INITIATION À LA DÉMONSTRATION EN 4ÈME
Compte rendu d'expérimentation

Annie PEIX
Michel LE POULICHET
Collège les Iris - Villeurbanne

I - Description et analyse de la séquence 1

I.1 De quoi s'agit-il ?

Les séquences décrites ici et mises en place dans deux classes de 4ème se situent dans le cadre d'un stage concernant l'apprentissage de la démonstration au collège[1].

La démarche sous-jacente est parfaitement décrite dans l'article de Michel Mante intitulé *«De l'initiation au raisonnement déductif à l'apprentissage de la démonstration»,* paru dans le bulletin Inter-IREM «Suivi scientifique - classe de 4ème - 1987-1988». Il n'est pas facile de résumer cette démarche en quelques lignes. Nous tentons néanmoins de le faire, tout en soulignant que la lecture de l'article cité permettrait de mieux saisir le sens des séquences mises en place en classe.

D'après cet article, le problème posé est le suivant :

1. Amener les élèves à ressentir la démonstration comme un outil de preuve performant (de nature à convaincre). Il s'agit d'un travail sur le sens de la démonstration ;
2. Apprendre aux élèves à chercher et à rédiger une démonstration. C'est un travail sur la technique de la démonstration.

C'est le point 1 qui sera développé dans cet article.

Ce travail peut être amorcé dès la 5ème. En effet, pour que la démonstration apparaisse comme un moyen efficace pour convaincre en mathématiques, il faut :

a. que les autres outils spontanément mis en œuvre par les élèves (production d'exemples, utilisation de la figure en géométrie) aient été mis en échec ;

b. que les élèves aient pris conscience de l'existence de certaines règles, que nous appellerons «règles du débat mathématiques». Ces règles, loin d'être évidentes pour les élèves, ne doivent pas rester implicites. Les voici :

règle 1 : Une propriété mathématique est soit vraie, soit fausse.
règle 2 : Des exemples ne suffisent pas pour prouver qu'une propriété est vraie.
règle 3 : Un contre-exemple suffit pour prouver qu'une propriété est fausse.

---

[1] Animé par Michel Mante, IREM de Lyon.

«petit x» n° 26 pp. 29 à 46, 1989-1990

règle 4 : En géométrie, les observations ou les mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver une propriété.

règle 5 : En mathématiques, il est nécessaire de se mettre d'accord sur des propriétés de départ.

A celles-ci s'ajoutent d'autres règles valables pour tout débat, qui peuvent être travaillées en parallèle dans toutes les matières. A savoir.

Lors d'un débat :

• il est nécessaire de demander la parole pour s'exprimer ;

• Pour espérer convaincre les autres, il faut les écouter et tenir compte de ce qui a été dit.

• La majorité n'a pas forcément raison.

I.2 Plan de notre travail

Les séquences 1 et 2 décrites ici, et qui concernent la mise en évidence de ces règles, correspondent au schéma suivant :

• proposer aux élèves une situation comportant une incertitude quant au résultat (travail de groupe). Chaque groupe doit produire une affiche comportant la réponse et une explication (des arguments) de nature à convaincre les autres groupes ;

• lors d'un débat, chaque groupe s'exprime sur chaque affiche.

Objectifs : mise en évidence par les élèves eux-mêmes de l'insuffisance des preuves produites, prise de conscience de l'existence de quelques-unes des règles du débat mathématique ;

• synthèse permettant de dégager ces règles et de les noter sur une fiche.

Ce travail peut être fait dès la 5ème. Nous l'avons conduit en début de 4ème à la suite du stage.

La séquence 3 décrira l'activité mise en place à propos du passage à la démonstration.

Au cours du reste de l'année, c'est surtout la *technique* de la démonstration qui sera travaillée, mais nous essaierons de ne pas perdre de vue que la démonstration doit garder du *sens* pour l'élève.

I.3 Description de la séquence

Le travail a été mené en parallèle dans nos deux classes de 4ème dite «avec soutien» : elle est composée de 16 élèves, en difficulté dans certaines matières, bénéficiant d'une heure supplémentaire en mathématiques et en français, et n'étudiant qu'une langue vivante.

Lors de la séance de débat, nous avons pu nous rendre mutuellement dans nos classes comme observateur.

Pour cette séquence, le débat sera décrit seulement dans la classe de 4ème avec soutien.

A. Objectifs Mise en évidence des règles 1, 2 et 3 du débat mathématique.

B. Structure Deux séances d'une heure.
1ère séance : production des affiches.
2ème séance : débat et synthèse.

C. Enoncé

La propriété suivante est-elle vraie ou fausse ?
Quel que soit l'entier ***relatif*** r *choisi, si* r *est inférieur à 5 alors son carré, (c'est-à-dire* r × r*), est inférieur à 25.*

D. Déroulement de la première séance

- Travail par groupes de 4 se déroulant selon un plan écrit au tableau :
• recherche individuelle (5 minutes) ;
• mise en commun et poursuite de la recherche (10 à 15 minutes) ;
• rédaction d'une affiche par groupe comportant la réponse et une explication dont le rôle est de convaincre les autres groupes (15 minutes).

