants et les adolescents se construisent qui sont en quelque sorte en désaccord avec le consensus accepté ou la connaissance des experts. Le périodique **The Journal of Mathematical Behavior** contient de nombreux exemples tirés non seulement de l'arithmétique mais d'un domaine beaucoup plus vaste de la connaissance mathématique s'étendant jusqu'aux étudiants universitaires et aux adultes. Cette relation entre les erreurs et les conceptions intéresse également les chercheurs en apprentissage des sciences. Dans un article portant sur les erreurs en sciences, Fisher and Lipson[24] ont écrit :«Les erreurs survenant durant l'apprentissage des sciences, nous ouvrent une fenêtre à travers laquelle nous pouvons entrevoir le fonctionnement mental. Les erreurs sont des événements précieux et normaux du processus d'apprentissage des sciences».

Tout comme en didactique des mathématiques, les chercheurs en didactique des sciences analysent chez des élèves des niveaux secondaires et universitaires, leurs conceptions erronées et leurs erreurs en physique, biologie et chimie. Ce corpus sans

---

[20] Robert, Gerhard. «The Failure Strategies of Third Grade Arithmetic Pupils», *The Aritmetic Teacher,* may 1968.

[21] Lankford, Francis. «Some Computational Strategies of Sventh Grade Pupils», HEW, Office of Education, Washington, 1972.

[22] Ashlock, Robert. *Error Patterns in Computation.* Columbus, Ohio : Charles Merrill Publishing, Co., 1976.

[23] Ginsburg, Herbert. *Children's Arithmetic.* New York : D. Van Nostrand Co., 1977

[24] Fisher, Kathlen an Joseph Lipson. «Twenty Questions about Student Errors», *Journal of Research in Science Teaching,* 23, 9, 1986.

cesse croissant de recherche est peut-être le signe d'un futur travail de collaboration entre mathématique et science. Tout comme les erreurs en mathématiques, les erreurs en science semblent avoir une origine sensée.

6.3 Erreurs - *construct* fondamental et construction de modèle

Il y a eu dans le passé, des tentatives de lier les erreurs en mathématiques à diverses théories d'apprentissage (behaviorisme, Gestalt, etc.) et à la psychanalyse. Aujourd'hui, l'intérêt semble se centrer davantage sur la recherche de *constructs* fondamentaux (adoptés ou adaptés de plusieurs champs de connaissance) aidant à la compréhension du comportement mathématique. Robert Davis, qui s'intéresse à la question depuis plusieurs années, écrit dans son récent livre[25].

«La théorie éducative a fait preuve de faiblesse en essayant d'éviter de postuler des concepts fondamentaux ; un tel évitement a entraîné un appauvrissement des discussions théoriques, et c'est la construction de théorie qui est la marque de commerce la plus importante de la science». (p. 356).

Tandis que la recherche sur les erreurs de calcul menée de 1900 à 1970 a souffert d'un «appauvrissement des discussions théoriques», la recherche actuelle en didactique des mathématiques a une abondance de *constructs* provenant plus particulièrement des sciences cognitives, de l'informatique et de la linguistique à partir desquels elle construit des modèles et des mini-théories. De nos jours, le simple travail d'identification et de classification d'erreurs comme telles n'offre que peu d'intérêt même si soixante-dix ans de recherche ont été voués à cette tâche. Les erreurs intéressent actuellement les chercheurs lorsqu'elles peuvent servir à sonder un modèle particulier ou une mini-théorie. Elles peuvent aussi servir à une fonction plus modeste.

Par exemple, un des mots vedettes des dernières décennies est «ordinateur ». De plus en plus d'idées sont empruntées de l'informatique en tant que métaphores conceptuellement utiles dans des domaines aussi diversifiés que la musique et les sciences économiques. Pour accomplir des tâches utiles, l'architecture de l'ordinateur requiert constamment des modifications d'état accomplies par des chaînes finies de procédures - en d'autres termes, des programmes. Il est presque irrésistible d'avoir recours à la notion de «programme» en tant que métaphore pour caractériser les procédures qu'un enfant utilise pour faire un calcul arithmétique. Si le «programme» que l'enfant utilise entraîne une mauvaise réponse (une erreur) alors les erreurs peuvent être perçues en tant que «erreur procédurale», «erreur de programme» ou encore selon l'expression américaine «buggy program» (expressions toutes empruntées au langage informatique). De telles expressions vont de paire avec «algorithmes défectueux», «règles erronées» etc.

