STRATÉGIES DE PRISE EN COMPTE DE L'ERREUR PAR DES ENSEIGNANTS DE MATHS EN LIAISON AVEC CERTAINES DE LEURS REPRÉSENTATIONS*

Suzette ROUSSET-BERT
Enseignante lycée technique

Introduction

Nous nous proposons dans le travail présenté ici d'étudier les différentes stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de mathématiques au travers d'observations de séances en classe, puis de confronter ces pratiques avec un certain nombre de représentations de ces enseignants qui seront précisées plus loin.

Cadre de notre travail : la problématique des représentations

Nous avons tous constaté de manière empirique les différences de conduites de séances d'exercices en classe chez les enseignants, en particulier en ce qui concerne la prise en compte des erreurs des élèves. Tel enseignant interviendra pour signaler une erreur dès qu'elle se manifeste alors qu'un autre laissera plus volontiers un élève "s'enferrer" dans son erreur afin qu'il trouve lui-même la contradiction au bout d'un moment. Tel enseignant laissera les élèves chercher à leur rythme pendant un long moment avant de corriger alors qu'un autre ne pourra s'empêcher de donner lui même très vite la bonne réponse.

Nous faisons l'hypothèse que ces attitudes des enseignants en classe relèvent de certains choix globaux, relativement stables, bien souvent non explicites, dépendant de l'histoire antérieure de l'enseignant et traduisant ses "convictions" sur les mathématiques, la bonne façon de les enseigner, l'appropriation du savoir par les élèves, le métier d'enseignant....

C'est pourquoi nous avons choisi d'inclure dans notre cadre de travail (didactique) le concept de représentation tel qu'il est défini en psychologie sociale, pour modéliser ce qui se passe "en amont" de la séance mathématique. Nous employons ici le mot **représentation** au sens où il est défini dans Abric J.C. (1987) : "la représentation est le produit et le processus d'une activité mentale par laquelle un individu ou un groupe d'individus reconstitue le réel auquel il est confronté et lui attribue une signification spécifique"... "La représentation résulte à la fois de la réalité de l'objet, de la subjectivité de celui qui la véhicule, et du système social dans lequel s'inscrit la relation sujet-objet" (d'où la qualification de représentations sociales).

* Cet article est tiré d'un mémoire de D.E.A. de didactique. Université Joseph Fourier Grenoble. Rousset-Bert 1990.

La représentation de l'objet intègre les caractéristiques de l'objet, les expériences antérieures de l'enseignant et son propre système d'attitudes et de normes. Lorsque nous parlerons dans la suite de représentation, ce sera à propos d'un objet donné à un moment donné : par exemple la représentation d'un enseignant donné sur la difficulté en jeu dans la notion de racine carrée, à un moment donné de son évolution dans son métier.

Nous avons choisi d'étudier les représentations des enseignants concernant :

A - ce qui est important et difficile dans la notion en jeu,

B - l'appropriation du savoir par les élèves,

C - les objectifs prioritaires de l'enseignement des maths à des élèves de l'enseignement technique.

Nos objectifs

1) Mettre en évidence, lors d'observations de séances en classe, différentes stratégies de prise en compte de l'erreur, leur influence sur l'émergence des erreurs en classe et l'activité des élèves durant la séance. Les comparaisons de séances seront faites en fonction de ces deux points de vue uniquement. Même si certaines séances apparaissent plus centrées que d'autres sur l'objectif "démonter le mécanisme de l'erreur", nous n'avons aucun moyen d'affirmer que les différentes stratégies des enseignants entraînent chez les élèves des comportements différents au niveau de l'apprentissage. En effet les élèves arrivent en classe avec leur propre représentation de l'apprentissage et développent peut-être eux-mêmes des stratégies d'adaptation aux différentes méthodes des enseignants, ce qui rend le problème complexe à étudier. Nous ne disposons pour l'instant d'aucune étude à ce sujet.

2) Confronter ces pratiques avec les représentations définies en A, B, C dont nous avons la trace au moyen d'entretiens individuels avec les enseignants.

3) Rechercher des indices d'une hiérarchie ou d'une dépendance entre ces représentations ainsi que des indices de leur stabilité ou de leur variabilité. Le caractère de stabilité ou d'adaptabilité des représentations nous intéresse du point de vue de la recherche sur le fonctionnement des structures cognitives. Il nous intéresse également dans l'optique d'une amélioration de la formation des enseignants qui, pour être efficace, doit nécessairement tenir compte des représentations initiales et réfléchir aux possibilités de leur modification.

Méthodologie

Cette étude exige donc des choix méthodologiques permettant :

* d'observer en situation de classe :

a) les différents déroulements de séance,

b) les types d'erreurs effectivement retenues à propos d'un concept mathématique donné,

c) les différentes stratégies de traitement de ces erreurs,

d) l'influence de ces stratégies sur l'émergence des erreurs des élèves pendant la classe et leur activité pendant la classe.

* de disposer d'une trace, à un moment donné, en situation d'entretien individuel, des représentations des enseignants qui sont l'objet de notre étude et de les confronter avec l'observation des pratiques.

* de confronter les erreurs qui se sont effectivement produites pendant la classe avec les erreurs que l'enseignant avait prévues et celles qu'il a retenues par la suite comme étant les plus importantes.

1 - Essai de clarification des concepts en jeu. Justification des différents choix effectués.

1.1 A propos de l'erreur

Un premier souci de rationalité nous a conduit à rechercher la définition du mot erreur. Voici la définition que donne le PETIT LAROUSSE avec les glissements de sens dont nous reparlerons plus loin.

erreur : *opinion, jugement contraire à la vérité,*
fausse doctrine, opinion fausse,
faute, méprise,
dérèglement, égarement de conduite.

A la lecture de la première ligne, *opinion, jugement contraire à la vérité,* une première question se pose immédiatement à nous : y a-t-il une vérité ? Nous partageons tout à fait l'avis de R. Charnay (1987) lorsqu'il écrit : "L'image des mathématiques très répandue est celle d'une discipline où il est toujours possible de trancher entre le vrai et le faux. A ce titre elles seraient effectivement un lieu privilégié pour l'étude des comportements erronés. Disons tout de suite que cette position tient difficilement si l'on se réfère à l'histoire des mathématiques (exemples de théorèmes non démontrés, de la crise des fondements, des géométries non euclidiennes...). La rigueur du raisonnement mathématique ne conduit pas toujours à décider aisément du vrai et du faux".

Il en est de même dans l'enseignement où les connaissances considérées comme vraies à un moment donné seront considérées comme incomplètes, non définitives et remises en cause un peu plus tard. Le thème mathématique sur lequel nous allons travailler dans la suite - **racine carrée** - est un exemple pour lequel la construction du concept se fait sur plusieurs années et nécessite une remise en cause des connaissances antérieures des élèves sur les nombres.

"C'est en terme d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique ... En fait on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites" écrit Bachelard dans *La formation de l'esprit scientifique* et il précise un peu plus loin : "Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. J'ai souvent été frappé du fait que les professeurs de sciences, plus encore que les autres si c'est possible, ne comprennent pas qu'on ne comprenne pas".

1.2 L'erreur dans les approches behavioristes et constructivistes

On peut distinguer deux tendances extrêmes qui peuvent aider à caractériser la position des enseignants face à l'erreur en précisant que les discours ne sont jamais aussi tranchés et que les pratiques sont éventuellement contradictoires avec les discours.

* pour les approches de type behavioriste, l'erreur est une anomalie, une mauvaise réponse à corriger (se référer aux mots *égarement dérèglement* de la définition donnée plus haut). Il faut la faire disparaître avec des exercices appropriés répétés et développer des renforcements. Une connaissance nouvelle est le résultat d'une juxtaposition de connaissances antérieures bien organisées en étapes successives. Il suffit donc de bien "baliser" le chemin qui mène à la connaissance.

* pour les approches de type constructiviste, l'individu qui apprend construit lui même ses connaissances à partir d'une interaction entre le sujet et l'objet de connaissance. La connaissance nouvelle n'est pas seulement une juxtaposition des connaissances antérieures. Elle est l'occasion d'une restructuration de ces connaissances. L'erreur nous renseigne sur les processus de pensée de l'élève. L'élève peut progresser par ses erreurs car elles sont l'occasion de prendre conscience des conflits qui existent entre les anciennes et les nouvelles connaissances.

G. Brousseau (1983) écrit : "L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant se révèle fausse ou inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que de celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise".

1.3 De quelle erreur allons nous parler ?

Nous avons vu que l'on peut porter différents regards sur le phénomène didactique qu'est l'erreur dans l'enseignement des mathématiques. Lorsque l'on parle d'une erreur, on le fait donc consciemment ou non à partir de points de vue particuliers. On pourrait donc être tenté de donner une définition non pas de "l'erreur" au singulier mais de plusieurs "types" d'erreurs mais alors la classification s'avère tout aussi difficile. N. Rouche dans son article questions sur les erreurs CIAEM (1988) écrit : "le mot erreur rend des services précis dans la langue commune, non pas parce que chacun le réfère à une définition univoque mais bien parce qu'en chacune de ses occurrences il sert à évoquer un accident particulier que le contexte suffit à cerner".

Nous allons donc dans la suite de ce travail repérer des accidents qualifiés d'erreurs et nous adopterons comme définition provisoire celle empruntée à R. Charnay : "On avancera qu'il y a erreur, en mathématiques, chaque fois qu'une réponse, une procédure s'oppose à une autre reconnue comme vraie", définition qui a le grand mérite de relativiser la notion du vrai.

1.4 Le choix du concept mathématique

Lorsqu'on s'intéresse à l'erreur, on peut se situer à plusieurs niveaux dans le triangle didactique habituel *maître - élève - savoir*. Le thème de notre travail se situe essentiellement sur l'axe maître-élève mais il concerne également les deux autres axes : élève-savoir, maître-savoir.

Nous avons pensé que notre travail serait plus riche si nous nous situions dans un domaine mathématique où l'axe élève-savoir avait déjà été "défriché". Notre premier souci a donc été de choisir un thème mathématique où des travaux didactiques aient permis de mettre en évidence :

* des erreurs liées à un obstacle épistémologique (donc des difficultés propres au savoir considéré),

* des erreurs liées aux conceptions construites par les élèves sur le savoir considéré à partir de connaissances antérieures,

* des erreurs liées à des obstacles didactiques (cas où on peut faire l'hypothèse que des erreurs sont créées ou renforcées par des stratégies d'apprentissage).

1.5 Les choix méthodologiques

Nous avions plusieurs possibilités concernant l'objet de notre observation. Nous avons choisi d'observer des *séances d'exercices de révision* sur des notions supposées acquises dans les classes antérieures. Nous pouvions alors étudier comment l'enseignant se situe par rapport aux acquis antérieurs de ses élèves et aux erreurs qui persistent. Nous avons choisi ce type de séance - plutôt qu'une séance d'introduction d'un concept nouveau - en pensant qu'elle nous conduirait plus rapidement et plus directement à un large éventail d'erreurs en une seule séance d'observation.

Enfin, nous avons choisi d'observer une *même séance d'exercices* (donc construite par nous) conduite par des enseignants différents, plutôt que des séances différentes construites par chaque enseignant. Les avantages sont :

* la comparaison facilitée des différents déroulements de séances et des différentes stratégies de traitement de l'erreur ;

* un travail possible sur les représentations à partir des différentes relectures par chaque enseignant de la même séance ;

* l'introduction éventuelle d'un questionnement de l'enseignant à partir d'exercices qu'il n'aurait peut-être pas choisis et qui ont provoqué chez les élèves des erreurs inattendues pour lui.

La prise en compte de l'erreur en liaison avec les représentations

En proposant une même séance à plusieurs enseignants, nous étions naturellement amenés à travailler sur les différences de pratique en classe (temps de recherche laissé aux élèves, stratégies de correction...) et sur les différences d'interprétation faites après coup par les enseignants de cette même séance. Donc il nous fallait tenir compte de choix globaux faits a priori (explicitement ou non) par les enseignants, dans un domaine "méta-mathématique". Ces choix semblent stables et non aléatoires et on peut les mettre en relation avec les représentations en particulier sur l'apprentissage, sur le métier d'enseignant... Ces représentations peuvent être qualifiées de sociales car elles sont également issues de la confrontation à l'environnement socio-culturel.