- Le professeur précise son rôle : il ne donnera aucune explication. C'est la classe qui décidera lors d'un débat sur le contenu des affiches.

En fait, dans la classe de 4ème avec soutien, le professeur est intervenu pendant la recherche : tous les groupes étaient persuadés que la propriété était vraie. C'était ennuyeux pour le débat... Il a donc fallu insister sur le fait que chaque mot de l'énoncé était important, et que l'un des mots était souligné (le mot *relatif*).

- Il faut parfois relancer la recherche en rappelant l'affiche à produire, désamorcer les conflits éventuels à l'intérieur des groupes (s'ils sont stériles... car il est bon de laisser se développer une controverse à la mesure de l'investissement des élèves).

- Après avoir relevé les affiches, nous avons fait un choix pour l'ordre d'affichage du débat du lendemain, en mettant en dernier l'affiche qui nous paraissait la plus convaincante.

E. Déroulement de la deuxième séance

1. Le débat

- Les élèves se remettent en groupe pour un débat affiche par affiche.
- Chaque groupe désigne un porte-parole chargé d'exprimer tous les avis existant dans le groupe. Le porte-parole est désigné pour toute l'heure, et note l'avis de ses camarades au brouillon.

Forme de la réponse : nous sommes convaincus car...
ou nous ne sommes pas convaincus car...

- Les avis ainsi exprimés sont écrits par le professeur sur chaque affiche ainsi découpée.

Noms :		
		← production du groupe
Nous sommes convaincus car : - - - -	Nous ne sommes pas convaincus car : - - - -	← avis des autres groupes

Contenu des affiches et réactions des élèves (classe de 4ème avec soutien).

AFFICHE A

Notre but :

VRAIE : si a < 5 alors le produit est inférieur à 25
Quand on multiplie deux nombres relatifs négatifs, on trouve un résultat positif

Réactions des autres groupes

• sont non convaincus (tous)

Exemple de réaction : si on a a - 6 alors le nombre est plus petit que 5 mais donne un résultat supérieur à 25. C'est faux et mal expliqué.

• Le groupe A se défend. L'un des éléments A1 du groupe commence à changer d'avis, mais pas les autres.

AFFICHE B

La propriété est fausse :
car un entier relatif peut être négatif ou positif donc,
exemple : (-7) × (-7) = 49
Donc si on prend un nombre inférieur à 5, ça peut être 4 comme - 10

Réactions des autres groupes

Elèves convaincus mais font des reproches sur la façon de rédiger et d'expliquer.

A1 est définitivement convaincu, à la suite d'un débat intéressant avec un élève d'un autre groupe qui met bien en évidence la production de contre-exemples.

AFFICHE C

Comparable à celui de l'affiche B, avec une formulation différente, mais peu claire.

Réactions élèves

De même genre, les remarques portent sur la forme, la place de l'exemple (avant ou après la conclusion), l'imprécision des termes.

AFFICHE D

FAUX : car il n'y a pas que des entiers positifs, il y a aussi des entiers négatifs qui donnent des résultats supérieurs à 25 en étant inférieurs à 5. Comme -6, -7, -8, -9, etc.

Réactions des autres groupes

Convaincu, plusieurs trouvent que c'est bien rédigé, bien détaillé, un seul groupe trouve que c'est «moyennement rédigé».

2. Le vote

Les affiches sont mises côte à côte au tableau, on procède à un vote à main levée, chacun devant voter pour l'affiche qui lui paraît la plus convaincante [vote personnel].

Les voix sont assez partagées entre les fiches B, C, D. Une seule élève du groupe A vote pour son affiche et n'a pas été convaincue par les autres.

3. La synthèse

La production des élèves est utilisée pour dégager l'avis de la communauté des mathématiciens. A l'aide de l'affiche A, les élèves prennent conscience que : un exemple, plusieurs exemples même ne suffisent pas pour prouver qu'une propriété est vraie.

L'accent est mis sur le *«quel que soit»* de l'énoncé, bien décelé alors par l'élève.

A mesure que les règles sont mises en évidence, elles sont écrites au tableau notées par les élèves sur une fiche qui sera complétée lors de la séquence suivante, et que nous espérons voir utiliser quand il s'agira de démontrer.

Il semble que cette conclusion arrive assez naturellement à la fin du débat et paraît bien admise par les élèves.

4. Exercices

Deux exercices sont proposés, à chercher pour le lendemain.

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse chaque fois.

1. Quel que soit le nombre positif x, x est inférieur à son carré.
2. Tout nombre relatif est inférieur à son double.

I.4 En conclusion

Bien que nous soyons convaincus de l'utilité de mettre en place une telle progression en 4ème, il est bien trop tôt pour que nous puissions en mesurer les effets. Voici pourtant quelques constatations :

• il m'a paru important que trois élèves du groupe A aient été convaincus par d'autres lors du débat ;

• les règles du débat, si elles paraissent assez naturelles aux élèves, ne sont pas nécessairement opérationnelles tout de suite pour eux ;

• les réponses aux deux exercices proposés en fin de séance 2 ont été bien décevantes, il a fallu expliquer de nouveau les notions d'exemples et contre-exemple, et bien «enfoncer le clou».