Toutefois, il y a bien plus qu'un changement de métaphore en passant de la «mauvaise habitude» aux «bugs» (pépins) en faisant référence aux erreurs. Lorsqu'on emprunte des notions d'un autre domaine non seulement en tant que métaphores mais aussi comme analogies, l'emprunt est aussi accompagné de tout un bagage théorique. Le problème le plus épineux actuellement concernant les erreurs, est probablement non

---

[25] Davis, Robert. *Learning Mathematics : The Cognitive Science Approach to Mathematics Education.* Ablex Publishing Corporation, 1986.

pas les erreurs elles-mêmes mais plutôt de déterminer quel modèle du comportement mathématique représente et explique le plus adéquatement les performances correctes et incorrectes. La définition que l'on a aujourd'hui de l'erreur dépend du modèle que l'on choisit ou que l'on construit. Voir l'erreur comme étant une «mauvaise réponse» ne suffit pas, il nous faut savoir pourquoi, expliquer ; Buswell et Judd l'avaient reconnu dès 1925, mais on ne peut construire un modèle très puissant en se basant sur des concepts tels «liens» et «habitudes». De nos jours, nous avons une abondance de concepts théoriques et de modèles dans la littérature en didactique des mathématiques.

Au début du siècle, nous avions une avalanche de listes d'erreurs à tel point qu'il a fallu y mettre de l'ordre en construisant des systèmes de classification d'erreurs. Un domaine très actif de la recherche en didactique des mathématiques durant les dernières années s'intéresse au développement du concept de nombre chez le jeune enfant où les erreurs des enfants (erreurs de comptage par exemple) ont joué un rôle significatif. Dans les années 1980, on a développé tellement de «modèles conceptuels du développement du nombre» que, récemment, Paul Cobb[26] a proposé une classification pour quelques-uns de ces modèles. Je ne veux pas discuter ici de la classification des modèles du développement du nombre proposée par Cobb mais simplement attirer l'attention sur le fait qu'il est maintenant difficile de distinguer entre tous ces modèles même si on se centre sur la didactique des mathématiques. Mais le problème est plus général et englobe aussi les recherches futures portant sur les erreurs. Si nous voulons aller au-delà de la conception évidente et même triviale de l'erreur en tant que «mauvaise réponse», alors nous devons suivre la sagesse actuelle (idéologie, attitude, mot-vedette) qui veut que pour aller de l'avant, il faut un modèle (ce qui est en fait une variation du cliché : «pour aller de l'avant, trouve (cherche, prend) une théorie)». D'une certaine façon, la boucle est bouclée. Tandis qu'au début du siècle, les chercheurs américains ont fondé leurs espoirs dans la mesure comme méthode par excellence en didactique des mathématiques, à la lumière des études actuelles, la croyance semble s'appuyer sur la construction de modèles. Une telle croyance entraîne des problèmes et peut-être aussi des solutions.

6.4 En guise de conclusion

Dans le contexte du début du siècle, il était normal de limiter la conception des erreurs à des mauvaises réponses. Cette conception allait de pair avec la vision voulant qu'il y avait de bonnes méthodes de calcul et que si ces dernières étaient bien enseignées avec suffisamment d'exercices, les erreurs seraient réduites à un niveau acceptable. De plus, les erreurs en tant que mauvaises réponses convenaient parfaitement au modèle de la mesure. Le modèle de la déviance qu'est le diagnostic et correctif en mathématiques est encore de nos jours habillé de *constructs* boiteux tels les «difficultés d'apprentissage»[27] et la «dyscalculie»[28] qui semblent reposer sur un bourbier théorique.

---

[26] Cobb, Paul. «An Analysis of Three models of Early Number Development». *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 18, n° 3, 1987.

[27] Pour une critique voir : Allardice and Ginsburg : «Children's Psychological Difficulties in Mathematics», in Ginsburg (Ed.) *The development of Mathematical Thinking*, Academic Press, 1983.

[28] Voir : Stella Baruk, *Echec et Maths*, Paris : Editions du Seuil, 1973.

Les essais actuels de comprendre les erreurs par le biais de modèles semblent être plus en mesure de capter les complexités de l'activité mathématique humaine, que n'ont pu le faire les approches antérieures. Dans un livre provoquant, Marvin Minsky[29] a écrit :

«Comment comprenons-nous quelque chose ? Presque toujours, je crois, en ayant recours à une analogie quelconque - c'est-à-dire en représentant chaque nouvelle chose comme si elle ressemblait à quelque chose déjà connu. Lorsque le fonctionnement interne d'une nouvelle chose est trop étrange ou trop compliqué pour qu'on puisse y travailler directement, nous en représentons les parties que nous pouvons en termes de signes plus familiers. De cette façon, chaque nouveauté nous semble similaire à des choses plus ordinaires. Ceci est vraiment une grande découverte, l'utilisation de signaux, de symboles, de mots et de noms. Ils permettent à notre esprit de transformer l'étrange en familier». (Minsky, 1986).