Nous avons donc essayé de remonter en amont de ces choix jusqu'aux représentations sachant bien la difficulté de l'entreprise puisque l'on touche ici à des convictions personnelles liées aux expériences antérieures de l'individu (pendant ses études et lors de l'exercice de son métier), à l'environnement socio culturel, à des caractéristiques encore plus personnelles.

Nous préciserons au paragraphe 5 à quelle part modeste du travail sur les représentations nous nous sommes attaqués.

Le choix des élèves et des enseignants

Nous avons choisi un public "homogène" du point de vue de l'orientation, c'est-à-dire des élèves orientés en seconde de lycée technique (cela ne signifie pas pour autant que ces élèves soient homogènes au sujet de l'acquisition des connaissances, les raisons de leur orientation étant éminemment variables). Le public d'enseignants est donc "homogène" de ce même point de vue restreint. Ils enseignent tous actuellement en seconde de lycée technique. Ils ont donc l'habitude de voir dans leurs classes un certain nombre d'élèves en difficulté et ils ont été nécessairement confrontés au problème des erreurs massives dans leurs pratiques d'enseignant.

Les choix en ce qui concerne l'entretien

Pour explorer les représentations des enseignants nous avons complété l'observation des séances par un entretien de chaque enseignant. Le moment de l'entretien est encore un élément de choix en fonction des objectifs :

* entretien de l'enseignant avant observation de la séance, ce qui incite à un discours très général et favorise l'analyse du décalage entre le discours a priori et la pratique observée par la suite.

* entretien de l'enseignant après observation de la séance, ce qui incite à un discours plus précis sur le thème mathématique étudié, et conduit à travailler plutôt sur les relectures de la séance, ainsi que sur les modifications observables des représentations. En effet, l'entretien a posteriori permet à l'enseignant de réfléchir autrement à la séance, nous donnant ainsi accès à la variabilité des représentations. Outre le changement de regard de l'enseignant rendu possible, l'entretien permet à l'expérimentateur une réflexion sur l'amélioration des séquences didactiques qu'il est amené à construire.

2 - Description de l'ensemble du dispositif expérimental

Nous avons proposé à quatre enseignants de lycées techniques une même séance de travaux dirigés de seconde. Notre travail s'est déroulé en plusieurs étapes.

2.1 Le choix du concept mathématique et des exercices proposés

Notre choix s'est porté sur le thème **racine carrée**, thème propice à l'étude de l'erreur puisque beaucoup d'élèves arrivent en seconde en maîtrisant mal cette notion. De plus, il s'agit bien dans cette classe d'une séance de révision d'une notion introduite en troisième. Le thème racine carrée n'est pas en soi une partie du programme de seconde, il peut être abordé dans le cadre "activités numériques" à condition de ne pas donner lieu à des excès de technicité. Dans ce cadre, le programme de seconde en vigueur au moment de l'expérimentation (1989-90) précise *qu'il s'agit de consolider, de compléter et de mobiliser les capacités acquises au collège.* Dans l'optique des nouveaux programmes de seconde en vigueur à la rentrée 90 il conviendrait sans doute de modifier la séance.

A partir des travaux didactiques de T. Assude (1989) et M. Sokona (1989), nous avons construit une séance d'exercices que nous qualifierons de mixte au sens où elle comporte à la fois :

* des questions (empruntées au travail de T. Assude) destinées à faire émerger les conceptions des élèves ;

* des exercices "classiques" de révisions sur racines carrées ;

* des exercices de recherche de problème. (Voir page 57).

Cette séance est prévue comme une séance habituelle d'exercices de révision ou de remise au point de connaissances supposées acquises en troisième. Ce n'est pas une situation de test donnant lieu à évaluation. Elle permet d'étudier l'émergence de l'erreur dans un cadre de révision et de reconstruction des connaissances.

2.2 Le contrat avec les enseignants

Le texte de la séance d'exercices est proposé à chacun des quatre enseignants environ une semaine avant la passation dans sa classe. Nous lui demandons de prévoir par écrit les différentes réponses et les différentes stratégies exactes ou erronées susceptibles d'être données par ses élèves pour nous permettre de comparer avec les erreurs qui se sont effectivement produites en classe. Par ailleurs chaque enseignant dispose d'un document écrit lui précisant notre objet d'observation . En effet le contrat doit être clair : l'enseignant est prévenu que notre observation sera centrée sur les inter-relations enseignants-élèves.

2.3 Observation des différents déroulements de la séance

L'observation porte sur le déroulement de la séance (1h.30) dans chacun des quatre groupes de TD (environ 15 élèves). L'intégralité de la séance est enregistrée, complétée par les notes des observateurs. Nous avons mis au point des consignes très précises pour les élèves et les enseignants qui permettent de distinguer sur la copie la réponse initiale de l'élève de la correction : nous pouvons ainsi associer pour les deux premières feuilles d'exercices essentiellement l'intervention de l'enseignant à la réponse initiale de l'élève.

2.4 Entretien avec l'enseignant

Un entretien avec l'enseignant suit chaque enregistrement de séance environ une semaine après. Cet entretien est de type semi directif. Toutes les questions sont posées, pas forcément dans l'ordre où elles sont écrites sur le papier. Nous avons plutôt suivi la logique du discours de l'enseignant. En particulier les réponses à la question 8 sont souvent apparues spontanément avant même que la question ne soit posée. (Voir page 57).

2.5 Préexpérimentation

Elle s'est déroulée dans une classe de 2nde TMS (techniques médico sociales) de "niveau" équivalent à celui des classes des quatre enseignants concernés par la suite. Cette préexpérimentation a permis de vérifier si les résultats des travaux cités (faits en partie en premier cycle) sont confirmés en seconde. Elle permet également de disposer avant l'expérimentation elle-même d'un corpus d'erreurs commises par les élèves et donc de connaître à l'avance une bonne partie des erreurs susceptibles d'émerger dans les classes des autres enseignants observés.

3 - Analyse préalable de la séance proposée

3.1 Objectifs des exercices choisis du point de vue élève

Nous avons repris à notre compte les objectifs fixés dans les travaux cités sur racine carrée, notre but étant de nous appuyer sur des travaux déjà existants au niveau des élèves. Les questions qui suivent sont soit directement empruntées au travail de T.Assude, soit fortement influencées par celui-ci.

a) Quelle signification les élèves donnent-ils au symbole $\sqrt{a}$ et dans quel domaine (algébrique, géométrique....) se situent-ils lors de l'attribution de cette signification ?

b) Quelles sont les conceptions des élèves au sujet des nombres représentés par les racines carrées ?

c) Comment les élèves construisent-ils (sans machine) une procédure de calcul des racines carrées ? Pensent-ils spontanément, sans être guidés à construire une procédure de calcul approché ?

d) Devant l'écriture $\sqrt{a}$ les élèves voient-ils un nombre ou bien un opérateur indiquant une opération ou une succession d'opérations ?

e) L'existence de $\sqrt{a}$ est-elle plus liée au fait que a est un nombre positif ou bien au fait que a est un carré parfait ? ($\sqrt{a}$ devant être alors un entier ou un nombre qui se termine).

f) Quels sont les nombres dont disposent effectivement les élèves à leur arrivée en seconde ? Où en est-on dans la construction du concept de réel ? Un nombre irrationnel est-il "distancé" de sa valeur décimale approchée donnée par la machine ?

g) Les opérations algébriques sur les racines carrées sont-elles maîtrisées ?

h) Concernant le domaine de validité : est-il mentionné à la première question ? Est-il compris dans des situations numériques puis des situations littérales plus complexes ? Quels sont les blocages dus à la complexité des écritures ?

i) La racine carrée est-elle utilisée dans la résolution d'équations simples du deuxième degré ?

3.2 Objectifs des exercices du point de vue de notre observation

* Les deux premières feuilles destinées à recueillir le point de vue des élèves sur racine carrée constituent un document de base. Ce document est une trace écrite de toutes les erreurs et les conceptions des élèves dans la propre classe de l'enseignant. Nous pouvons alors étudier l'usage qui sera fait de ces erreurs par l'enseignant. Va-t-il prendre en compte des erreurs qu'il n'avait pas prévues (et dans ce cas nous aurons accès aux réactions instantanées guidées par l'actualité de la classe) ou bien va-t-il les ignorer ? Comment sera faite la phase de remise au point des connaissances (construction de la définition avec les élèves, rappel de cours...).

* La question 4 contient une série d'exercices classiques concernant les opérations sur racine carrée. Elle rend possible l'observation de toutes les erreurs attendues sur le calcul algébrique et les décimaux. Nous allons alors observer comment sont traitées ces erreurs persistantes pendant la séance et quel statut leur accorde l'enseignant (erreur d'étourderie, erreur de compréhension...).

* Les questions 5 et 6 ont été choisies pour voir comment sont traités en classe des exercices suscitant un débat sur des réponses contradictoires, ou bien des stratégies diverses de résolution de problème.

* La question 7 devrait permettre un travail sur les domaines de définition. Nous verrons dans l'analyse qui va suivre que cette question divise les enseignants :

- pour certains une bonne réponse constituerait le, "nec plus ultra", la petite finesse qui prouve que l'on a compris.
- pour d'autres elle est jugée bien trop difficile et ne présente aucun intérêt.

* La question 8 renvoie aux erreurs classiques de calcul algébrique et de résolution d'équations (développement, factorisation, identités remarquables...). Nous serons amenée là encore à voir comment sont traitées des erreurs persistantes.

* Il existait enfin une question dans le cadre géométrique. Cet exercice qui n'a jamais été choisi mais a simplement permis dans l'entretien de voir l'intérêt ou l'absence d'intérêt de l'enseignant pour traiter la racine carrée dans le cadre géométrique.

Notons enfin que cette séance est bien trop longue pour une durée de TD (1h30) et nous le savions a priori. Mais, si nous n'avions proposé que les premières questions, l'enseignant aurait eu l'impression de faire un travail du niveau 3ème (nous avons vérifié cette hypothèse en proposant à quelques enseignants choisis au hasard des séances de longueur et de contenu différent). Par ailleurs, à partir de la feuille 4, les enseignants ont choisi les questions qu'ils allaient traiter et nous vérifierons par la suite que ce choix n'est pas indifférent.

3.3 Les erreurs dues à la difficulté du concept *racine carrée*

Le concept de nombre irrationnel constitue un obstacle épistémologique bien connu qu'on ne peut éviter dans l'enseignement, du fait de "son rôle constitutif dans la connaissance visée". On peut le retrouver dans l'histoire du concept. Lorsque les mathématiciens grecs ont découvert l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté, cette découverte a nécessité de remettre en cause une théorie ancienne à l'aide d'une nouvelle théorie capable d'englober tous les cas. Ce n'est pas pour rien qu'il a fallu tant de siècles pour arriver à une théorie des irrationnels, et il est normal que les élèves soient confrontés systématiquement à cette difficulté.

Il est vraisemblable que le franchissement de cet obstacle est sous estimé lors de l'introduction des racines carrées en troisième mais de fait les enseignants n'ont pas une grosse marge de manoeuvre. Nous partageons tout à fait le point de vue explicité dans Assude (1989) : "Il n'est pas facile de trouver sur ce sujet des situations d'enseignement qui soient vraiment efficaces du point de vue de l'apprentissage. D'ailleurs, même si l'on trouvait de telles situations, cela ne veut pas dire que les élèves construiraient d'un coup le concept de nombre réel car "un concept se forme sur une longue période... Il ne s'élabore pas isolément mais en relation avec d'autres concepts "(Douady 1980)".

Signalons de plus que, lors de l'introduction de racine carrée, les élèves abordent pour la première fois la notion de fonction réciproque et qu'il y a peut-être encore là un obstacle à franchir mais nous ne disposions d'aucun travail à ce sujet.

3.4 Les différents types d'erreurs prévisibles dans la séance proposée

Nous disposions de travaux didactiques concernant l'essentiel des erreurs prévisibles dans la séance proposée. Une partie de ces travaux avait été effectuée en classe de 4ème et 3ème. Notre préexpérimentation nous a permis de voir si les résultats se trouvaient confirmés en seconde. A l'issue de cette préexpérimentation, nous avons tenté de regrouper les erreurs **en catégories qui soient adaptées à l'étude de la prise en compte des erreurs par les enseignants.**

Ces catégories sont nécessairement simplificatrices.