• Cependant des questions surgissent pendant les autres cours, par exemple à propos des règles de calcul sur les puissances, et qui font penser que quelque chose mûrit doucement :

- «alors, pour prouver, il faut toujours trouver un contre-exemple ?» ;
- «et s'il n'y en a pas ?»...

Le paragraphe II suivant relate ce qui s'est passé lors d'une deuxième séquence, à propos de l'insuffisance du dessin en géométrie.

II - Description et analyse de la séquence 2

II.1 Introduction

Nous décrivons ici le déroulement de la séquence 2 selon un plan analogue à celui de la séquence 1.

1. Travail de groupe aboutissant à la production d'une affiche par groupe : une séance d'une heure.
2. Débat entre élèves, puis synthèse : une heure plus un début d'heure.

Le déroulement, le rôle du professeur, sont analogues à ceux de la séquence précédente : ils ne seront pas rappelés ici.

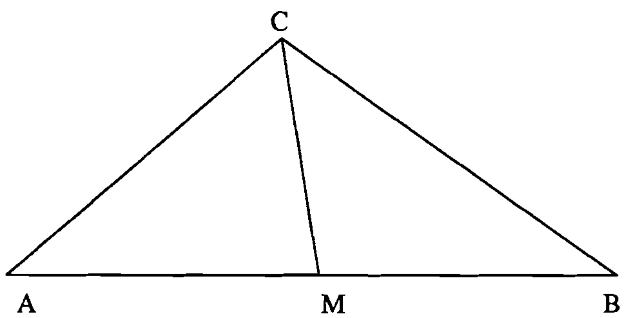
II.2 Description de la séquence

A. Objectif : Mise en évidence des règles 4 et 5 du débat mathématique.

Règle 4 : en géométrie, les observations ou les mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver une propriété.

Règle 5 : en mathématiques, il est nécessaire de se mettre d'accord sur des propriétés de départ pour prouver.

B. Enoncé du problème



Construit un triangle ABC tel que AB = 15 cm, AC = 10 cm, BC = 13 cm.
Place le milieu M de [AB] et trace la médiane [CM].
Des deux triangles AMC et CMB, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Nous avons choisi de donner les mesures des côtés du triangle ABC afin de simplifier le débat entre élèves : nous souhaitions que celui-ci porte seulement sur la comparaison des aires des deux triangles AMC et CMB. Il nous a semblé que l'incertitude que nous voulions provoquer dans la classe quant à l'égalité de ces aires serait d'autant plus grande avec une figure qui serait la même pour tous, et que l'enjeu apparaîtrait plus clairement. Cela n'empêche pas le professeur, lors de la synthèse, de fournir une explication valable pour tout triangle et de mettre ce fait en évidence.

C. Première séance : travail de groupe et production d'affiches (1 h).

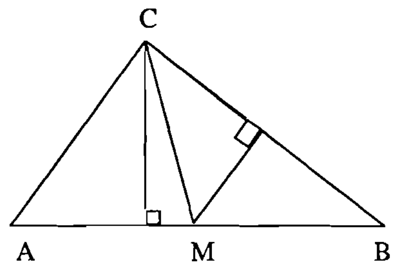
Le déroulement est semblable à celui décrit dans le § I. A la suite de cette séance, nous choisissons pour chaque classe l'ordre dans lequel les affiches seront débattues, en commençant par la moins élaborée.

D. Deuxième séance : débat et synthèse (un peu plus d'une heure).

II. 2.1 Description du déroulement dans une classe de 4ème de bon niveau général

a. Voici quelles ont été les productions des élèves

AFFICHE A



Nous pensons que le triangle CMB a la plus grande aire car :

aire du triangle AMC :

$$\frac{7{,}5 \times 8{,}5}{2} = 31{,}875 \text{ cm}^2$$

aire du triangle CMB :

$$\frac{13 \times 5}{2} = 32{,}5 \text{ CM}^2$$

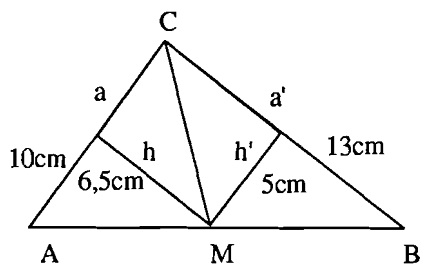
Réactions des élèves

• certains sont non convaincus car une hauteur part de M et l'autre non ;

• d'autres sont convaincus et répondent que peu importe le sommet d'où part la hauteur.

Deux fiches semblables sont ensuite présentées côte à côte au tableau (affiches B et C).