Tous ceux d'entre nous qui ont pris le temps de discuter avec les enfants à propos de **leur** mathématique, ce qui comprend certainement beaucoup de «pépins» et de conceptions erronées, ont probablement été frappés par leurs vaillants efforts à donner un sens à ce domaine. Parfois leurs efforts peuvent nous amuser et même nous étonner ; leurs résultats peuvent être erronés mais l'être de façon ingénieuse - tout comme chez les vrais mathématiciens.

Les modèles les plus récents du comportement mathématique[30] qui abondent dans nos livres et nos périodiques, sont à leur tour, divers essais pour mieux comprendre comment les gens essaient de donner un sens à leur réalité ou comme quelqu'un a déjà dit : comment ils essaient de comprendre ce qu'est comprendre. Mais chaque auteur/chercheur, dans son essai de comprendre la performance des enfants, a sa propre collection d'analogies. Lorsque ces analogies préférées et les *constructs* empruntés sont structurés en un modèle, nous obtenons non seulement une diversité de modèles mais nous tombons facilement dans des querelles de clochers. Ceci est tout simplement le reflet du grand nombre de «mots» et de «noms» que nous pouvons emprunter à d'autres domaines.

Comme Minsky nous le rappelle, l'usage de «signaux, symboles, mots et noms» est une grande découverte pour transformer l'étrange en familier. Les chercheurs intéressés à développer des modèles du comportement mathématique ont en surabondance des «mots» et des «noms» à partir desquels ils peuvent choisir. Il y a des familles de modèles dits Piagetiens, tandis que d'autres s'inspireront du traitement de l'information (information processing), de l'informatique et de l'intelligence artificielle. Parfois des querelles éclatent entre les tenants de la «connaissance conceptuelle» et ceux de la «connaissance procédurale». Certains chercheurs, en examinant les erreurs, les associeront à des «conceptions erronées» tandis que d'autres parleront «d'erreurs de procédure». De plus, il y a eu des tentatives d'édifier des modèles inspirés des sciences cognitives qui eux-mêmes incluent des notions

---

[29] Minsky, Marvin. *The Society of Mind.* New York : Simon and Schuster, 1986.
[30] Voir : *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique.* Compte rendu de la 39ème rencontre de la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.
Les éditions de l'université de Sherbrooke, (Québec), 1988.

empruntées à l'informatique, à la psychologie cognitive et à la linguistique et même à la méta-cognition et à la méta-linguistique. La manière dont les erreurs seront conçues et définies dépendra des *constructs* théoriques spécifiques choisis pour l'élaboration d'un modèle.

Je ne veux pas ici discuter de ces développements, mais il est clair que nous avons maintenant dépassé les idées simplistes sur les erreurs en mathématique qui ont eu cours durant la période allant de 1910 à 1970. Encore aujourd'hui, tout comme par le passé, il n'est toujours pas possible de cerner le sens d'une erreur sans connaître le contexte et le cadre conceptuel de la personne ou du groupe intéressé.

Etant donnés les points de vue théoriques complexes et diversifiés adoptés par les chercheurs sur les erreurs des élèves en mathématique, il est inquiétant d'apercevoir chez les politiciens et dans les conceptions des politiques éducatives*, un retour de l'idéologie de la mesure aux Etats-Unis et dans d'autres pays. Associée à cette notion de mesure, nous retrouvons celle de «bonne réponse» et son complément, «erreur». La mesure des bonnes réponses dans des tests en mathématique et en sciences entraîne des résultats traités statistiquement. Ces résultats, bien que sans signification en soi, sont malheureusement utilisés pour coter les écoles, les systèmes scolaires et les états. Pire encore, à l'échelle internationale, ces résultats servent à coter les pays : plus le résultat est bas, plus nombreuses sont les «erreurs» (comparer les performances des élèves d'un pays x avec celles du Japon semble bien en vogue).

Bien que ce classement, fortement publicisé par les médias, ait une certaine utilité psycho-politique, il s'avère dangereux de s'en servir comme base à la formulation de politiques éducatives dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (ou des sciences). Des décennies de recherche sur les erreurs en arithmétique ont démontré que les choses ne sont pas aussi simples que ceux chargés des politiques éducatives veulent bien nous le laisser croire. On peut espérer que la recherche actuelle en didactique des mathématiques nous fournira des idées plus cohérentes et moins simplistes.

---

* au Québec