Catégorie RE

Nous avons regroupé dans cette catégorie toutes les erreurs liées à la difficulté de compréhension du concept de nombre réel. Ces erreurs vont se manifester essentiellement dans les exercices 1, 2, 3.

Voici quelques exemples de ce type d'erreurs. Dans la troisième question (dire si chacune des écritures représente un réel) de nombreux élèves barrent $\sqrt{17}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{0,9}$ avec des arguments du type :

"17 est un nombre premier"

"7 est un nombre impair"

"$\sqrt{17}$ n'est pas un entier"

"la racine carrée d'un nombre décimal n'existe pas"

Le cas de $\sqrt{-7}$ est particulièrement révélateur puisque les arguments du type précédent l'emportent en nombre sur l'argument -7 est négatif.

Cependant les résultats sont à analyser avec précaution en raison de la formulation de la question : en effet de nombreux élèves confondent le mot *réel* avec le mot *entier*. Nous pensons cependant que ce type d'erreur va bien au delà d'une simple erreur de vocabulaire et nous renvoyons le lecteur aux résultats de la préexpérimentation situés en annexe du mémoire précédemment cité.

Signalons enfin que même après une remise au point et un travail fait en classe sur les réels, nous retrouverons quelques traces de ces erreurs dans l'exercice 7 où l'existence de $\sqrt{-y^2}$ par exemple est parfois liée au fait que y doit être un entier.

Catégorie DF

Il s'agit de toutes les erreurs dues à des définitions fausses que l'élève fait fonctionner à propos de racine carrée. Nous avons retenu ces erreurs lorsqu'elles ont laissé quelques traces dans les exercices qui ont suivi la première question. Ces erreurs s'appuient elles-mêmes sur d'anciennes confusions telles que la confusion entre "élever au carré et multiplier par 2". On peut penser aussi qu'elles sont dues à la difficulté provoquée par l'introduction de la fonction réciproque. Là encore il s'agirait d'un axe de recherche à approfondir.

On peut citer dans cette catégorie les erreurs suivantes :

$\sqrt{a}$ est la moitié de a (souvent liée avec la confusion ancienne entre élever au carré et multiplier par 2); exemples : $\sqrt{256} = 128$; $\sqrt{16} = 8$.

$\sqrt{a} = a^2$: confusion entre "prendre la racine carrée" et "élever au carré"; exemple: $\sqrt{25} = 5^2$. Par exemple :

$\sqrt{25} = 5^2$; $\sqrt{25} = 5 * 5$; $(\sqrt{13})^2 = \sqrt{169} = 13 * 13$ (dans ce cas l'erreur va persister dans toute la copie).

$\sqrt{9} = 3 * 3 = 3$: dans ce cas on serait plutôt conduit à s'interroger sur le statut du signe = et penser que le concept de racine carrée a été compris. Le signe = pourrait signifier qu'on indique par là une succession d'opérations : pour calculer $\sqrt{9}$ il faudrait décomposer 9 = 3 * 3 d'où la racine carrée de 9 est égale à 3.

Catégorie VA

Ce sont toutes les erreurs de domaine de validité liées au signe et vraisemblablement liées à la notion de fonction réciproque. Nous avons regroupé dans cette catégorie deux types d'erreurs :

* Les erreurs sur le domaine de définition, par exemple l'acceptation comme nombre réel de $\sqrt{-7}$, les erreurs de l'exercice 7 sur le domaine de définition de $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{-y}$...

* Les confusions entre le domaine de validité de $\sqrt{a}$ (défini uniquement si a positif) et la convention "$\sqrt{a}$ désigne un nombre positif".

On citera par exemple les erreurs suivantes :
$\sqrt{-7}$ n'existe pas car une racine n'est jamais négative
$-\sqrt{5}$ non accepté comme réel

Catégorie AL

Nous avons regroupé ici toutes les erreurs de calcul algébrique concernant les opérations sur racine carrée: calcul de $\sqrt{a+b}$; $\sqrt{a * b}$; $\sqrt{a^n}$... Ces erreurs renvoient elles-mêmes à des erreurs antérieures sur les opérations d'addition de multiplication et d'élévation à une puissance.

Catégorie DE

Ce sont toutes les erreurs sur les décimaux du type :
$\sqrt{0{,}036} = 0{,}06$ ($\sqrt{a}$ contient un chiffre de moins que a)
$\sqrt{0{,}036} = 0{,}006$ ($\sqrt{a}$ contient autant de chiffres que a)
ces erreurs renvoient à des erreurs classiques sur la multiplication des décimaux.

4 - Place accordée à l'erreur lors de la séance en classe

4.1 Méthode

Dans cette partie plusieurs questions vont nous intéresser.

* Quelles sont du point de vue mathématique les erreurs effectivement repérées en cours de séance ?

* Comment ces erreurs sont-elles traitées en classe ?

Notre étude portera sur les erreurs effectivement pointées par l'enseignant en cours de séance, c'est-à-dire :

- les erreurs signalées explicitement à un élève lors d'un passage dans les rangs,
- les erreurs qui, sans être signalées explicitement, ont fait l'objet d'une remarque qui incite l'élève à revenir sur ce qu'il a fait ou à utiliser un moyen de contrôle,
- les erreurs traitées lors d'une correction au tableau,
- les erreurs prises en compte à la suite de la remarque d'un élève.

Signalons la difficulté d'interprétation du non pointage d'une erreur par l'enseignant ; soit il ne l'a pas vue, soit il a délibérément choisi de l'ignorer, soit il a laissé l'élève la trouver seul. En général l'entretien qui a suivi nous a aidé à y voir clair à ce sujet.

4.2 Catégories d'erreurs effectivement repérées en classe

Un premier tableau nous permet de repérer les erreurs de type RE (nombre réel) et DF (définitions fausses) qui ont été commises dans la propre classe de l'enseignant.

Un certain nombre d'enseignants n'ont pas respecté la consigne : ils sont intervenus dans les questions 1 et 2 avant de ramasser les copies de leurs élèves. Nous ne sommes pas sûrs dans ce cas que les élèves aient respecté les consignes de couleur (leur propre réponse en noir et la correction en une autre couleur). Parfois même les élèves n'ont pas eu le temps de donner leur propre réponse. Dans le cas de la séance ST par exemple, l'enseignant avait insisté longuement en début de séance sur le calcul de $\sqrt{7}$ et sur la notion d'approximation par un décimal.Il avait par ailleurs redemandé aux élèves ce que signifiait nombre réel. Il est donc assez logique que les réponses à la question soient toutes correctes.

Donc dans ces deux cas (SY et ST) le nombre d'erreurs RE et DF est peut-être sous estimé. Les deux résultats correspondants figurent en italique.

Dans les séances SX et SZ où la consigne a été respectée, le nombre d'erreurs de type RE est très élevé, aussi bien dans le cas où la notion de racine carrée et de nombre réel a été revue en début d'année que dans le cas où rien n'a été traité sur le sujet.

	SX 15 élèves	SY 15 élèves	SZ 15 élèves	ST 15 élèves
respect consigne feuilles 1 et 2	oui	non	oui	non
racine carrée déjà traitée dans l'année	non	non	oui	oui
nombre d'erreurs RE su les copies	12	*5*	10	*0*
nombre d'erreurs DF sur les copies	3	*0*	2	*5*

SX, SY, SZ, ST désignent les déroulements de la séance dans les 4 classes choisies.

Un deuxième tableau montre que les catégories d'erreurs AL, DE, VA sont systématiquement prises en compte en cours de séance alors que les catégories RE et DF le sont beaucoup moins. Ces catégories d'erreurs sont situées à des niveaux différents et il serait intéressant d'approfondir un travail sur les niveaux de traitement des erreurs par les enseignants. Les erreurs de type AL, DE, VA sont attendues par les enseignants et leur traitement peut plus facilement se faire de manière peu "coûteuse" avec renvoi à des règles précédemment étudiées. Les erreurs de type RE et DF ne sont pas attendues et nécessitent une intervention plus en profondeur sur la compréhension du concept.

erreur prise en compte	SX	SY	SZ	ST
catégorie RE	oui à partir de l'ex 5 seulement	oui dès le début	non	non
catégorie DF	oui confusion $\sqrt{a}$ et $a/2$	non	non	oui confusion $\sqrt{a}$ et $a/2$ $\sqrt{a}$ et a^2
catégorie AL	oui	oui	oui	oui
catégorie DE	oui	oui	oui	oui
catégorie VA	oui	oui	oui	oui

Voici un exemple dans la séance SY où l'enseignant minimise une erreur de type RE. Cet enseignant déclare dans l'entretien que bien souvent il évacue ce type d'erreur (contraintes dues au temps et aux classes à qui il enseigne) voir page 49.

Un élève A a barré sur sa copie les nombres suivants avec les arguments qui figurent au-dessous.

$\cancel{\sqrt{17}}$ $\cancel{\sqrt{-7}}$ $\cancel{\sqrt{0,9}}$ $\cancel{-\sqrt{5}}$

nombre premier 0,9 nombre à virgule nombre premier

Tandis que l'élève B a donné comme définition de racine carrée :
"on appelle racine carrée ou radical de a qui est un nombre entier le nombre qui multiplié par lui-même donne a".

L'enseignant fait une correction individuelle pour chaque élève ; nous donnons ci-dessous un extrait du dialogue.

> **P à A** : *Je pense que tu as fait une erreur dans la signification de nombre réel. C'est quoi pour toi un nombre réel ? par exemple les nombres dont tu parles ici (nombre premier, nombre décimal) par rapport à nombre réel ?*
> **A** : *par exemple $\sqrt{36}$ est un nombre entier.*
> **P** : *je crois que tu as confondu les adjectifs, peut-être bien que tu as confondu entier et réel.*
> **P à B** : *ça signifie que toi qui t'es posé une question sur nombre entier, tu t'es posé une question qui n'était pas, à partir du moment où tu as réussi ton calcul le résultat est un nombre réel.*

L'enseignant a opté ici pour une confusion de vocabulaire entre entier et réel.

4.3 Les différentes stratégies de traitement de l'erreur

Lorsque l'on propose à un enseignant de mathématique de 2nde une séance de travaux dirigés, il y a un implicite "recherche d'exercices avec correction". Nous allons voir que ces implicites recouvrent en fait des pratiques en apparence semblables mais assez nuancées sur la prise en compte de l'erreur en particulier.

Pour analyser les différentes stratégies de prise en compte de l'erreur nous avons retenu les paramètres suivants :

* Le temps effectivement laissé à la recherche individuelle de l'élève, et le moment de la correction : exercices corrigés au fur et à mesure ou temps de recherche avec correction différée.

* La nature de la correction :

- individuelle avec passage de l'enseignant dans les rangs (à la demande de l'élève ou à l'initiative de l'enseignant qui décide lui-même de pointer une erreur)
- collective (au tableau ou oralement).

* La personne ou l'objet à qui est confié la responsabilité de trancher entre le vrai et le faux

- l'enseignant, un ou plusieurs élèves sollicités ou un moyen d'auto-contrôle.

* Le moment de clôture du débat lors d'un échange enseignant-élèves (dès que la bonne réponse est trouvée ou au contraire après analyse d'un certain nombre d'erreurs faites par les élèves).

* L'apport de l'élément de référence sur le concept étudié :

- rappel de la définition par l'enseignant ou un élève, donc recours à un savoir antérieur considéré comme acquis
- reconstruction des connaissances en jeu.

* la nature des interventions de l'enseignant (neutralité par rapport aux réponses élèves ou au contraire avis donné sur les réponses élèves).

4.4 Etudes de cas

Nous allons donner dans cette partie deux exemples de stratégie de prise en compte de l'erreur. Dans ce paragraphe, nous envisagerons uniquement l'aspect descriptif des déroulements de séances. Ces descriptions de séance seront mises en relation avec les relectures de séances à la fin du paragraphe 5 sur les représentations.

Les séances SZ et SX ont été choisies comme exemples de stratégies très différentes de correction collective par rapport aux paramètres précédemment définis. Dans SZ, l'enseignant fait une correction immédiate après quelques minutes de recherche laissées aux élèves. Dans SX, l'enseignant a laissé chercher les élèves 3/4 heure sans aucune intervention sauf rappel de consigne ou renvoi à un moyen de contrôle proposé en cours de séance (la description de ce moyen de contrôle sera donnée au moment de l'étude de SX).