AFFICHE B



Les deux triangles sont égaux car :

$$\text{aire de AMC} = \frac{a \times h}{2} = \frac{10 \times 6{,}5}{2} = 32{,}5\text{cm}^2$$

$$\text{aire de CMB} = \frac{a' \times h'}{2} = \frac{13 \times 5}{2} = 32{,}5\text{cm}^2$$

DONC ILS SONT EGAUX;

Réactions des élèves

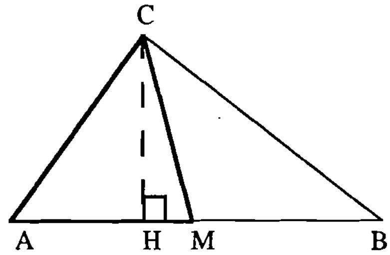
Se déclarent tous non convaincus car :

• ils ont pris certaines hauteurs et pas d'autres ;

• on peut faire partir les hauteurs d'un autre sommet.

AFFICHE D

Les deux triangles ont la même aire parce que leur hauteur est la même.



[Sur l'affiche, AMC est tracé en rouge, la hauteur [CH] en pointillés rouges, le triangle CMB est tracé en bleu, la hauteur [CH] en pointillés bleus alternés avec le rouge].

Pour nous, c'était lumineux ! Mais pas pour les élèves : aucun ne se déclare convaincu, même pas ceux ayant fourni l'affiche suivante (E) !

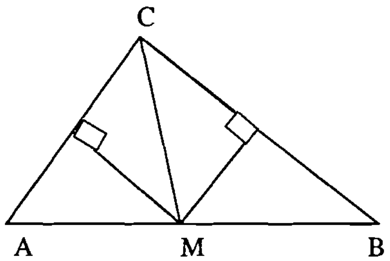
Arguments avancés
- manque d'explications ;
- on dirait que la hauteur est seulement celle de CAM ;
- [CH] n'est pas la hauteur de CMB $\boxed{\text{et}}$ pas perpendiculaire (sic) !

Un élève du groupe D va au tableau pour répondre à ces arguments et expliciter la réponse de son groupe mais son explication ne convainc personne.

AFFICHE E

Le groupe n'a pu se mettre d'accord et fournit deux réponses sur la même fiche.

$\boxed{1}$



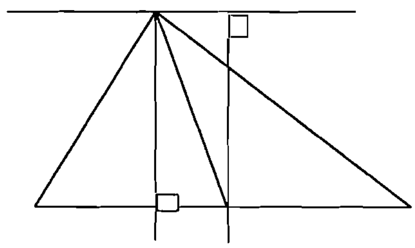
Aire du triangle AMC :

$$A = \frac{B \times h}{2} = \frac{10 \times 6{,}4}{2} = 32\text{cm}^2$$

Aire du triangle BMC :

$$A = \frac{B \times 6{,}4}{2} = \frac{5 \times 13}{2} = 32\text{cm}^2$$

$\boxed{2}$



Aire du triangle AMC :

$$A = \frac{B \times h}{2} = \frac{8{,}5 \times 7{,}5}{2} = 31{,}875\text{cm}^2$$

Aire du triangle AMC :

$$A = \frac{B \times h}{2} = \frac{8{,}5 \times 7{,}5}{2} = 31{,}875\text{cm}^2$$

Ils ont tous les deux la même aire.

Les élèves se déclarent non convaincus car :

- par $\boxed{1}$ car : $\dfrac{5 \times 13}{2} = 32{,}5$ et non 32 ;
- par $\boxed{2}$ car : les deux hauteurs devraient partir de M ;
- par $\boxed{2}$ car : ils ne comprennent pas le 2ème tracé de perpendiculaire.

Mais des élèves du groupe D se déclarent convaincu par $\boxed{2}$ à cause du bon choix de hauteur pour les triangles.

b. Le vote

Lors du débat, il était clairement apparu qu'aucun groupe ne parvenait à convaincre les autres. Toutes les affiches sont mises côte à côte au tableau. Chaque élève doit maintenant se prononcer, par un vote à main levée, pour l'affiche qui lui paraît la plus convaincante.

Le résultat du vote est remarquable : chaque groupe vote en bloc pour **son** affiche !

c. La synthèse

A ce moment, il faut bien avouer qu'un réel «**suspense**» règne dans la classe : chaque élève tient très fort à sa solution. Qui aura raison ?

Le professeur de l'autre classe vient donner l'avis de la communauté des mathématiciens. Il est lundi, 16h30, fin de journée. La cloche sonne en plein milieu de la «démonstration». Pas un élève ne songe à bouger. La qualité d'écoute ne fait aucun doute. Ils veulent savoir !

Le lendemain, les règles 4 et 5 sont inscrites sur la fiche.

II.2.2 Description du déroulement dans l'autre classe de 4ème (4ème avec soutien)

Les productions sont très différentes de celles de l'autre classe. Pour ces élèves, le problème se situe à un autre niveau : trois groupes sur quatre s'avèrent incapables de calculer correctement l'aire d'un triangle ! Comment alors obtenir que le débat porte sur l'incertitude quant à l'égalité des aires des deux triangles ?