Première étude de cas : observation de SZ

La première partie de cet échange concerne la recherche de la définition de racine carrée. Elle se situe au tout début de la séance après quelques minutes de recherche individuelle laissées au élèves. P désigne le prof., e, g, l... désignent des élèves.

P : *il serait bon de rappeler ce que signifie le symbole* $\sqrt{a}$ *parce que, vu les réponses qui figurent dans certaines feuilles on est un peu déçu. Quelle est la première remarque que l'on peut faire ? Elizabeth ?*

e : a *positif ou nul.*

P : *Bon* a *est positif dans une autre galaxie il faut préciser que....*
Que signifie $\sqrt{a}$ *par définition, Guillaume ?*

g : *c'est un nombre tel que si on le multiplie par lui même on obtient* a.

P : *par définition il existe un nombre réel tel que le produit* $\sqrt{a}$ * $\sqrt{a}$ *soit égal à* a *avec bien sûr la condition* a *positif.*
Que signifie $\sqrt{36}$ *Luc*

l : *eh ben c'est* 6 *car* $\sqrt{36}$ * $\sqrt{36}$ = 36

P : *oui par définition,puisqu'on l'admet* $\sqrt{a}$ * $\sqrt{a}$ = a, *mais pourquoi c'est égal à* 6 ?
écrit au tableau $\sqrt{36} = 6$
je pense que tout le monde a répondu, ensuite $\sqrt{(-3)^2}$, *qu'est qu'il en pense Olivier ?*

O : *J'ai mis* 3

P : *pourquoi ?*

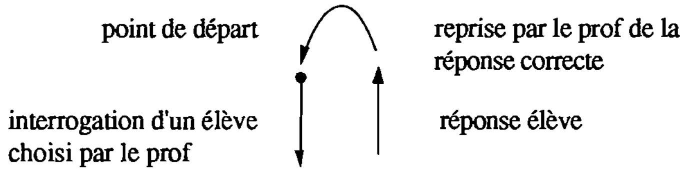
O : $(-3)^2 = 9$

P : *donc c'est un nombre.....*

O : *entier*

P : *positif surtout, ce* $(-3)^2$ *désigne* 9 *donc là ça va bien*

On peut remarquer que tous les échanges se font suivant le même schéma :



La suite de la séance est un exemple de prise en compte des erreurs des élèves:

P : *alors après il y a quelques problèmes sur* $\sqrt{0{,}036}$, *la réponse qu'est ce que vous avez trouvé ? attendez.....*

H : 0,06

P : *attendez vous avez mis* 0,06 *; pour vous ça signifie quoi ? ça signifie si votre réponse est exacte que :* (il écrit au tableau) : 0,06 * 0,06 = 0,036 ?

Vous savez bien multiplier des décimaux ; si on multiplie 0,06 *par* 0,06 *on obtient combien de chiffres après la virgule ?*

el : 4

P : *donc votre réponse est-elle bonne ?*

h : *eh ben non*

g : 0,006

P : *Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont mis* 0,006... *ils en ont rajouté parce que ça fait bien , alors, j'attends vos lumières....*

g : *C'est bon* 0,006 ; *si on multiplie* 0,006 *par* 0,006 *on obtient* 0,036.

P : *vous pensez savoir multiplier des décimaux ?*

Comment on fait une multiplication ? encore une mauvaise connaissance des décimaux....

g : *je mets en puissance* $6*10^{-3}$

P : *pourquoi pas comme ça on voit la règle de multiplication des décimaux ;* $6*10^{-3} * 6*10^{-3} =$.....

g : 10^{-3} ;10^{-2} ; 10^{-6} *attendez, ah on additionne*

P : *alors vous pensez que c'est* 0,036 *vous avez combien de chiffres ? vous en avez pas* 6 *mais* 3, *donc votre réponse est fausse*

i : *c'est* 0,006*6

P : *ah non puisque par définition, on a dit* $\sqrt{a}$ *c'est le nombre qui multiplié par lui même donne* a

Bon pour vérifier votre solution c'est comme ceci qu'on procède : Guillaume nous a donné une idée intéressante ... la décomposition d'un nombre avec une puissance... l'écriture scientifique

g : *on met* $36*10^{-3}$

P : *bon on peut s'en sortir comme ça en écrivant* $\sqrt{36 * 10^{-3}}$ *et alors là il va y avoir un problème, vous sentez pas......*

n : *on sort le* 6

P : *Quelle propriété utilisez vous pour pouvoir le sortir ?*

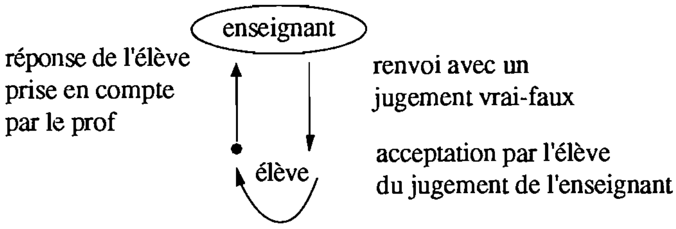
g : *on met* 6 *devant*

P : *alors quelle est cette propriété ? quelles sont les propriétés sur les radicaux que vous avez rencontrées il n'y a pas longtemps ? Il n'en reste pas grand chose.*

g : $\sqrt{10^{-3}} = \sqrt{0{,}001}$ *et après on multiplie par* 6

P : *oh, vous vous engagez dans une voie bizarre* (le reste étant consacré à la recherche d'une écriture de $\sqrt{0{,}036}$ qui prouve qu'on ne peut pas l'écrire sans radical).

On peut résumer ainsi la nature des échanges :



Mais, un peu plus loin :

P : $\sqrt{4+36}$ *Marie ?*

m : *ça fait* $\sqrt{40}$

P : *et vous laissez cette écriture comme ça, Elizabeth ?*

e : *eh ben oui on laisse comme ça.*

P : *vous laissez comme ça*

c : *ça fait* 5 * 8

e : $\sqrt{4} * 10$

P : *ah, plus intéressant car on fait apparaître un carré*

i : *j'ai mis* $\sqrt{4} + \sqrt{36}$

e : *t'as pas le droit*

P : *ah vous parlez de quelque chose de dangereux. Vous êtes tenté d'écrire* $\sqrt{4} + \sqrt{36}$, *vous êtes tous d'accord ?*

e : *on peut pas ; non....*

P : *ceux qui sont passés par ce stade là qu'est-ce qu'ils ont écrit ? 2 + 6 = 8 donc ils ont pu affirmer que* $\sqrt{4} + \sqrt{36}$ *s'écrivait sans radical, donc ceux qui ont procédé de cette manière là ont procédé d'une manière fausse en comprenant qu'ils ont utilisé une propriété qui n'était pas. Donnez moi le contre exemple cité qui montre que quoi ? alors vous vous en souvenez du contre exemple que j'ai cité ?*

o : 8 * 8 *ça fait pas* 40

P : *première remarque, oui c'est bien* 8 * 8 = 64 *on n'obtient pas* 40. *Mais il y avait un contre exemple encore plus frappant qui montre que nous n'avons jamais enfin rarement* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

on l'a cité .....il en reste des choses......

a : $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ *et* $\sqrt{2} * \sqrt{2}$

P : *ah non je veux démontrer que cette propriété* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *est fausse, il y a un contre exemple qui est frappant puisque les calculs se terminent bien... avec des nombres bien connus qu'on emploie dans les triangles*

Au bout d'un moment l'enseignant citera lui-même le contre exemple tant attendu : $\sqrt{16+9=5}$; $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$.

En conclusion, on peut caractériser cette séance ainsi : Lorsqu'il y a erreur l'élève est renvoyé à un élément de référence, ici la définition ou les règles rappelées par l'enseignant ou un élève-relais. Ces règles sont explicitement celles que l'enseignant a données dans son cours :*"le contre exemple que j'ai cité" "les propriétés que vous avez rencontrées il n'y a pas longtemps"*. C'est l'enseignant qui décide du vrai ou du faux. Prendre en compte l'erreur signifie un renvoi à l'élève contenant d'emblée une validation du vrai ou du faux : *"donc votre réponse est-elle bonne" "vous*

vous engagez dans une voie bizarre" "vous parlez de quelque chose de dangereux". Le vocabulaire employé au sujet de l'erreur est connoté négativement.

Dans cet exemple, l'enseignant est au centre du processus d'apprentissage : il montre, il explique ce qu'il faut faire. La responsabilité de l'erreur est renvoyée à l'élève dès l'instant qu'il a été averti des erreurs à ne pas commettre.

Deuxième étude de cas

Voici un extrait d'une autre séance (SX) où la correction a été différée, les élèves ayant eu 3/4 heure de recherche; l'enseignant avait au préalable donné à ses élèves le moyen d'auto contrôle de leur réponse décrit dans le tableau ci-dessous (ceci concerne la question 4) : il s'agit d'un tableau où l'élève calcule avec sa machine ce qui lui est demandé initialement, en spécifiant la séquence de touches utilisées, compare avec le résultat qu'il a trouvé et recherche l'erreur si les deux réponses-machines sont différentes.

réponse de l'élève	séquence de touche	résultat donné par la machine		si résultats différents analyser l'erreur
		ce qui est demandé	ce que vous avez trouvé	
$\sqrt{27} = 3$	27 $\sqrt{\ }$	5,196	3	5,169 ≠ 3 analyser l'erreur

premier exemple :

P : *On va reprendre la fiche* 3 *exercice par exercice, qu'est ce que vous avez constaté ?..* $\sqrt{(-3)^2}$ *est ce qu'il y en a qui ont eu une vérification fausse ?*

I : *ouais moi au début j'avais mis* 3^2

P : *et alors t'as trouvé que ça marchait pas,ça donnait pas un résultat juste à la machine*

I : *ça donnait* 3 *et mon truc à moi ça fait* 9

P *voilà alors tu es revenue là dessus et t'as trouvé l'erreur*

I : *ben non*

P : *Qui pourrait lui expliquer l'erreur ?*

H : *ben, elle a pas fait la racine carrée*

P : *ça c'est la réponse qu'elle s'est donnée : le* 3^2 *il remplace quoi là dedans ?*

K : *c'est* (-3) * (-3)

P : *oui ça, (montre* $\sqrt{(-3)^2}$) *tu peux l'écrire* $\sqrt{(-3) * (-3)}$ *d'accord?*

I : *ben....*

P : *et ça peut encore s'écrire comment*

M : 3 * 3

P : *ça peut s'écrire* 3 * 3 *donc si vous voulez écrire la même chose il faut l'écrire* $\sqrt{(-3) * (-3)} = \sqrt{3 * 3}$ *toi t'avais tout simplement supprimé ça, hein, ce n'est pas une erreur..... j'espère que c'est une erreur d'inattention, tu avais tout simplement oublié la racine là dedans.*

deuxième exemple

P : $\sqrt{4 + 36}$, *est-ce qu'il y a eu des choses bizarres avec votre machine ?*

C : *moi j'ai fait* $\sqrt{40}$ *et je me suis arrêté là*

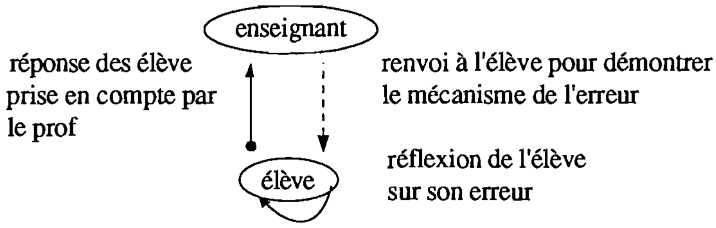
P : *toi tu as fait* $\sqrt{40}$ *est -ce qu'il y en a qui sont d'un autre avis ?*