Voici comment s'est déroulée cette séance.

a. les trois premières affiches présentées successivement comportent des calculs erronés, mais avec des erreurs de nature très différente. L'intérêt du débat réside ici dans le fait que chacun des trois groupes prend alors conscience de ses propres erreurs et en est convaincu par les autres groupes, et non par le professeur (celui-ci se contente de distribuer la parole et de noter les avis exprimés).

b. La dernière affiche de cette classe est ensuite présentée.

Les deux triangles ont les mêmes aires car :

• Si on fait $\frac{a \times h}{2}$ donne $\frac{7{,}5 \times 8{,}5}{2} = 31{,}9$.

• Si on fait pour le deuxième triangle le calcul de son aire, celui-ci est le même.

Le calcul $\widehat{AMC}$ et $\widehat{CBM}$ sont la moitié en partant du sommet (C).

Réactions des élèves

Ils sont en général peu convaincus car :

• pas de dessin,

• calcul pour un seul triangle,

• mal rédigé, incompréhensible.

c. Pour tenter de créer une incertitude quant au résultat, nous avons ensuite proposé l'affiche A de l'autre classe, qui donne pour les deux triangles des aires très voisines. (Si nous n'avions pas travaillé en parallèle, il aurait fallu proposer une affiche fictive).

Les élèves se déclarent plutôt convaincus par cette affiche (calculs clairs, bien détaillés).

d. L'heure étant presque terminée, il n'a pas été possible de procéder au vote habituel. Appel est fait à l'autre professeur pour trancher.

e. La synthèse

• La séance du lendemain débute par une séance mise au point sur la formule du calcul de l'aire d'un triangle, dans tous les cas de figures possibles. La règle 5 «se mettre d'accord sur des propriétés de départ» prend alors tout son sens.

• Ensuite le «raisonnement» exposé la veille par l'autre professeur est reconstitué avec la classe, qui semble assez convaincue.

La règle 4 portant sur l'insuffisance du dessin semble bien admise et est notée par les élèves.

II.3 En conclusion

Dans les deux classes, les productions et les réactions des élèves ont été assez différentes.

Dans la quatrième avec soutien, la qualité du débat entre élèves a été bien meilleure que lors de la séquence 1 : les prises de parole se font de façon plus ordonnée, les élèves s'écoutent mieux, l'échange est intéressant puisqu'ils parviennent eux-mêmes à se convaincre de leurs erreurs (grossières il est vrai !). C'est le point le plus positif dans cette classe.

Cependant pour que le débat porte essentiellement sur le fait de savoir si les deux triangles ont la même aire, il faudrait s'assurer auparavant que le calcul de l'aire d'un triangle ne pose pas de problème (les calculs d'aires et de volumes avaient pourtant été repris en début d'année). On voit apparaître une fois encore ici la nécessité, pour travailler sur l'initiation au raisonnement, d'utiliser des concepts que les élèves maîtrisent bien.

Dans cette classe, l'impact de la synthèse a été moins net que dans l'autre classe. Qu'en restera-t-il quand il faudra «prouver» en géométrie ?

Dans l'autre classe, où le débat reste «sportif» et les élèves pas toujours disposés à s'écouter, l'enjeu apparaît par contre d'une manière très forte. Les groupes travaillent avec beaucoup de conviction, et l'avis du professeur est fort attendu. L'objectif que nous nous étions fixé semble mieux atteint.

Les règles du débat mathématique étant maintenant fixées, nous prévoyons une troisième séquence devant en principe permettre aux élèves de produire une explication proche d'une démonstration. Songeront-ils à chercher une preuve indépendante du dessin et des mesures ?

III - Initiation à la démonstration en 4ème : dernier épisode

III.1 Introduction

Les élèves, nous l'espérons, ont pris conscience que toute explication n'est pas reconnue comme convaincante par les mathématiciens : des exemples, mêmes nombreux, des constatations, des mesures sur un dessin, ne permettent pas de prouver. Qu'est-ce donc qu'une preuve en mathématiques ? Certains posent la question. Le moment est venu de tenter le passage à la démonstration. La séquence décrite ci-après a donc pour objectif la prise de conscience de ce qu'est une démonstration en mathématiques. Le travail qui suivra pendant le reste de l'année sera surtout un travail sur la technique comment chercher... et trouver ? Comment rédiger ensuite ?

Le contenu actuel des programmes, que nous l'approuvions ou non, ménage une place importante à la géométrie pour ce qui est du raisonnement déductif. Cela oriente tout le travail sur la technique de la démonstration et justifie notre choix d'énoncé pour cette séquence.

Placés devant un problème de géométrie, les élèves vont avoir à fournir une explication qui soit une preuve. Mais pour prouver, il faut des outils. Ils ont à leur disposition :

• les règles du débat ;

• une «boîte à outils» appropriée, introduite quelques jours avant. Elle contient les propriétés nécessaires pour établir la preuve demandée, mais aussi d'autres propriétés.