M : *oui ,moi j'ai sorti les carrés, j'ai fait* 2 + 6 = 8

P : *d'accord,* 2 + 6 = 8 *vous avez vérifié avec votre machine ?*
C : *la machine, elle dit* 6,32
P : 6,32 *bon donc ça a pas l'air d'être* 8 *la bonne réponse d'ailleurs (s'adresse à M qui a bien les deux résultats différents sur sa copie) tu l'avais bien constaté et c'était ton gros souci. Est-ce que vous pourriez lui expliquer quelle erreur il a faite ?*
el : *on n'a pas le droit parce qu'il y a un +*
P : *voilà c'est un + qu'il y a entre les deux nombres. Quand est-ce qu'on a le droit ?*
el : *Quand c'est un **
P : *Quand c'est un * alors comment est-ce qu'on pourrait l'écrire pour que ça se généralise ? Est-ce qu'on va utiliser 4 et 36 pour écrire quelque chose de général ?*
el : *non*
P : *on va prendre des nombres* a *et* b *alors (à M) dicte moi la relation ;* il écrit sous la dictée: $\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$ *; a et b on ne précise pas trop ce que c'est,on verra par la suite...et la relation que tu as utilisée toi on va l'écrire et puis on la rayera* ; il écrit au tableau $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *;vous l'effacez de votre mémoire celle-là* ; *Bon et* $\sqrt{8} + \sqrt{8}$, *si tu avais été logique avec toi même qu'est-ce que tu aurais dû écrire ?* (s'adresse à M)
N : $\sqrt{16}$
M : *eh ben non, j'ai écrit* 4
P : *tu as écrit* 4, *et ta machine est d'accord ?*
M : non — tableau :
P : Est-ce qu'il y a d'autres réponses ? il les écrit toutes au tableau ; — 4
H : $4\sqrt{2}$ — $4\sqrt{2}$
G : $2\sqrt{8}$ — $2\sqrt{8}$
A : $2\sqrt{4}$ — $2\sqrt{4}$
P *D'autres réponses ? non alors est-ce qu'il y en a qui ont satisfait la machine ?*
el : *les deux premières (...)*
e : *non, non*
P : *attendez dites-moi*
el : *les deux dernières* (...)
el : *les deux du milieu (c'est la réponse qui semble majoritaire)*
P : *les deux du milieu* (P les encadre en riant) ; *On va essayer de voir pourquoi les autres ne la satisfont pas. Quand on écrit* $\sqrt{8} + \sqrt{8} = 4$ *; qui a écrit ça ?*
C : *moi*
P : qu'est-ce que tu as pensé, qu'est-ce qui s'est déroulé dans ta tête ?
C : j'ai supprimé les racines au début, j'ai fait 8+8 = 16
P : *attends ne vas pas si vite je ne suis pas moi, tu as supprimé les racines ?*
C : *comme si il y avait pas de racine j'ai fait* 8 + 8
P : *ah donc tu as appliqué ça (montre la formule rayée au tableau)*
C : *oui mais je veux dire.....*
P : *tu as fait le même type d'erreurs que lui : tu as inventé une relation qui ne s'applique pas, méfiez-vous, vous voyez qu'elle est dangereuse celle-là, bon,* $2\sqrt{4}$ *c'est fabriqué comment ?*
A : *au début j'ai fait* $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$
P : *tu as fait* $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$. *Est-ce que c'est juste ça ?*
*G : il manque un terme 8 c'est 4 * 2 donc* $\sqrt{8} = \sqrt{4 * 2} = 2\sqrt{2}$
P : donc ça vous convient assez bien ça
el : oui
P : *bon et après ?*
A : *j'ai additionné, j'ai conservé le* 2

P : *ça s'appelle comment quand on conserve le* 2
el : *une factorisation*
P : *donc tu as factorisé* 2; écrit sous la dictée de l'élève : $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{2})$
C : *ça fait* $2\sqrt{4}$
el : *non ça marche pas*
P : *qu'est-ce que vous en pensez ? toujours, toujours cette erreur, il faut bien détailler vos calculs pour savoir si ce que vous faites est autorisé.*
(arrêt de la séance).

On peut résumer ainsi les échanges :



Les deux exemples cités montrent une stratégie de correction où l'enseignant cherche à démonter le mécanisme de l'erreur. Le premier exemple est intéressant car le mécanisme de l'erreur n'est peut-être pas complètement démonté. Il y a en effet une minimisation *(car qualifiée d'inattention)* d'une erreur qui pourrait être de type DF. Mais il ne suffit pas que l'enseignant ait la volonté pédagogique de démonter l'erreur ; il faut qu'il puisse disposer d'outils (didactiques) à cet effet. Le deuxième exemple montre comment l'enseignant continue à traiter la question après que la bonne réponse ait été trouvée, pour débusquer d'autres erreurs. On peut remarquer que l'élément de référence (la règle utilisée) est amené en terme de : *"on n'a pas le droit" "on a le droit" "c'est autorisé"*.

5 - Un essai de détermination des représentations

5.1 Les représentations en question

A la suite des entretiens, nous avons été frappés par le fait que chaque enseignant avait une relecture propre de la séance, ne correspondant pas forcément à notre observation et donnant des indices sur un certain nombre de représentations. De plus nous avons constaté que cette relecture était faite en fonction d'un certain nombre d'axes stables (tout est ramené et interprété en fonction de l'affirmation de départ) et en même temps qu'il y avait une variabilité de certaines représentations mises en évidence. L'entretien permettait alors aux enseignants de revenir sur certains points, de réfléchir autrement sur la séance vécue alors que sur d'autres points il y avait plutôt déni, adaptation ou transformation de ce qui avait été observé pendant la séance pour le faire entrer dans le cadre prévu a priori.

Nous pensons pouvoir mettre en évidence le résultat suivant :
La relecture de la séance par chaque enseignant (et en particulier les erreurs qu'il a retenues) nous donne des indices en ce qui concerne ses représentations :
*A - de ce qui est important et difficile dans la **notion** en jeu (ici racine carrée) ;*
*B - de l'**appropriation du savoir** par ses élèves ;*

*C - de ce qu'il convient d'enseigner en maths à des élèves de l'**enseignement technique**.*

(les représentations au sujet de A, B et C seront désignées par la suite respectivement par RA, RB, RC).

Nous avons pu constater (et nous le montrerons sur des exemples) que les représentations sur la notion en jeu (représentations RA) pouvaient être assez facilement déstabilisées en cours d'entretien, amenant un autre regard sur les difficultés des élèves, alors que les autres représentations (RB et RC) semblaient plus stables.

Les représentations RA, RB et RC ne sont pas indépendantes et nous chercherons à montrer leurs éléments de liaison. Elles ne sont peut-être que les manifestations différentes d'une même représentation plus globale qui serait située en amont, mais nous n'avons pas pu approfondir ce point de recherche.

Parmi les représentations auxquelles l'entretien nous donnait accès, nous avons volontairement supprimé la dimension "contraintes professionnelles" pensant que les réponses de type "on n'a pas le temps compte tenu du programme" font bien souvent écran et masquent les autres représentations.

Par ailleurs certains des enseignants observés sont impliqués à un titre ou à un autre dans des actions d'innovation pédagogique. Il était donc intéressant de leur demander ce qu'ils pensaient au delà de contraintes par rapport auxquelles ils se situent déjà plus ou moins en situation d'acteurs.

5.2 Etude d'exemples

Pour mettre en évidence les représentations RA, nous avons pris en compte les réponses spontanées à la question 1 de l'entretien sur lesquelles l'enseignant revenait plusieurs fois. Pour les représentations RB nous avons réuni des éléments de réponses issus des questions 3, 4, 5, tandis que pour les représentations RC, nous avons pris en compte les éléments cités spontanément et faisant référence à l'enseignement technique ainsi que la réponse à la question 8.

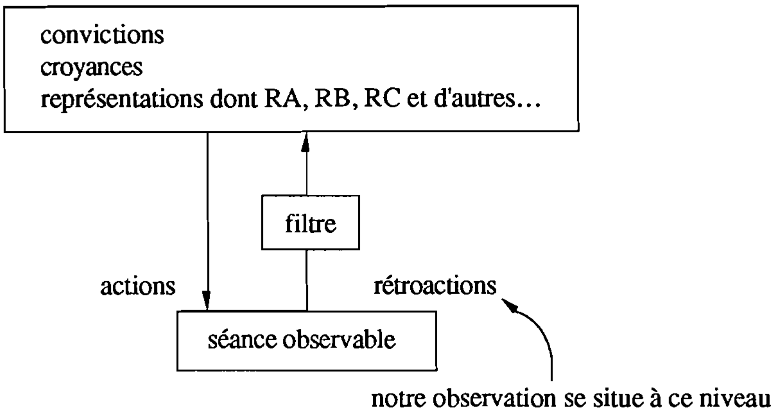
Nous avons essayé de mettre en évidence l'attitude de l'enseignant :

* oubli, déformation, déni, ou amplification de certaines erreurs permettant de conforter une représentation ancrée de manière très profonde ; on peut faire l'hypothèse que les informations passent au travers d'un filtre, venant plus ou moins conforter les représentations établies.

* ou bien : acceptation d'erreurs non repérées a priori, doute, retour sur des affirmations antérieures indiquant l'idée d'une modification possible, et d'un cadre de référence peu rigide. Dans ce cas on pourra remarquer dans le discours des indicateurs tels que : *il me semble que, je ne suis pas sûr, il y a une chose qui ne m'avait pas du tout effleuré...*

Le schéma suivant reprécise le niveau où se situe notre observation.

Cadre de référence[1]



Le faible nombre de cas étudiés et le caractère finalement assez personnel de chaque relecture ne nous a pas incité à une recherche de tendances générales mais plutôt à des **études "cliniques"** successives centrées sur la cohérence interne de chaque discours et sur l'articulation des différentes représentations au sein d'un même discours.

Nous avons donné volontairement des citations assez longues pour éviter au maximum de dénaturer le discours et pour tenir compte des hésitations et des aller et retour.

5.3 Etude de la relecture de la séance Z

Pour cette séance, nous ne disposons pas des réponses écrites de l'enseignant concernant les erreurs prévisibles des élèves (l'enseignant ayant omis de les remettre). Les seules erreurs prévues qui nous avaient été signalées oralement étaient les problèmes de domaine de définition de la question 7 et l'erreur sur $\sqrt{a+b}$. L'enseignant qui disposait de peu de temps en fin de séance avait choisi de sauter les questions 5 et 6 et de passer directement à la question 7 en précisant à ses élèves : *"c'est un exercice plus intéressant et plus difficile"*.

Nous allons voir que ce choix est en relation avec les représentations de l'enseignant sur la notion.

Représentation RA : La difficulté de la notion de racine carrée est due à la signification de la lettre (statut, manipulation....).

Voici en effet ce que l'enseignant déclare en réponse à la question 1 de l'entretien : *"le problème est surtout lié à la manipulation de la lettre. La lettre a ils ne savent pas trop ce que c'est, ils ne se posent pas le statut de la lettre, les erreurs que j'ai vues c'est surtout ça, on le retrouve dans l'ensemble de définition pour* $\sqrt{-y}$*"*.

Lorsque l'on met l'accent sur les erreurs de la question 3 de type RE, l'enseignant hésite à les prendre en compte, puis les minimise[2]. Il ira jusqu'à nier

---

[1] Ce mot est employé dans le sens où il est défini par J.F. Bonneville (IMAT, 1989)

[2] Nous n'émettons pas ici de jugement de valeur sur le fondement de cette opinion vu toutes les réserves que nous avons faites sur la formulation de cette question, nous regardons simplement l'attitude de l'enseignant lorsqu'il a à intégrer des informations nouvelles dans son cadre de référence.

l'existence d'un certain nombre d'erreurs. Chaque fois que l'enseignant prendra en compte quelque chose de nouveau ce sera pour conclure finalement que le problème principal est celui de la lettre.

Voici un extrait du dialogue entre l'expérimentateur et l'enseignant, qui illustre notre analyse des représentations RA et RB.

Question : Nous avons vu que dans cette classe 10 élèves sur 12 ont fait une erreur de type RE c'est-à-dire ont barré $\sqrt{17}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{0{,}9}$... pour des raisons du type : 7 est premier ; 17 est impair ; la racine carrée d'un nombre décimal ne peut pas se calculer... qu'est-ce que vous pensez de tous ceux qui ont barré $\sqrt{17}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{19/6}$, $\sqrt{0{,}9}$...

réponse : *ils l'ont barré dans le sens qu'ils l'ont fait peut-être, ils ont des problèmes de compréhension de la question non, là ils l'ont barré en disant qu'on ne pouvait pas simplifier, faudrait encore savoir ce que ça veut dire pour eux, barrer, si le nombre réel voulait dire est un nombre entier ou être simplifiable.*

question : donc vous pensez que ça voulait dire...

réponse : *oui tout à fait car ici je vois qu'elle écrit on ne peut pas simplifier on ne peut pas donner quelque chose de plus simple comme* $\sqrt{36}$,*pour eux* $\sqrt{17}$, *ça reste quand même une écriture imaginaire qui n'est pas palpable par contre elle détaille ce qui est barré* $\sqrt{-7}$ *n'existe pas car il ne peut pas être négatif.*

question : mais il y en a d'autres qui barrent $\sqrt{-7}$ parce que 7 est un nombre premier.

réponse : *non, ça j'ai jamais vu, là je vois on n'a pas le droit de mettre - dans une racine carrée, ce qui est dangereux... à condition que ça ne porte pas sur une lettre.*

Bon qu'est ce qu'il y avait d'autres comme erreur ?

Les propriétés avaient l'air d'être connues sauf pour certains $\sqrt{a+b}$... *Il y en a une là qui l'a faite, ça c'est l'erreur classique et pourtant ils avaient été avertis que c'était interdit,* $\sqrt{16+9}$, *j'avais insisté, le message avait l'air d'être passé... je pense aussi que c'est une question d'écoute, d'attention... ah l'erreur que je n'avais pas signalée mais qui a été commise, - ils l'ont mis sous le radical et pourtant quand on donne le passage* $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ *on souligne bien que* a *et* b *doivent être positifs mais comme on ne fait pas d'exercice dessus ils ne tiennent pas compte de ces conditions ce qui fait que certains peuvent tout de suite écrire - sans que ça les gêne puis de la nouvelle écriture, ils vont en déduire que c'est impossible, c'est ce qu'il a mis là,... voilà sur les propriétés sur la définition c'est lié à la lettre plus qu'autre chose.*

Représentation RB : C'est le professeur qui montre comment on doit s'y prendre en maths. Pour enseigner une notion, on introduit la définition suivie d'exemples d'applications. Les élèves sont avertis par l'enseignant des erreurs à ne pas commettre. Les erreurs sont dues à l'oubli, à un manque d'attention, d'écoute, à une méconnaissance des règles à appliquer.

On peut remarquer que l'enseignant ne cherche jamais une explication de l'erreur mais se contente de dire que ces élèves n'auraient pas dû la faire puisqu'ils avaient été prévenus. Dans le discours, les élèves sont envisagés comme des récepteurs passifs, "je leur montre", "j'avais insisté" indiquant le rôle prépondérant de l'enseignant qui transmet des connaissances, par opposition à la forme passive "ils étaient au courant..". L'enseignant est donc ici au centre du processus d'apprentissage.

La citation qui précède ainsi que les suivantes mettent en évidence à la fois la représentation RB et la prédominance de RA qui continue à occulter tout le reste. On notera au passage la minimisation des erreurs sur les décimaux et on verra par la suite que ce point de vue divise les enseignants.

> **question** : pendant votre séance il y avait beaucoup d'erreurs sur les décimaux. Qu'en pensez-vous ?
> **réponse** : *Ils ne connaissent pas la règle de multiplication des décimaux, comment on multiplie des décimaux et comment on met la virgule.*
> **question** : Et comment expliquez-vous cela ?
> **réponse** : *Ils les apprennent, ils savaient au CM2, mais après comme on s'en sert une fois pour un exercice de temps en temps, ils ont oublié la règle. C'est une question d'oubli. Ce n'est pas une erreur grave, c'est plutôt une étourderie, je pense que le plus grave c'est sur la signification de racine carrée, la confusion que certains ont sur la lettre* a, *en fait le problème il est là puisqu'on retrouve ces confusions dans la dernière question. La septième question et la définition de racine de* a *sont liées.*
> *Et qu'est-ce qu'ils ont fait pour* $x^2 - 5 = 0$ et $x^2 + 7 = 0$?
> *Il y en a qui ont répondu correctement là, et d'autres qui ont mis* $\sqrt{-7}$ *et* $-\sqrt{7}$ *et pourtant j'en avais parlé quand on a des dénominateurs quand on fait des domaines de définition des fonctions, donc on avait bien insisté en disant que c'était impossible, donc ils étaient au courant.*

A noter enfin la réponse qui est faite à la question 4 de l'entretien qui est à la fois cohérente par rapport aux représentations RA et RB (la difficulté majeure est au niveau de la lettre a, c'est l'enseignant qui montre, qui souligne...) et en "rupture" puisque l'enseignant est le seul parmi les enseignants interrogés à parler de la "nécessité d'introduire un nouveau nombre" et "d'approcher ce nombre par des décimaux".

> **question** : Si vous aviez l'intention d'amener vos élèves à une bonne maîtrise de la notion de racine carrée... comment vous y prendriez-vous ?
> **réponse** : *Je commencerais par mon exemple, nécessité d'introduire un nouveau nombre mais quand je l'ai fait pour* $\sqrt{2}$ *je n'ai pas démontré que ce nombre n'est pas entier ou n'est pas rationnel, c'est pas évident,* $\sqrt{2}$ *ils comprennent que c'est la mesure du côté du carré d'aire* 2, *maintenant le passage à la définition, ben il faut l'appliquer...*
> **question** : Qu'est-ce que vous envisageriez d'autre ?
> **réponse** : *eh bien de nombreux exercices comme vous avez proposé qui mettent dans des situations différentes et puis après prendre* $\sqrt{17}$ *et voir sa signification, essayer de l'interprèter de l'approcher par des décimaux montrer que ce nombre peut toujours être approché par des décimaux et aussi montrer que ce nombre il n'a pas d'autre écriture que* $\sqrt{17}$, *le problème il est là.*
> **question** : Lorsque vous aviez revu racine carrée en début d'année comment aviez-vous fait ?
> **réponse** : *j'avais refait rapidement, j'avais donné la définition* $\sqrt{a}$ *est le réel positif dont le carré est* a *avec* a *positif, j'avais un peu revu la nécessité d'introduire la racine carrée, j'avais construit un carré d'aire* 2 *à partir de deux carrés d'aire* 1, *je l'avais dit oralement, c'est pour* 2, *ils comprennent fort bien, après on ne le fait pas pour* 3, *et on passe directement à la lettre* a *alors pour eux après ça reste du domaine abstrait, il est là le problème.*

Représentation RC : dans les classes de l'enseignement technique, on va moins vite, les étapes sont mieux préparées et les élèves veulent comprendre.

Par opposition, dans les autres classes il semble qu'il suffise d'aller "droit au but" en présentant définition + exemples. Ceci met en évidence la très forte dépendance des représentations RB et RC.

> (En réponse à la question 8) :*"Je vais moins vite, je détaille plus, je fais plus d'exemples, c'est moins abstrait".*
> **question** : Pouvez vous donner un exemple ?
> **réponse :** *Par exemple quand on étudie l'équation d'une droite, on essaie de comprendre d'abord la définition, on va doucement, on essaie de leur montrer que si on prend des points dont les coordonnées vérifient l'équation, ils vont être alignés puis après réciproquement,on va essayer de déterminer une relation entre les coordonnées pour qu'un point soit sur une droite, bon dans tout ça, on va utiliser le déterminant il va y avoir une préparation, la différence c'est qu'autrement on irait directement au but et on appliquerait. Donc dans l'enseignement technique on va moins vite et de toute façon ce sont des élèves motivés qui veulent comprendre, ils sont intéressants, ils aiment chercher,ils n'ont pas toujours les bases...*

5.4 Relecture de la séance Y

L'enseignant a repéré durant sa séance un grand nombre d'erreurs qui n'avaient pas été prévues dans le document écrit. Il y a donc eu une grande réceptivité à l'émergence des erreurs des élèves.

Plusieurs éléments sont retenus concernant la difficulté dans la notion mathématique étudiée. Voici les éléments principaux auxquels l'enseignant se réfèrera plusieurs fois par la suite. Ils indiquent une **difficulté générale de compréhension en profondeur, de type philosophique, des différentes sortes de nombres.** Plus spécifiquement au sujet de la séance proposée :

RA1 : La difficulté est due au problème de l'unicité d'une écriture, $\sqrt{a}$ doit désigner un seul nombre et non pas deux.

RA2 : La difficulté est aussi due à la confusion possible entre un nombre et son approximation décimale. Le calcul sur les décimaux n'est pas maîtrisé

Voici un extrait de la réponse à la question 1 qui illustrent ces représentations :

> *"les décimaux... dans certaines classes, c'est une catastrophe les trucs de virgule, or en fait dans les classes d'adaptation avec des élèves qui viennent de BEP les fractions, les réels on évite..les décimaux c'est leur outil et malgré ça,c'est pas acquis...*
> *Moi je dirais que c'est quelque chose qui a de l'importance en ce moment à cause des calculatrices justement. Dès qu'ils sont un peu faibles ils remplacent les nombres par une approximation qu'ils obtiennent à la calculatrice...*
> *Moi la faute qui m'ennuie le plus c'est le remplacement de $\sqrt{a}$ par exemple par une valeur approchée qui a un chiffre, puis la ligne d'après avec 3 puis avec 2 parce qu'ils disent que c'est tout pareil".*

"en fait je pense qu'il y a une question de compréhension en profondeur, je dirais philosophique, de certaines notions mathématiques comme racine carrée, fraction...
Par exemple pourquoi en math une écriture ne représente qu'une chose, il y a les enfants et les adultes pour qui la notion de précision de langage va de soi et qui sont satisfaits du fait que $\sqrt{16}$ *ça soit seulement* 4 *et puis ceux pour qui la notion de précision est synonyme de carcan et qui sont a priori pas gênés que le symbole* $\sqrt{16}$ *puisse représenter au choix* 4 *ou* -4*... moi ce genre de prise de conscience de la nécessité de la précision dans certains domaines, la raison de la construction axiomatique, de certaine construction et pas d'une autre, je mets ça au niveau philosophique.*
On leur fait utiliser ces outils bien jeunes, tous gamins et du point de vue nature ils ne repèrent pas la différence... Il y a l'outil de la vie de tous les jours pour lequel 1/2 *et* 1/3 *il n'y a pas vraiment de raison de ne pas remplacer l'un par* 0,5 *et l'autre par* 0,333 *avec autant de* 3 *qu'on a besoin et on ne va pas s'enquiquiner sur la précision et puis à un moment donné on a plus d'exigence...*
Le prof de terminale considère que l'élève doit avoir acquis cette subtilité, le prof de 5ème sait que l'élève ne l'a pas acquise mais lui fait apprendre des règles de calcul, sachant qu'il ne peut pas avoir acquis cette notion parce que c'est trop difficile et il y a un moment qui n'est pas enseigné où l'élève doit faire ce passage, j'ai l'impression qu'on lui laisse faire assez mystérieusement...".

Représentations sur l'enseignement technique (RC)

L'enseignant a au cours de son entretien spontanément fait référence au fait qu'il travaillait dans un lycée technique comme facteur explicatif à un certain nombre de ses choix. On peut repérer deux éléments contradictoires dans ses représentations à ce sujet, les deux étant fortement liés à ce qui s'exprime dans ses représentations RA.

RC1 : dans l'enseignement technique, on évacue ce qui ne sert pas directement

RC2 : la notion de culture générale pour des élèves du technique doit inclure les mathématiques.

(En réponse à la question 1) :
Question : Sur les réels il y a eu beaucoup d'erreurs qui se sont manifestées dans votre classe.Qu' en pensez-vous ?
Réponse : *"c'est quelque chose que j'ai tendance à évacuer comme difficulté, mais ça dépend un peu des classes où j'enseigne, par exemple en première d'adaptation sauf séance spéciale sur la question je ne mets pas d'exercices avec un dénominateur* 3 *sinon on récupère un décimal à la place en première étape, ni avec des racines donc on travaille avec des entiers ou des décimaux... et puis j'avais pas de seconde depuis longtemps et c'est bien l'âge où on peut leur faire rentrer dans la tête.*
En terminale F7 par exemple j'évacue, si par hasard il y a une racine carrée je m'en sors avec les log. Parfois je me dis que j'évacue trop... mais on est pris par le temps".