III.2 Description de la séquence

A. Objectif

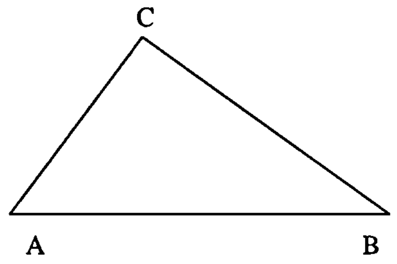
- Faire prendre conscience de ce qu'est une démonstration.
- Mettre en évidence les deux règles de la démonstration :

règle 1 : toute affirmation doit être justifiée par une propriété tirée de la «boîte à outils» ;

règle 2 : dans la progression du raisonnement, on ne peut utiliser que les résultats obtenus avant ou les données fournies par l'énoncé.

- Tester l'impact laissé par les deux séquences précédentes : lors de la recherche en groupe, puis du débat sur les affiches, les élèves songeront-ils à utiliser les règles du débat mathématique ? Si oui, de quelle façon ?

B. Enoncé du problème



Place le point K, milieu du segment [AC].
Place un point M quelconque sur le segment [BC].
Construis le point R, symétrique du point M par rapport au point K.
Est-ce que, pour n'importe quel point M de [BC], les segments [AM] et [RC] sont parallèles ?

Remarque

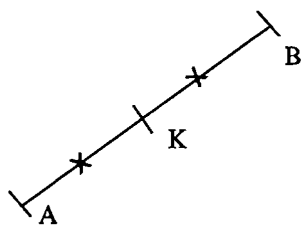
Il nous paraît important que dans la question posée, le quantificateur soit clairement explicité («pour n'importe quel point M»). Le but est de faire comprendre aux élèves la nature de l'explication qui est demandée, et de les aider à écarter des preuves s'appuyant sur des mesures pour une figure particulière.

C. Boîtes à outils

Il s'agit de propriétés vues en cinquième, que l'on rappelle avec les élèves. Elles sont notées sur une fiche qui sera complétée ultérieurement. Il a été demandé aux élèves d'apporter cette fiche, ainsi que celle des règles du débat, pour les deux séances suivantes.

1. Symétrie

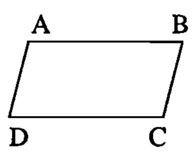
$\boxed{S}$ Si A et B sont symétriques par rapport au point K, alors K est le milieu de [AB].



Si A et B sont symétriques par rapport à K, alors AK = KB.

2. Parallélogramme

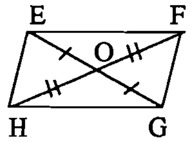
$\boxed{P_1}$ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles.



Si ABCD parallélogramme, alors
(AB) // (DC) et (AD) // (BC).

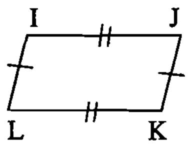
P_2

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.



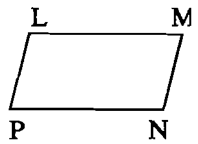
P_3

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont même longueur.



P_4

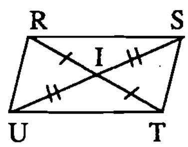
Dans un quadrilatère, si les côtés opposés sont parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.



Si (LM) // (PN) et (LP) // (MN), alors LMNP parallélogramme.

P_5

Dans un quadrilatère, si les diagonales ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.



Si I, milieu de [RT], est aussi le milieu de [SU] alors RSTU est un parallélogramme.

D. Déroulement de la 1ère séance : (une heure)

Comme dans les deux séquences précédentes, il s'agit d'un travail de groupe. Les élèves se placent à leur convenance (il y a des changements par rapport aux fois précédentes).

• Recherche individuelle (environ 9 minutes)

Il est toujours difficile, pendant ce temps de réflexion indispensable pour s'approprier le problème de canaliser l'impatience des élèves à communiquer entre eux.

• Recherche en groupe (environ 15 minutes)

Certains font référence à la boîte à outils («regardez-la»), d'autres discutent sur la position de M variable sur [BC], font plusieurs dessins, se posent mutuellement des questions («mais pourquoi. ?»). Dans l'une des classes surtout, les élèves sont actifs, intéressés, et s'investissent : ils savent maintenant comment leur affiche sera débattue à la séance suivante.

En quatrième avec soutien, l'investissement des élèves est net dans deux groupes seulement sur 4. Nous n'avons pas pu voir exactement si les élèves ont utilisé les règles du débat.

• Rédaction des affiches (environ 20 minutes)

Tous les groupes ont largement le temps de rédiger.

E. 2ème séance : le débat - début de synthèse

[Description dans l'une des classes de quatrième, de bon niveau]

Lors de ce débat, chaque groupe peut s'exprimer sur chaque affiche par l'intermédiaire d'un porte-parole. Le professeur note en bas des affiches les avis ainsi exprimés, puis dirige le débat entre groupes en distribuant la parole.

L'un de nous est présent comme observateur :

- il note les réactions à l'intérieur d'un groupe particulier (pris au hasard) ;
- il note les arguments échangés entre groupes lors du débat ;
- il intervient pour trancher en fin de séance et donner l'avis des mathématiciens ;
- il observe comment son collègue mène le débat (c'est une aide précieuse pour chacun de nous).

Rappel : lors de cette séance, le professeur distribue la parole sans se prononcer. La difficulté est d'obtenir que les élèves s'écoutent pour argumenter entre eux.

1. Production des élèves et arguments échangés

AFFICHE A

Production du groupe A

> Oui, pour n'importe quel point M de [BC], les segments [AM] et [RC] sont parallèles.
> Car :
> • chacune de nous a placé le point M sur [BC] dans différents endroits et nous avons constaté que [AM] // [RC] ;
> • les points A, R, C, M forment un parallélogramme, et on sait que tous les parallélogrammes ont les côtés opposés parallèles.

Avis des autres groupes

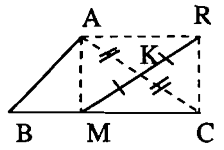
> Nous sommes *convaincus* car :
> - ont essayé plusieurs positions du point M sur [BC].
> Nous ne sommes *pas convaincus* car :
> - n'ont pas prouvé que ARCM est un parallélogramme (3 fois) ;
> - n'ont pas prouvé que les côtés opposés sont parallèles.

Réponse du groupe A : «on aurait voulu faire un dessin pour prouver mais on a manqué de place».

Le professeur à la classe : «peut-on prouver par le dessin ?».

Cela reste non tranché. Pas d'avis net. (... et les règles du débat, alors ?» pense le professeur).

AFFICHE B
Production du groupe B



Si K milieu de [AC] alors KA = KC et si R est la symétrique de M par rapport au point K, alors RK = KM et encore si on joint les 4 points A, R, C, M on obtient un quadrilatère et comme un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales RM et AC se coupent en leur milieu et alors ses côtés opposés sont parallèles entre eux.

Avis des autres groupes

Nous sommes *convaincus* car :
- ont expliqué la propriété d'un parallélogramme : si les diagonales se coupent en leur milieu alors le quadrilatère est un parallélogramme.

Nous ne sommes *pas convaincus* car :
- un quadrilatère n'est pas obligatoirement un parallélogramme (2 fois) ;
- explication embrouillée (2 fois).

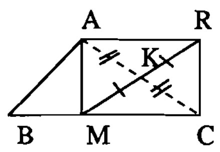
Réponse du groupe B : «on a essayé de prouver ; on voulait dire : si les diagonales se coupent en leur milieu, alors...».

Le professeur : «avez-vous dit ceci vraiment ?»

Dans le groupe, on prend conscience de la différence entre les deux phrases, sauf un élève réticent qui ne change pas d'avis.

AFFICHE C
Production du groupe C (affiche bien écrite, bien présentée)

Oui, car : [MK] = [KR] par symétrie autour du point K
[AK] = [KC] car K est le milieu de [AC].



Puisque les diagonales [AC] = [KR] se coupent en leur milieu, on obtient, en reliant les points ARMC, un parallélogramme, donc les côtés opposés [AM] et [RC] sont parallèles.

J'ai pu observer ce qui se passait dans le groupe B. Dans ce groupe, en aparté, un élève reconnaît : «ben voilà ! C'est ce qu'on voulait expliquer !» et propose à ses coéquipiers : «c'est bien expliqué, on applique P_2». Cependant, ils se mettent à chercher entre eux : «il manque sûrement quelque chose...» et se creusent les méninges car ils voudraient vraiment avoir une critique à formuler. Mais ils n'y parviennent pas (discussion longue et acharnée) et s'avouent finalement convaincus par cette affiche.

Apparemment les avis sont unanimes dans la classe :
Avis des autres groupes

Nous sommes *convaincus* car :
- bien expliqué
- on distingue P_2 et P_5
- ont bien montré que c'est un parallélogramme (2 fois)
- ont bien prouvé le parallélisme
- se sont servis des propriétés

Nous ne sommes *pas convaincus* car :

AFFICHE D

Production du groupe D

On sait que K est le milieu de [AC] donc AK = KC et que K est le milieu de [MR] donc MK = KR. Si on relie les points A, R, C, M, on obtient un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Alors c'est un parallélogramme. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles. Donc, pour n'importe quel point M de [BC], les segments [AM] et [RC] seront parallèles.

Avis des autres groupes

Nous sommes *convaincus* car :
- ont prouvé que c'est un parallélogramme (P_2, P_4, P_5)
- convaincus mais (2 fois)

Nous ne sommes *pas convaincus* car :
- K milieu de [MR] ? (pas expliqué).

AFFICHE E

Production du groupe E (dessin confus, barré)

Oui, car :
Si K est le centre de symétrie de [MR] alors K est le milieu de [MR] et c'est le milieu de [AC]. Donc [MR] et [AC] sont des diagonales qui se coupent en leur milieu K. ARCM est un quadrilatère et si dans un quadrilatère les deux diagonales se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme. Et donc ses côtés opposés sont parallèles.

Avis des autres groupes

Nous sommes *convaincus* car : - 3 élèves : oui mais mal expliqué - 3 élèves : ont bien montré le parallélogramme - ont bien mis les propriétés.	Nous ne sommes *pas convaincus* car : - 2 élèves du même groupe : peut-on utiliser le mot diagonale ? Il est mal employé - 1 élève du même groupe : symétrie : quelle est la propriété ?