En réponse à la question 8 : *"je sens une énorme différence en lycée technique et classique... il y avait de ma part une acceptation d'en larguer un plus grand nombre, par l'idée que j'avais qu'un certain type d'exercices étaient quand même nécessaires pour que les meilleurs accèdent à un certain niveau en math... Je travaille beaucoup dans l'optique BAC (F7,F8,G).*
(un peu plus loin)

question : donc en fait qu'est-ce qui vous paraît le plus important dans les maths que vous enseignez à des élèves de lycée technique ?
réponse : *Moi ce que je voudrais, enfin, c'est une vaste question, c'est que la notion de culture générale inclue les mathématiques, c'est-à-dire que les élèves du technique, lorsqu'ils se dirigent vers le tertiaire, dans des sections où les maths ne seront pas utiles dans leur vie professionnelle, qu'ils aient l'impression que ce qu'ils aient acquis en math soit du niveau de la culture générale... je souhaiterais qu'un élève sortant de terminale ait la sensation qu'il lui est nécessaire pour la notion de culture générale de la société de savoir que* 2/3 *c'est pas pareil que* 0,6,... *ça serait assez ça oui".*

Représentation RB

Il y a une certaine linéarité de l'apprentissage : les notions se construisent par étapes en partant du plus simple au plus compliqué. L'élève est pris en compte dans son cheminement personnel à l'intérieur d'une série d'étapes bien aménagées par l'enseignant. Les erreurs lui sont signalées ou évitées à chaque étape. Avoir compris signifie savoir choisir le bon outil pour le bon exemple.

Le premier exemple frappant qui sera donné est la critique de l'énoncé de la question 1 où nous verrons l'enseignant partir de sa conception linéaire de l'apprentissage pour la remettre ensuite en cause. Nous voyons donc ici une brèche possible mais qui va se refermer ensuite dans les réponses ultérieures.

réponse à la question 4 : *"L'idée d'avoir tout son temps pour approfondir, je trouve ça assez plaisant, mais je trouve quand même que dans les classes ici dans notre lycée ça démarrait bien sec parce que c'était littéral, donc je partirais sur des exemples numériques,* $\sqrt{36}$ *puis* $\sqrt{5}$*...".*
intervention de l'expérimentateur : C'était fait exprès pour voir quels exemples ils pensaient à donner spontanément.
réponse : *ah d'accord, donc en fait j'ai dit que je commencerais par des exemples numériques mais, vous me faites douter parce que forcément je vais les sortir du type la réponse est un entier, puis du type la réponse n'est pas un entier mais est quand même assez facile à trouver* (0,064), *puis du type négatif et enfin* $\sqrt{17}$, *et là, je retrouve la difficulté.*
Donc en fait je m'imagine qu'ils ont une meilleure approche pour arriver à la bonne définition, ce qui n'est pas sûr parce que à, ce moment là, c'est bien moi qui ai implicitement catalogué les nombres en différentes catégories qui n'ont pas la même façon d'être par rapport au symbole $\sqrt{\cdot}$
Or justement on veut leur montrer que la seule classification c'est négatif ou positif.

réponse à la question 7 : *"Ah oui, l'utilisation des erreurs des élèves, c'est le point n° 1 de l'expérience que j'ai acquise, il faut même que je fasse attention à ne pas annoncer d'avance les erreurs qui vont être faites.*
Les erreurs je m'en sers dans les différentes étapes : un exemple qui est resté assez net dans ma vie professionnelle, les équations du 2ème degré:
les erreurs induisent ce que je fais, l'induction elle serait que je démarre de plus en plus proche.

La première année j'avais demandé de calculer x' *et* x" *et je n'avais pas compris pourquoi ça n'avait pas marché, la deuxième année calculer* Δ *puis* x' *et* x" *après je disais, que vaut* a, b, c *puis calculer* Δ *et* x' *et* x" *donc remonter de plus en plus".*

réponse à la question 5 : *Moi je considère qu'ont compris ceux qui arrivent à choisir le bon outil pour le bon exemple.*
Par exemple je mets une expression du deuxième degré pour laquelle je demande de faire un tableau de signe, calculer la dérivée, des choses de ce genre... je considère qu'ont compris ceux qui ne mélangent pas tout qui ne mettent pas dans le désordre tout ce qu'ils ont appris.
Oui cest le problème du choix pour moi au niveau du BAC il faut savoir choisir, en BTS savoir choisir dans des situations plus complexes.

5.5 Relecture de la séance X

L'enseignant qui a réalisé cette séance est celui qui avait prévu le plus grand nombre d'erreurs. De plus, il prendra en compte un certain nombre d'erreurs qu'il n'avait pas prévues et modifiera ainsi son regard sur la séance. Nous avons retenu dans son discours deux difficultés importantes (RA1 et RA2), car l'enseignant y est revenu plusieurs fois. Mais la discussion a porté sur bien d'autres erreurs et il y a eu à chaque fois recherche d'une explication de l'erreur.

RA1: La difficulté est due à l'assimilation du mot racine carrée au symbole $\sqrt{\ }$

RA2 : Beaucoup d'élèves gardent l'idée que $\sqrt{a}$ doit être un entier

RA3 : $\sqrt{a}$ est un processus avant d'être un nombre

La difficulté contenue en RA1 avait été longtemps exploitée en classe au moment de la reconstruction de la définition de racine carrée. Par contre les difficultés signalées en RA2 et RA3 n'ont pas été abordées en classe mais ont frappé l'enseignant à la relecture des copies. Nous pouvons faire l'hypothèse d'un cadre de référence assez souple permettant d'intégrer des éléments nouveaux qui vont modifier les représentations initiales.

Voici des extraits de l'entretien qui illustrent notre analyse.

(en réponse à la question 1) : *"Alors une première chose ce problème du signe - associé à la notion de racine carrée, en majorité ils savent qu'il y a un problème quelque part mais ils ne savent pas trop si c'est sous le radical ou devant qu'il y a problème. La présence du moins gâche tout même si ce moins est au carré...*
J'attribue cette erreur à l'assimilation du mot racine carrée et du symbole radical. C'est-à-dire que si on insiste pas pour dire qu'il y a deux nombres dont le carré est a *et que c'est le nombre positif qu'on désigne par* $\sqrt{a}$ *alors ils font l'assimilation et ils écriront aussi bien* $\sqrt{4} = -2$*."*
(un peu plus loin):
"Alors là il y a une idée, je n'en ai pas encore parlé, l'idée que la racine carrée ça doit être un nombre entier, il y en a beaucoup qui ont rayé $\sqrt{17}$ et $\sqrt{5}$*, encore que je ne sais pas trop si c'est à cause de 5 ou du signe - Il y en a qui ont rayé* $\sqrt{17}$ *parce que* 17 *est premier.ça ne m'avait pas du tout effleuré, cette notion de nombre premier. J'avais bien pensé quelque part qu'ils devaient connaître* $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$*, que pour ceux-là ils savaient*

répondre mais pas qu'ils auraient fait quelque part une association entre racine carrée et nombre premier. Je me demande si ça ne provient pas aussi de la confusion que j'ai rencontrée entre carré et double ; je pense que ce sont des erreurs de compréhension, ce qui me fait dire que ce ne sont pas des erreurs d'étourderie c'est qu'il y en a qui justifient par écrit. Et puis il y aussi le problème du nombre réel, la confusion entre réel et entier, je me demande si la différence entre les deux a été faite en premier cycle, d'habitude je le faisais en début de seconde, cette année je ne l'ai pas fait, peut-être que ça classait un peu les choses".

"Je repense à ces égalités, $\sqrt{\bar{a}} = a/2$, $16 = 16/2$, $\sqrt{25} = 5$ *donc* $5^2 = \sqrt{5}$ *ça me pose la question du signe =, ce signe égal c'est un code magique, c'est comme dans un problème concret* 3Kg = 6F *ça serait intéressant de gratter ce qu'il y a dessous.* $\sqrt{A}$ *c'est pas un nombre c'est plutôt un processus, le signe = voudrait dire "s'obtient en faisant". En tout cas j'ai eu une révélation c'est les différents sens qu'ils peuvent donner au signe =, on a symbolisé trop vite, il faut "désymboliser" en seconde, il faut faire écrire les choses avec des mots".*

Représentations RB

Ce n'est pas l'enseignant qui est au centre du processus d'apprentissage, mais l'élève. L'enseignement part de l'état des connaissances antérieures de l'élève. On fait émerger les erreurs pour les démolir. Les interactions entre élèves sont favorisées.

(réponse à la question 7) : *"je pars rarement d'un savoir que je détiens, sauf sur des chapitres où ils ne connaissent pas le vocabulaire, je fais jaillir des mots et à partir des mots j'essaie de faire émerger ce qui est juste et ce qui est faux dans leur tête".*
réponse à la question 5 : *"pour moi avoir compris c'est être capable de réexpliquer aux autres".*

Représentation RC : C'est plus laborieux mais c'est plus facile d'utiliser l'erreur dans une classe où tout le monde est d'un niveau faible. Il n'y a pas de différence dans les objectifs assignés à l'enseignement technique.

Signalons que l'enseignant n'a pas fait référence de lui même aux classes dans lesquelles il enseigne. Il répond à la question 8. On verra ici que l'homogénéité des classes explique mais en partie seulement le comportement face à l'erreur.

réponse à la question 8 : *"moi je pense que la façon dont j'enseigne dépend du fait qu'il y a rarement quelqu'un qui trouve la bonne réponse tout de suite donc il y a moyen de discuter, j'imagine que si j'avais trois élèves brillants dans une classe je ne pourrais pas agir de la même façon, les erreurs seraient tout de suite corrigées par les bons élèves".*
"Il y a des objectifs auxquels je tiendrais même si je n'étais pas dans le technique, développer l'esprit critique (la publicité, les pourcentages), donner une formation d'esprit, apprendre à manier le raisonnement déductif. Au niveau des contenus, parce que ce sont des élèves qui ont des difficultés en général, j'adapte, j'enlève tout ce qui n'est pas directement utilisable dans l'immédiat, c'est à dire leurs études jusqu'à BAC + 2".

5.6 Conclusion

Nous avons observé quatre conduites différentes de la même séance. Nous allons résumer les caractéristiques de chacune d'elles en mettant en évidence la dialectique potentielle représentation-pratique.

Les flèches en pointillé indiquent les accès possibles à la variabilité des représentations.

Reprécisons que notre étude porte sur les représentations RA, RB et RC facilement accessibles dans notre processus expérimental mais que cette étude n'est pas exhaustive et que bien d'autres représentations peuvent entrer en jeu.

séance Z :

trace des représentations au moment de l'entretien

Représentations .... dont
RA : difficulté due à la signification de la lettre
RB : le rôle déterminant de l'enseignant qui montre ce qu'il faut faire
erreur due à oubli, méconnaissance de règles
RC : pas de grosse différence technique - classique

erreurs prévues a priori

erreurs de type VA
(domaine dans l'ex. 7)
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

points forts de l'entretien

le problème vient de la signification
de la lettre erreurs DE minimisées
erreurs AL renvoyées à l'oubli des
règles conseils = définition
sans s'attarder + exemples
de renforcement

observation de la séance Z

erreurs pointées en classe : de type AL, DE,
corrigés = aller et retour enseignant-élève avec
validation en vrai-faux par l'enseignant
arrêt dès l'obtention de la bonne réponse
envoi à définition ou règles déjà vues
remise au point = rappel de définition + exemples

erreurs vues sur les copies des élèves
erreurs de tout type RE, DF, AL, VA, DE

Dans le cas de la relecture de la séance Z, il y a une parfaite cohérence et les rétroactions viennent conforter RA, RB, RC.