2. Le vote individuel, à main levée, pour l'affiche qui paraît la plus convaincante

A : 0 ; B : 2 ; C : 12 ; D : 5 ; E : 2.

C'est éloquent ! L'affiche E contenait un raisonnement tout à fait rigoureux mais les élèves ont été rebutés par la rédaction et la présentation, peu claires.

3. La synthèse

Elle est faite par l'autre professeur, et ma foi très attendue. Cette fois encore, la sonnerie ne troublera pas l'attention des élèves. (C'est vraiment dur de faire tenir un débat en 55 minutes).

En reprenant certaines affiches, il n'est pas très difficile de mettre en évidence les différentes étapes du raisonnement, et pour chaque étape, sur quoi s'appuient les affirmations (données, propriétés). Les deux règles de la démonstration sont dégagées. Le professeur les fera noter le lendemain.

Un point reste à éclaircir à partir des réponses notées au bas des affiches : parmi les élèves qui se déclarent convaincus, en citant les propriétés utilisées (affiche C, affiche D), il apparaît qu'il y a des confusions.

Un travail sera à faire pour que chacun comprenne quelle propriété précise s'applique pour chaque situation.

Une fiche d'exercices utilisant la même boîte à outils a ensuite été proposée aux élèves, comme entraînement à la démonstration.

Dans l'autre classe de quatrième (4ème avec soutien), une seule des productions de groupe donnait une preuve argumentée, très clairement rédigée d'ailleurs. Dans les autres groupes, on s'arrêterait à des constatations.

Le débat a été faussé par des enjeux sociaux et affectifs entre élèves et je n'ai pas trouvé très intéressant de le relater. La synthèse, moins vivement attendue semble toutefois avoir porté.

III.3 Conclusion

Il est beaucoup trop tôt pour tenter d'évaluer (avec quels outils, d'ailleurs) l'impact de tout ce scénario (mise en place des règles du débat, puis des règles de la démonstration) sur le comportement des élèves vis-à-vis de la démonstration. Globalement, et sans vouloir poussez trop loin l'analyse par manque de recul, cette mise en place nous apparaît positive à plusieurs points de vue.

❑ Nous avons des idées plus claires, sur les difficultés liées à l'apprentissage de la démonstration, et des pistes de travail précises pour tenter de les diminuer.

❑ La phase 1 qui consiste à mettre d'abord en échec les preuves produites naturellement par les élèves, avant de proposer un outil performant pour démontrer, nous paraît une étape préalable essentielle. Les règles de débat sont maintenant des éléments de référence fort utiles.

❑ Introduire ces règles en cinquième permettrait de «déblayer» un peu de terrain. Mais il ne faut pas se leurrer sur les traces que ce travail laisserait, nous pensons important de le reprendre en début de quatrième.

❑ De même, il nous paraît indispensable que des séquences comme celles qui ont été décrites ici ne soient pas trop éloignées dans le temps :

- l'enchaînement est plus cohérent pour les élèves (qui ont la mémoire courte !)
- d'un débat à l'autre, les élèves s'écoutent davantage, apprennent à prendre la parole, à argumenter.

❑ Pour les élèves, même dans une classe faible, on ne peut nier l'intérêt, l'activité qui suscite une nouvelle forme de travail. Cela même est déjà positif. Ainsi, nous avons constaté que pour les autres heures de cours, ils progressent dans la prise de parole. L'écoute entre eux. Les séances, le débat, pour éprouvantes qu'elles soient pour le prof, sont une bonne école pour eux.

❑ Nous ne cherchons nullement à convaincre le lecteur... qu'il s'agisse là d'un remède miracle ! Malgré l'intérêt et l'activité des élèves, malgré une certaine qualité d'écoute, de nombreux obstacles subsistent. J'en fais la douloureuse expérience dans ma classe «avec soutien». Lors des premiers exercices de démonstration proposés à la suite de la séquence 3, j'ai bien rencontré les mêmes erreurs d'élèves qui «tournent en rond» entre conclusion et données, ou qui affirment sans justifier, ou qui justifient à tort et à travers tant ils veulent se servir de leur boîte à outils. Il me semble toutefois que les mises au point entre nous leur sont moins «extérieures», qu'ils ont davantage le désir de parvenir à prouver, et que j'ai des réponses plus précises à apporter à leurs difficultés.

Comparativement dans l'autre quatrième, «ça baigne...».

❑ Nous sommes prêts, bien sûr, à poursuivre et à approfondir cette tentative, et surtout à envisager la suite. Même si nous admettons que le fait de démontrer a davantage de sens pour nos élèves, nous devons maintenant les entraîner à chercher, à trouver, puis à rédiger. Cette première activité n'est qu'un premier pas, il faut maintenant proposer aux élèves d'autres exercices de démonstration. Ce travail sur l'apprentissage de la technique de la démonstration, nous n'avons pas eu l'occasion de le creuser. Si certains d'entre vous ont des éléments de réponse, nous serions ravis d'en prendre connaissance.