Séance Y :

Trace des représentations au moment de l'entretien

Représentations .... dont
RA : difficulté due à la compréhension en profondeur, de type philosophique des différentes sortes de nombres
RB : conception linéaire de l'apprentissage par étapes successives
RC : très grosse différence de comportement dans la pratique à la fois évacuer les difficultés et travailler dans l'optique BAC et souhaiter que la culture générale inclut les maths (donc accès à des problèmes plus "philosophiques")

erreurs prévues a priori

erreurs de type AL (sur les uniquement
$(\sqrt{-5})^2$; $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt{3^2 * 5^4}$; $(\sqrt{-15})^2$
erreurs de type VA (domaine ex 7)
stratégies différentes l'ex 6

points forts de l'entretien

confusion réel et approximation décimale
problème philosophique sur la nature d'un réel et renvoie à l'enseignement
problème de l'unicité d'une écriture
non maîtrise des décimaux
critique des énoncés (dans le sens pas assez d'étapes)
prendre en compte de l'erreur = aménager des étapes

observation de la séance Y

repérage de tout type d'erreurs sauf DF
correction personnalisée avec aller et retour et validation en vrai-faux par l'enseignant
remise au point d'une définition insistant sur l'unicité de $\sqrt{a}$
remise au point sur la notion de réel

erreurs vues sur les copies RE, AL, VA, DE

flèches ------► : indiquent des éléments de l'entretien qui apportent un questionnement

Séance X :

Trace des représentations au moment de l'entretien

RA : difficulté due à l'assimilation du mot racine au symbole $\sqrt{}$
et à la nature des nombres ($\sqrt{a}$ doit être un entier)
$\sqrt{a}$ doit être un processus avant d'être un nombre
RB : élève au centre du procesus d'apprentissage
RC : pas de différence dans les objectifs mais dans les contenus
homogénéïté des classes permettant plus facilement un travail sur l'erreur

erreurs prévues a priori
très nombreuses pour les catégories AL, DE, VA
difficulté à envisager $\sqrt{a}$ lorsque ce n'est pas un entier

points forts de l'entretien

erreurs de type RE
problème symbole $\sqrt{}$
statut du signe =
erreurs de type DF
partir du savoir des élèves
faire émerger les erreurs

observation de la séance X

repérage de tout type d'erreur (mais peu de temps passé sur RE et DF)
corrigé avec acceptation sans jugement a priori des réponses élèves
recherche de l'explication de l'erreur
reconstruction de la définition de $\sqrt{a}$ avec les élèves en insistant sur les problèmes d'unicité d'écriture

erreurs vues sur les copies de tout type RE, DF, AL, VA, DE

Conclusion

Pour observer la prise en compte de l'erreur par les enseignants, nous avons choisi le thème racine carrée, thème propice à l'étude de l'erreur en classe de seconde. On peut en effet observer des erreurs propres au savoir considéré (obstacle épistémologique), des erreurs liées aux conceptions construites par les élèves sur le savoir, et des erreurs liées à des obstacles didactiques.

De la préexpérimentation nous avons pu retenir que **le concept de racine carrée associé à celui de nombre réel était un concept loin d'être acquis en seconde et donc encore en cours de construction. Il semble que cette difficulté due à un obstacle épistémologique incontournable soit sous-estimée par les enseignants qui s'attachent plus volontiers à des erreurs de type calcul algébrique sur les racines carrées.**

Nous avons fait l'hypothèse qu'un certain nombre de représentations étaient responsables des choix globaux de l'enseignant pour sa conduite de séances d'exercices en classe et sa stratégie de traitement de l'erreur. En ce qui concerne notre étude nous avons pu mettre en évidence que les différentes stratégies de traitement de l'erreur avaient une influence sur **l'émergence des erreurs en cours de séance, et l'activité des élèves durant la séance.**

Certaines séances sont plus propices à l'émergence de nombreuses erreurs et semblent plus centrées que d'autres sur l'objectif "démonter le mécanisme de l'erreur". Le travail fait par l'élève pour retrouver lui-même son erreur laissera peut-être plus de trace que la simple acceptation de la vérité donnée par l'enseignant. On pourrait donc penser que ces types de séances favorisent la construction du sens par les élèves.

Néanmoins nous n'avons aucun moyen d'affirmer que ces différentes stratégies des enseignants entraînent chez les élèves des comportements différents au niveau de l'apprentissage. En effet les élèves arrivent eux-mêmes en classe avec leur propre représentation de l'apprentissage et développent peut-être eux même des stratégies d'adaptation aux différentes méthodes des enseignants ce qui rend le problème complexe à étudier. Nous ne disposons pour l'instant d'aucune étude à ce sujet.

Nous nous sommes intéressés aux représentations RA, RB, RC auxquelles notre processus expérimental donnait facilement accès. Nous avons fait l'hypothèse que ces représentations étaient stables (donc n'allaient pas changer fondamentalement du jour au lendemain) mais étaient également susceptibles de variations. **Nous avons donc envisagé les représentations dans leur dialectique potentielle avec les pratiques. Nous avons étudié ici la confrontation de représentations à un objet, la séance faite en classe.**

Nous avons regardé ce qui se passait au niveau des rétroactions. Nous ne disposons donc que de l'état (temporaire ?) des représentations après la confrontation et il faut donc être prudent en affirmant que certains éléments nouveaux ont été amenés par la séance. En effet ces éléments "nouveaux" étaient peut-être présents à l'état latent dans les représentations initiales et n'attendaient que l'occasion pour être "révélés".

En mettant en relation les représentations RB avec ce qui est observé dans la séance, nous voyons qu'il y a en général cohérence et

que les rétroactions passent au travers d'un filtre de manière à conforter ces représentations.

Dans la réponse à la question 4 de l'entretien aucun enseignant n'est amené à remettre en cause sa représentation de l'apprentissage. Même lorsqu'il y a constat d'échec, ce qui est proposé pour améliorer est exactement de même nature (du moins au niveau de l'apprentissage) que ce qui a été proposé auparavant. Nous avons vu apparaître une seule fois (cas de SY) un doute au sujet de la représentation sur l'apprentissage, mais dès la fin de l'entretien la représentation initiale avait repris le dessus.

Les représentations RC nous semblent finalement assez peu déterminantes sinon peut-être que l'homogénéité des classes facilite la prise en compte de l'erreur. L'enseignant laisse souvent entendre que le comportement ne serait peut-être pas le même dans d'autres types de classe mais nous n'avons aucun moyen de savoir si c'est vrai ou bien si la composante personnelle de l'enseignant serait plus forte ou bien si la représentation RB n'est pas en fait la seule déterminante. Les représentations RC seraient alors un "sous produit " de RB.

Les représentations RA (sur la notion mathématique) semblent être les plus sujettes à modifications. C'est en effet à propos de RA que nous avons vu des enseignants changer de point de vue sur la notion de racine carrée. Nous n'avons aucun moyen d'affirmer que ces changements de regard seront durables.

Un des axes de recherche en formation des maîtres serait donc la construction de séquences de formation qui ne soient pas incompatibles avec les représentations initiales et qui dans le même temps apportent des éléments de rupture permettant un questionnement.

Nous affirmerons en conclusion **l'importance déterminante de tout ce qui se passe en amont de la séance mathématique et que nous avons modélisé par le concept de représentation au sens des psychologies sociales. Nous pensons qu'il est indispensable de faire un gros travail à ce sujet pour rendre une formation des enseignants pleinement efficace.**

Bibliographie

ABRIC J.C., (1987).*Coopération, compétition et représentations sociales* Ed Del Val

ASSUDE T., (1989).Racines carrées : conceptions et mise en situations d'élèves de quatrième et troisième *in "petit x" n°20 p.5 à 33 IREM de Grenoble.*

BROUSSEAU G., (1983). Obstacles épistémologiques en math *in RDM Vol. 4.2 pp 167 à 196.*

CHARNAY R., (1987). Statut de l'erreur de l'enseignement, CM_2-6ème. *Equipe de recherche articulation école-collège ; INRP.*

CIEAEM, (1988). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. *Actes de la 39ème conférence.*

DIONNE J., (1986). Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire. *thèse de l'université de Montréal publications de la faculté des Sciences de l'Education.*

IMAT, (1990). *Séminaire de DIDIREM du 4 avril 1990.*

JODELET D., (1989). Les représentations sociales.

MIIHAUD N., (1980). Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves. *IREM de Bordeaux.*

ROBERT A., ROBINET J., (1989). Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs. *Cahier de DIDIREM Université Paris 7.*

SOKONA M., (1989). Erreurs et conceptions d'élèves de 9ème, 10ème, 11ième sur la notion de racine carrée. *Mémoire de DEA, ENS de Bamako.*

ANNEXE

I - Texte de l'entretien

A partir de la séance sur racine carrée

1. Quelles sont les erreurs des élèves qui vous ont le plus surpris ?
2. A votre avis à quoi peuvent être dues les erreurs faites par les élèves ? (prendre des exemples à partir des copies des élèves).
3. Quels conseils donneriez-vous à un élève pour ne plus faire ces erreurs ?
4. Si vous aviez l'intention d'amener vos élèves à une bonne maîtrise de la notion de racine carrée (et si vous disposiez d'un temps suffisant) comment vous y prendriez-vous ?

De façon plus générale

5. A quoi voyez-vous qu'un élève a compris (n'a pas compris) une notion ? A quel moment ?
6. Lorsque vous repérez qu'un élève s'est trompé faites-vous quelque chose tout de suite ? Sinon comment vous y prenez-vous ?
7. Utilisez-vous les erreurs que font les élèves ? Si oui comment ? (préparation d'un cours, d'un devoir, correction...)
8. Cette attitude au sujet des erreurs est-elle différente de celle que vous avez pu avoir dans l'enseignement classique ?

Plus généralement les objectifs que vous vous fixez dans l'enseignement technique sont-ils différents de ceux que vous avez eu (auriez eu) dans l'enseignement classique ?

II - Texte de la séance d'exercices

Nom Prénom — **feuille n°1** **sans calculatrice**

première question :

Une civilisation d'une autre galaxie est venue chez nous.Ils connaissent le français et les quatre opérations : + - * /.
Ils ont demandé ce que signifiait $\sqrt{a}$. Expliquez à ces visiteurs extra terrestres la signification de $\sqrt{a}$.

Attendre que les élèves aient fini avant de distribuer la feuille n° 2.

Nom Prénom — **feuille n°2** **sans calculatrice**

deuxième question :

Dans le lieu désert où vous avez rencontré les extra-terrestres il n'y a pas de calculatrice. Vous voulez expliquez comment calculer $\sqrt{7}$ et $\sqrt{256}$. Comment vous y prenez-vous ?

troisième question :

Dire si chacune des écritures suivantes représente un réel. Barrer celles qui ne conviennent pas en argumentant avec précision.

$$\sqrt{17}\ ;\ \sqrt{36}\ ;\ \sqrt{7}\ ;\sqrt{0.9}\ ;\ \sqrt{(-15)^2}\ ;\ -\sqrt{5}\ ;\ (\sqrt{-5})^2\ ;\ \sqrt{\frac{19}{6}}.$$

Nom Prénom **feuille n°3**
sans calculatrice

quatrième question :

Lorsque cela est possible, écrire les nombres suivants sans.
Lorsque cela est impossible expliquer pourquoi.

$\sqrt{36}$

$\sqrt{(-3)^2}$

$\sqrt{0{,}036}$

$\sqrt{4+36}$

$\sqrt{8}+\sqrt{8}$

$(\sqrt{13})^2$

$\sqrt{\dfrac{-25}{-9}}$

$\sqrt{0{,}0064}$

$\sqrt{3^2 * 5^4}$

Nom Prénom **feuille n°4**
calculatrice autorisée

cinquième question :

Dans un exercice Laetitia a calculé $\sqrt{3}$ avec sa calculatrice. Elle dit que la valeur de 3 est 1.732050808. Florent prend sa propre calculatrice, effectue le calcul 1.732050808 * 1.732050808 et trouve 3.000000001.
Il dit que la valeur donnée par Laetitia n'est pas correcte.
Qui des deux a raison ? Argumentez avec précision.

sixième question :

a) Par combien faut-il multiplier le côté d'un carré pour que son aire soit doublée ?
b) Par combien faut-il multiplier le rayon d'un cercle pour que son aire soit triplée ?

Nom Prénom **feuille n°5**

septième question :

Pour quelles valeurs de x et de y les expressions suivantes ont-elles un sens ? On ne demande pas d'effectuer le calcul.

$\sqrt{x^2}$

$\sqrt{-y}$

$\sqrt{-y^2}$

$\sqrt{(-x)^2}$

huitième question :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

a) $x^2 - 5 = 0$
b) $x^2 + 7 = 0$
c) $(x - 3)^2 - 25 = 0$